

# Einführung in die Elektrodynamik

## M 2.2 EDY SoSe 2024

Prof. Dr.-Ing. Benjamin Lehmann

Hochschule Bremen

3. Juli 2024

# Inhaltsverzeichnis

1. Motivation und Vorbetrachtungen
2. Elektrostatische Felder
3. Stationäre Elektrische Felder
4. Stationäre Magnetfelder
5. Das Quasistationäre Magnetfelder

# Inhaltsverzeichnis

## 1. Motivation und Vorbetrachtungen

- Das Skalarfeld
- Äquipotentiallinien und -flächen
- Das Vektorfeld und Feldlinienbild
- Der Begriff: Fluss
- Die Maxwell Gleichungen

## 2. Elektrostatische Felder

- Eigenschaften des Elektrostatischen Feldes
  - Elektrische Ladung
  - Erweiterung der "Materie" um Ladung
  - Sonderfall: Die *Punktladung*
  - Elektrostatisches Feld
  - Das Coulombsche Gesetz
  - Die Elektrische Feldstärke

- Vergleich Coulomb-Kraft und Gravitationskraft
- Verhalten von Leitern im Elektrostatischen Feld
  - Influenz
  - Punktladungen außerhalb des Ursprunges
- Elektrische Spannung und Potential
  - Wegunabhängigkeit der Elektrischen Spannung
  - Das Elektrische Potential
- Die Erregung des Elektrostatischen Feldes
  - Die Elektrische Flussdichte
  - Der Gaußsche Satz der Elektrostatik
  - Zusammenhang von  $E$ - und  $D$ -Feldern
  - Das Materialgesetz der Elektrostatik
- Feldstärke und Potential spezieller Ladungsverteilungen
  - Feldstärke und Potential einer geladenen metallischen Kugel
  - Feldstärke und Potential einer weit ausgedehnten Metallebene
  - Feldstärke und Potential von zwei parallelen, geladenen Platten
  - Feldstärke und Potential einer Linienladung



- Bedingungen an Grenzflächen
  - Brechungsgesetz der Feldlinien an Grenzflächen
- Kondensator und Kapazität
  - Ladevorgang eines Kondensators
  - Impedanz des Kondensators
  - Parallel- und Reihenschaltungen von Kapazitäten
  - Die Kapazität spezieller Anordnungen: Zylinderkondensator (Koaxialkabel)
  - Die Kapazität spezieller Anordnungen:  
Zylinderkondensator mit Mehrschichtdielektrikum
  - Die Kapazität spezieller Anordnungen: Doppelleitung
  - Die Kapazitäten idealer Kondensatoren [2]
  - Die Kapazität spezieller Anordnungen: Überblick
- Energie und Kräfte im elektrostatischen Feld
  - Elektrische Energie und Energiedichte
  - Kräfte im elektrostatischen Feld und Virtuelle Verschiebung
  - Kräfte auf bewegliche Ladungen
  - Ablenkung in Elektronenstrahlröhren

### 3. Stationäre Elektrische Felder

- Eigenschaften des Elektrischen Strömungsfeldes
  - Die Elektrische Stromdichte; Kontinuität des stationären Strömungsfeldes
  - Wegunabhängigkeit der elektrischen Spannung
  - Das Materialgesetz des Elektrischen Strömungsfeldes
  - Gesetz über die Energiewandlung in Leitern
  - Analogie zwischen Elektrostatik und stationären Strömungsfeldern
- Widerstandsberechnung bei inhomogenen Feldern
  - Variation des Querschnittes entlang des Ladungstransport
  - Variation der Länge der Stromfäden oder Variation der Leitfähigkeit
- Berechnung elektrischer Strömungsfelder
  - Homogenes Strömungsfeld in dünnen Leitern
  - Inhomogenes zylindrisches Strömungsfeld
  - Inhomogenes zylindrisches Strömungsfeld mit Querschichtung
  - Inhomogenes zylindrisches Strömungsfeld mit Längsschichtung

### 4. Stationäre Magnetfelder

- Kräfte auf durchströmte Körper
  - Kräfte zwischen parallelen Leitern
  - Magnetfeld eines langen Leiters: Magnetische Flussdichte und Feldstärke
  - Magnetfelder von Paralleldrahtleitungen
  - Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld
- Magnetfeld von Leitern in der Luft
  - Die Formel von Biot und Savart
  - Gültigkeitsbereich der Formel von Biot und Savart
  - Anwendung der Biot–Savartschen Formel
  - Magnetfeld eines endlich langen, geraden Leiterstückes
  - Magnetfeld auf der Achse einer kreisförmigen Leiterschleife
  - Magnetfeld auf der Achse einer kurzen Zylinderspule
  - Magnetfeld auf der Achse einer langen Zylinderspule
- Das Durchflutungsgesetz
  - Magnetische Durchflutung und Magnetische Spannung
  - Anwendung des Durchflutungsgesetzes
  - Erweitertes Durchflutungsgesetz




- Der magnetische Fluss; Kontinuität des Flusses
  - Der Gaußsche Satz des Magnetfeldes
- Das magnetische Verhalten materieller Körper
  - Das Materialgesetz
  - Klassifizierung von Materialien
  - Magnetisierungskennlinie, Hysteresekurve
- Bedingungen an Grenzflächen
  - Brechungsgesetz der Feldlinien an Grenzflächen
- Der magnetische Kreis
  - Berechnungsmethoden für lineare Magnetkreise
  - Berechnung von unverzweigten Kreisen
  - 1. Berechnungsweg: „Drei Gesetze der stationären Magnetfelder“
  - 2. Berechnungsweg: „Numerische Feldberechnung“
  - 3. Berechnungsweg: „Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises“
  - Kräfte auf hochpermeable Eisenflächen
  - Unterschiede Dauermagnet und bestromte Spule



## 5. Das Quasistationäre Magnetfelder

- Induktionswirkung und Induktionsgesetz
  - Lenzsche Regel
  - Kraft auf bewegte Ladungen im Magnetfeld
  - Das Induktionsgesetz in einfacher Form:  
Die Bewegungsinduktion
  - Das Induktionsgesetz in einfacher Form: Die Ruheinduktion
  - Das Induktionsgesetz in allgemeiner Formulierung
  - Induktionsgesetz, Anwendung 1:  
Konstante Geschwindigkeit, zeitlich konstantes Magnetfeld
  - Induktionsgesetz, Anwendung 2:  
Unbewegter Stab, zeitlich variables Magnetfeld
  - Induktionsgesetz, Anwendung 3:  
Konstante Geschwindigkeit, zeitlich veränderliches Magnetfeld
  - Induktionsgesetz, Anwendung 4:  
Variable Geschwindigkeit, konstantes Magnetfeld
  - Induktionsgesetz, Anwendung 5:  
Unbewegter Stab, Feld zeitlich variabel und inhomogen
  - Wirbelströme bei Wechselstrom

- Induktivitäten
  - Selbstinduktion und Induktivität
  - Impedanz der Induktivität
  - Induktivität spezieller Anordnungen: Zylinderspule (Solenoid)
  - Induktivität spezieller Anordnungen: Zylinderspule (Solenoid)
  - Induktivität einer Ringspule (Toroid)
  - Induktivität einer Spule mit Eisenkern und Luftspalt
  - Induktivität einer Spule mit Eisenkern ohne Luftspalt
  - Induktivität einer Doppelleitung
  - Induktivität eines Koaxialkabels
  - Gegeninduktivität magnetisch gekoppelter Spulen
- Energie und Kräfte im Magnetfeld
  - Magnetische Energie und Energiedichte
  - Berechnung von Kräften über die Magnetenergie

## Quellen

-  K. Ebeling and J. Mähnß.  
Elektromagnetische Felder und Wellen [Skriptum].  
Universität Ulm, June 2022.
-  M. Marinescu.  
*Elektrische und magnetische Felder.*  
Springer Berlin Heidelberg, 2012.
-  S. Peik.  
Elektrische und magnetische Felder.  
Mar. 2016.

-  A. J. Schwab.  
*Begriffswelt der Feldtheorie.*  
Springer Berlin Heidelberg, 2013.
  
-  G. Strassacker and R. Süsse.  
*Rotation, Divergenz und Gradient.*  
Vieweg+Teubner Verlag, 2003.



# 1 Motivation und Vorbetrachtungen

Zunächst wird die Motivation und einige grundlegende Begrifflichkeiten erläutert.

## Das Skalarfeld

Sollen Feldgrößen beschrieben werden, kann die Aufteilung des interessierenden Raumes in Teilbereiche zweckmäßig sein. Für jede Teilfläche kann die dort vorherrschende Größe, bspw. die Temperatur, Luftdruck, etc. durch einen Zahlenwert ausgedrückt werden. Diese *skalare, ortsabhängigen Ortsfunktionen* werden als *Skalarfeld* bezeichnet,  $O(x, y)$ . Fläche mit gleichen Werten, werden *Äquipotentialflächen* genannt.

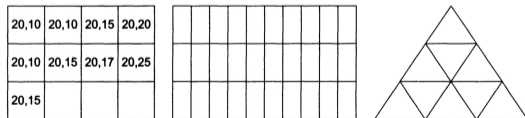


Abb. 1: Beispiele für unterschiedliche Skalarfelder [5]

## Äquipotentiallinien und -flächen

Zwei verschiedene Arten von Skalarfeldern sind gebräuchlich. Orte mit gleichem Betrag werden miteinander verbunden; so entsteht in der Ebene eine Schar von Kurven oder im Raum eine Schar von Flächen, deren Beträge jeweils konstante sind. Die zweite Art ist die bereits gezeigte Darstellung von Beträgen in äquidistanten Abständen. Diese Erfassung entspricht praktischerweise der zeilen- und spaltenweise Darstellung einer Matrix.

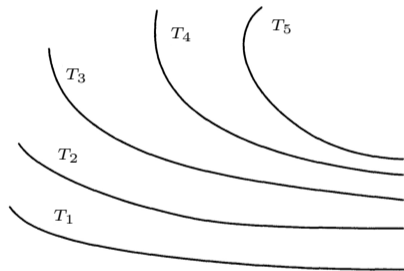


Abb. 2: Darstellung Äquipotentiallinien [5]

## Das Vektorfeld und Feldlinienbild

In Ergänzung zu Skalarfeldern kann für Vektorfelder zu jedem Punkt im Raum zusätzlich zum Betrag eine Richtung angegeben werden, auch *Feldvektor* genannt. Feldlinien sind dafür ein sehr übersichtliches Hilfsmittel. Feldlinien sind dadurch gekennzeichnet, dass an jeder Stelle des Raumes der Feldvektor in Richtung der Tangente an die Feldlinie übereinstimmt. Die Längen von Feldvektoren beschreiben die Beträge. Eine Feldlinie entsteht dann durch Verbinden der Anfangspunkte der Feldvektoren.

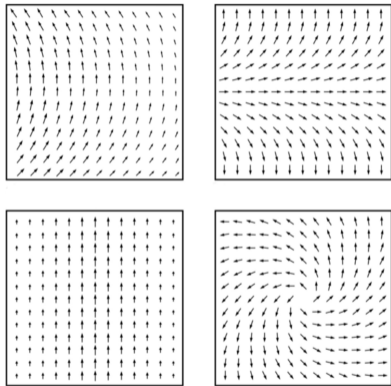


Abb. 3: Unterschiedliche Erscheinung von Vektorfeldern [4]

Feldlinien sind eine Darstellung, um Vektorfelder anhand einer Verteilung von Linien darzustellen. Dabei entsprechen Bereiche mit einer dichten Distribution von Feldlinien einer hohen Feldstärke. Die Feldstärke ist der Betrag des Feldvektors. Die im allgemeinen gekrümmten Feldlinien dürfen nicht mit den geraden Feldvektoren verwechselt werden.

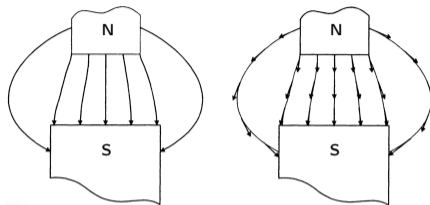


Abb. 4: Vektorfeld und Feldlinienbild [5]

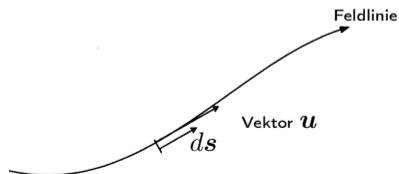


Abb. 5: Feldlinie, Vektor  $\mathbf{u}$  und Linienelement  $ds$  [5]

## Der Begriff: Fluss

Betrachtet sei die laminare Flüssigkeitsströmung durch ein metallisches Rohr. Die Geschwindigkeit in der Rohrmitte ist am größten; nimmt aber zur Rohrwand durch die Reibung der Flüssigkeitsmoleküle mit der Rohrwand gegen 0 ab. Das Flächenintegral über den kreisförmigen Rohrquerschnitt, integriert über Ringe mit konstanter Geschwindigkeit  $v$ , ergibt sich zu

$$\Phi = \iint v d\mathbf{A} = \frac{\text{Volumen}}{\text{Zeit}}; \quad d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA,$$

mit  $d\mathbf{A}$  dem Vektor des Flächenelements und  $\mathbf{n}$  der Normalenvektor. Ein Fluss ist die Summe der Feldlinien durch eine vorgegebene, wohldefinierte Fläche  $A$ .



Abb. 6: Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt [5]

Für die Verallgemeinerung des Begriffes *Flusses* lässt sich die Verbindung zu den Feldgrößen, hier Strömungsgeschwindigkeiten, aufzeigen. Betrachtet wird die Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit in einem Rohr. Hier muss für jeden Rohrquerschnitt das gleiche Flüssigkeitsvolumen hindurchströmen.

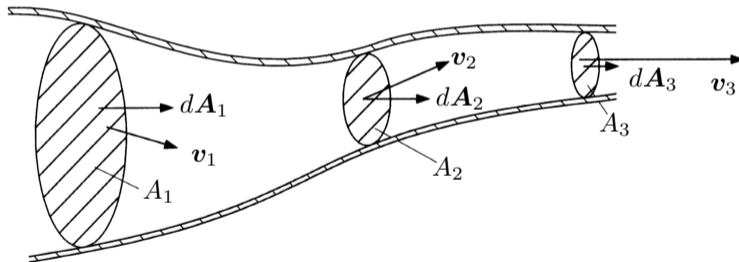


Abb. 7: Flüssigkeitsströmung bei variablem Querschnitt [5]

Ein Fluss ist die Summe der *Feldröhren* durch eine vorgegebene Fläche  $A$ .

## Die Maxwell Gleichungen

Der schottische Physiker James Clark Maxwell (1831–1879) veröffentlichte in seinem Werk *A Treatise on Electricity and Magnetism* im Jahr 1873 alle damaligen vorhandenen Kenntnisse über Elektromagnetismus. Darüber hinaus entwickelte er ein System von vier Gleichungen, das nicht nur die bis dahin erhaltenen Versuchsergebnisse enthielt, sondern auch die theoretisch Existenz von elektromagnetischen Wellen zeigte. Diese wurden erst 1886 erstmals von Heinrich Hertz erzeugt und nachgewiesen.

### Maxwell Gleichungen

Die *Maxwell Gleichungen* beschreiben vollständig alle phänomenologischen elektromagnetischen Erscheinungen und bilden die vollständigen Grundlagen der Elektrodynamik.

Die vier Gleichungen lauten in integraler Form:

**1. Gleichung:** *Das Durchflutungsgesetz, Gesetz nach Ampere*

$$\oint \mathbf{H} ds = \iint \left( \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{A},$$

mit  $\mathbf{H}$  der magnetischen Feldstärke,  $\mathbf{J}$  der elektrischen Stromdichte,  $\mathbf{D}$  die elektrische Flussdichte,  $ds$  dem Wegelement und  $d\mathbf{A}$  dem Flächenelement.

**2. Gleichung:** *Das Induktionsgesetz, Gesetz nach Faraday*

$$\oint \mathbf{E} ds = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) ds - \iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A},$$

mit  $\mathbf{E}$  der elektrischen Feldstärke,  $\mathbf{v}$  der Geschwindigkeit,  $\mathbf{B}$  der magnetischen Flussdichte.



### 3. Gleichung: *Der Gaußsche Satz des Magnetfeldes*

$$\oiint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0.$$

### 4. Gleichung: *Der Gaußsche Satz der Elektrostatik*

$$\oiint \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q,$$

mit  $Q$  der elektrischen Ladung.

Diese vier Gleichungen sind im Vakuum gültig; sie werden durch drei Materialgesetze ergänzt:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \text{ mit der Permittivität: } \epsilon$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \text{ mit der Permeabilität: } \mu$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}, \text{ mit der spezifischer Leitfähigkeit: } \kappa$$

Die Maxwell-Gleichungen können nicht bewiesen werden; hier sind die folgenden wesentlichen Aspekte zu beachten:

- **Empirische Basis:** Die Maxwell-Gleichungen wurden durch Experimente und Beobachtungen entwickelt.
- **Mathematische Struktur:** Die Maxwell-Gleichungen können mathematisch hergeleitet werden, wenn man bestimmte Annahmen und Axiome über die Natur der elektrischen und magnetischen Felder und ihre Wechselwirkungen akzeptiert. Dazu gehören: (i) Gesetz von Coulomb, (ii) Gesetz von Biot-Savart, (iii) Faradays Gesetz der elektromagnetischen Induktion (iv), Kontinuität von Ladung, (v) der Verschiebungsstroms.
- **Theoretische Konsistenz:** Die Maxwell-Gleichungen sind in Übereinstimmung mit der speziellen Relativitätstheorie und anderen fundamentalen physikalischen Theorien.
- **Experimentelle Bestätigung:** Zahlreiche Experimente haben die Vorhersagen der Maxwell-Gleichungen bestätigt. Dies umfasst u.a. die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen oder die Wechselwirkung von Licht mit Materie.

## 2 Elektrostatische Felder

In der Elektrostatik werden statische, also ruhende, Ladungen und deren Wirkung auf die Umwelt betrachtet; diese kann wiederum andere statische Ladungen beinhalten. Es werden grundlegende Eigenschaften aufgezeigt, die in technischen Aufbauten ihre Anwendung finden. Die Grundsätze der Elektrostatik sind:

- Keine Bewegung von freien Ladungsträger (makroskopisch).
- Freie Ladungsträger sind in Leitern vorhanden.
- In Dielektrika (Nichtleitern) sind i.d.R. keine freien Ladungsträger vorhanden.
- Zum Zeitpunkt der Betrachtung sind alle dynamischen Ausgleichsvorgänge (Ströme) abgeschlossen.
- Keine zeitabhängigen Funktionen:  $\frac{\delta f}{\delta t} = 0, f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$

## 2.1 Eigenschaften des Elektrostatischen Feldes

### Elektrische Ladung

- Materie ist elektrisch neutral; die Summen der eingeschlossenen positiven sowie negativen Ladungen sind gleich groß  $\Rightarrow$  kein Außenfeld.
- Einem Außenfeld entsteht bei gestörtem Gleichgewicht.
- Geladener Körper: Über- oder Überschuss an negativer Ladung.
- Mit einer Ladungstrennung geht stets Arbeit einher.
- Erweiterung der Eigenschaften von Materie, vgl. 26.

### Ladungserhaltungssatz der Elektrostatik [2]

Die algebraische Summe der in dem abgeschlossenen Volumen enthaltenen Ladungen (Gesamtladung) ist stets konstant, sie kann sich nur anders verteilen:  $\sum Q = const.$

- Die elektrische Ladung wird in *Coulomb* (C) angegeben: [Ladung] = C = As.
- Alle Ladungen ( $Q$ ) sind ganzzahlige Vielfache der Elementarladung  $q = e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C.
- Gebräuchlich sind die folgenden idealisierten Ladungsverteilungen:
  - ▶ Punktladungen, vgl. Seite 27
  - ▶ Linienladungen: Querabmessungen « Längsabmessungen (bspw. Draht)
  - ▶ Flächenladungen: flächige Anordnung
  - ▶ Raumladungen: räumliche Anordnung
- Daraus ergibt sich die Definition der *Ladungsdichten*  $\rho_{\{L,A,V\}}$ 
  - ▶ Linien-Ladungsdichte:  $\rho_L = \frac{Q}{l}$ , mit der Ladung  $Q$  und der Länge  $l$
  - ▶ Flächen-Ladungsdichte:  $\rho_A = \frac{Q}{A}$ , mit der Fläche  $A$
  - ▶ Volumen-Ladungsdichte:  $\rho_V = \frac{Q}{V}$ , mit dem Volumen  $V$

## Erweiterung der “Materie” um Ladung

Die Masse ist eine grundlegende physikalische Eigenschaft von Materie und weist mehrere wesentliche Eigenschaften auf:

- Trägheit: Die Masse eines Körpers bestimmt seine Trägheit.
- Gravitationswirkung: Jeder Körper mit Masse zieht andere Massen an.
- Erhaltungsgröße: Die Masse bleibt in einem abgeschlossenen System.
- Additivität: Die Gesamtmasse eines Systems ist die Summe der Teil-Massen.
- Energieäquivalenz: Nach Einsteins Formel  $E = m c^2$  ist Masse eine Form von Energie, mit  $c$  der Lichtgeschwindigkeit.
- Unabhängigkeit von Zustand und Position: Die Masse eines Körpers ist unabhängig von seiner Position im Raum und seinem physikalischen Zustand (fest, flüssig, gasförmig).

## Sonderfall: Die *Punktladung*

Um über die Ladungseigenschaften eines Raumpunktes Aussagen treffen zu können, bezieht man sich auf ein infinitesimales Volumen mit einer infinitesimalen Ladung. Per Definition bleibt der Quotient bei der Grenzbetrachtung  $\Delta V \rightarrow 0$  endlich und man erhält die Punkt-Ladungsdichte:

$$\rho_P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

Eine räumliche Anordnung kann alternativ auch mit der Delta- oder Dirac-Funktion für den Raumvektor  $\mathbf{r}_q$  beschrieben werden:

$$\rho_P(\mathbf{r}_q) = Q(\mathbf{r}_q) = Q \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_q), \text{ mit: } \delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Die  $\delta$ -Funktion wird nur ungleich Null für  $\mathbf{r} - \mathbf{r}_q = \mathbf{0}$  und stellt dort einen unendlich hohen, unendlich schmalen Impuls, mit der Impulsfläche 1, dar.

## Elektrostatistisches Feld

Tritt in einem Raum eine Wirkung durch eine Ladungsanordnung auf, spricht man von einem *Elektrostatistischem Feld*, welches von vektorieller Natur ist. Vektorielle Felder können durch Feldlinien veranschaulicht werden; für jeden Punkt im Raum gibt es einen Betrag und eine Richtung. Der Betrag wird durch die Dichte der Feldlinien repräsentiert, wobei die Richtung tangential zur Feldlinie verläuft. Man unterscheidet zwischen *homogenen* und *inhomogenen* Feldern.

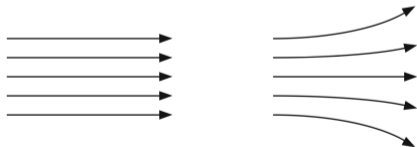
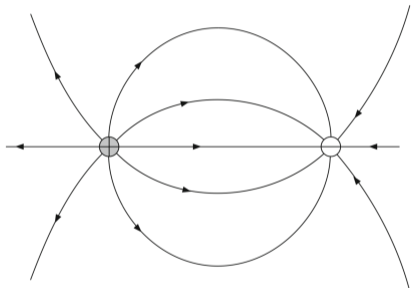


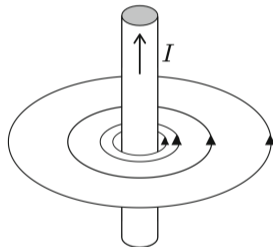
Abb. 8: Beispiel für ein homogenes und inhomogenes Vektorfeld [2]



Es wird zudem für Vektorfelder zwischen reinen *Quellenfeldern* und reinen *Wirbelfeldern* unterschieden.



**Abb. 9:** Quellenfeld: Inhomogenes elektrisches Feld zweier gleichgroßer ungleichnamiger Punktladungen [2]



**Abb. 10:** Wirbelfeld: Magnetfeld eines langen, geraden, stromdurchflossenen Leiters [2]

## Das Coulombsche Gesetz

Für die Einführung des *Coulombschen* Gesetzes wird der experimentellen Entdeckung für dieses grundlegende Gesetz gefolgt, welches besagt:

### Coulombsche Gesetz

Eine elektrische Ladung  $Q_2$  übt auf jede weitere Ladung  $Q_1$  eine Kraft  $\vec{F} = F$  aus,

- die proportional zu den beiden Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  ist,
- die umgekehrt proportional zum Abstand  $r^2$  der Ladungen zueinander ist,
- wobei die Richtung dem Einheitsvektor  $e_r$  von  $Q_2$  nach  $Q_1$  entspricht.

In diesem Beispiel stellt  $Q_2$  die *felderzeugende* Ladung, die auf  $Q_1$  wirkt, dar. Hierbei stoßen sich Ladungen mit gleichem Vorzeichen ab, während sich ungleiche Ladungen anziehen. Mit der Definition, dass die Kraft  $F_{12}$  auf  $Q_1$  wirkt und ihre Ursache in  $Q_2$  hat, lautet das Coulombsche Gesetz:

$$|\mathbf{F}_{12}| = F_{12} \propto \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{|\mathbf{r}|^2} \mathbf{e}_r = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon}$$

$\epsilon$  : Dielektrizitätskonstante

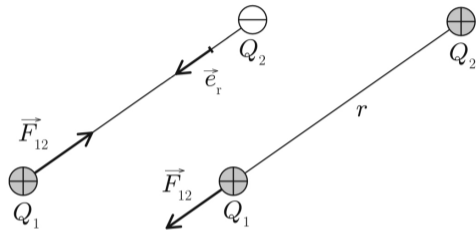


Abb. 11: Darstellung Coulombsche Gesetz [2]

Die Einheit der Dielektrizitätskonstanten  $\epsilon$  ist durch die gegebenen Einheiten der Ladungen (Coulomb), des Abstandes (Meter) und der Kraft (Newton) definiert, mit

$$[\epsilon] = \frac{[Q]^2}{[F][L]^2} = \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{N m}^2} = \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\frac{\text{As V}}{\text{m}} \text{m}^2} = \frac{\text{As}}{\text{Vm}}.$$

Im Vakuum beträgt der Wert für die Dielektrizitätskonstante, auch Permittivität genannt,

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}},$$

und ist eine Naturkonstante. Für unterschiedliche Materialien wird die einheitenlose relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  eingeführt und man schreibt:  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ .

Für die Überlagerung der Kräfte für mehr als eine Quelle gilt das Superpositionsprinzip.

### Konvention

Die hier (willkürlich) verwendete Konvention legt fest, dass die Kraft  $F_{12}$  auf die Ladung  $Q_1$  am Ort von  $Q_1$ , verursacht durch  $Q_2$ , wirkt.

## Die Elektrische Feldstärke

Mit den Erkenntnissen aus dem Coulombschen Gesetz wirkt eine Kraft auf eine Ladung  $Q$ , die proportional zu ihrer eigenen Größe und einem Vorfaktor, der unabhängig von  $Q$  ist, sowie von einer anderen Quelle  $Q_2$  gespeist wird:

$$\mathbf{F} = \underbrace{\frac{Q_2}{4\pi \epsilon r^2}}_{\mathbf{E}} \mathbf{e}_r Q$$

Dieser Vorfaktor wird als *Elektrische Feldstärke*  $\mathbf{E}$  bezeichnet und

- ist somit das Vektorfeld, verursacht durch eine felderzeugende Ladung  $Q_2$ .
- verläuft für ungestörte Felder (hier: radial) ins Unendliche.
- nimmt mit  $\frac{1}{r^2}$  ab, wobei  $r$  die radiale Entfernung zum Aufpunkt angibt.

- wird in der Einheit  $[E] = \frac{[F]}{[Q]} = \frac{N}{As} = \frac{\frac{AsV}{m}}{As} = \frac{V}{m}$  angegeben.
- verfügt über den gleichen Richtungssinn wie die Kraft.

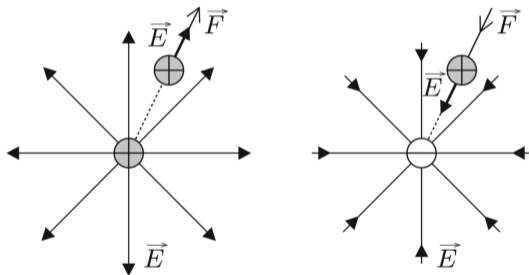


Abb. 12: Vektorfeld  $E$  einer positiven Punktladung (links) und einer negativen (rechts) Punktladung ohne Fremdfeld (homogenes Quellenfeld) [2]

## Vergleich Coulomb-Kraft und Gravitationskraft

Bei der Betrachtung von Wechselwirkungen spielt für die Elektrostatik die Coulomb-Kraft ein viel gewichtigere Rolle als die Gravitationskraft, obwohl für Elektronen, mit einer Elektronenmasse von ca.  $9,11 \cdot 10^{-31}$  kg, auch die Gravitationskraft gilt.

$$\mathbf{F}_C = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \mathbf{e}_r,$$

mit der universellen Gravitationskonstanten  $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$  und den Massen  $m_1$  und  $m_2$ . Das folgende Zahlenbeispiel verdeutlicht den jeweiligen Einfluss:

Zwei Bleikugeln<sup>a</sup> mit der Masse von je 1 kg ziehen sich im Abstand von 1 m mit der Gravitationskraft  $F_G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N an. Wäre die elektrische Ladung der Kugeln nicht durch Protonen neutralisiert, wäre die abstoßende Coulomb-Kraft  $F_C = 1,31 \cdot 10^{25}$  N.

---

<sup>a</sup>pro Bleikugel: ca.  $6 \times 10^{23}$  Atome; Ordnungszahl Blei: 82

## 2.2 Verhalten von Leitern im Elektrostatischen Feld

Bei der Betrachtung des elektrostatischen Feldes sind alle Ladungstransporte abgeschlossen; es entstehen somit auch keine Stromwärmeverluste.

### Feldfreiheit in leitenden Körpern

Im Inneren eines ideal leitenden Körpers ist kein elektrostatisches Feld vorhanden:  $\mathbf{E} = \mathbf{0}$  und damit ist die Coulombsche Kraft auch  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Bedingt durch die Feldfreiheit verteilt sich vorhandene elektrische Ladung an der Oberfläche, die dann eine *Äquipotentialfläche* darstellt.

Wird der Ausgleichsprozess betrachtet, so konzentriert sich aufgebrauchte Ladung zunächst an der Kontaktstelle, an der Oberfläche, durch die Kraftwirkung auf die beweglichen Ladungsträger entsteht eine Ausgleichsbewegung, die zu einem elektrostatischen Zustand führt.



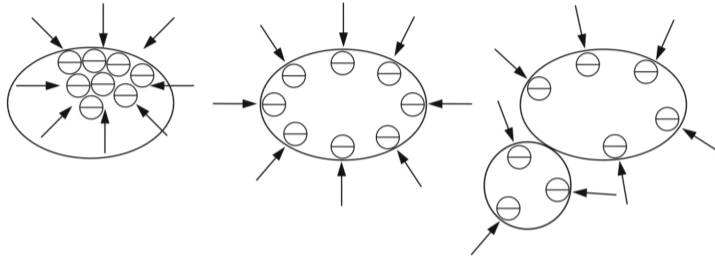


Abb. 13: Das Aufprägen von Ladung und der Vorgang der Ladungsverteilung in Leitern [2]

Die Feldlinien des elektrostatischen Feldes  $\mathbf{E}$  stehen stets senkrecht auf der Oberfläche leitender Körper, da es keine tangentielle Komponente durch die zuvor stattgefundene Ausgleichsbewegung gibt.

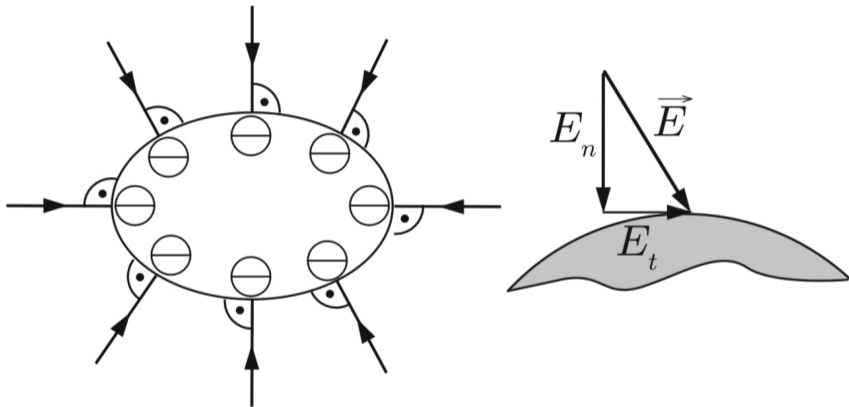


Abb. 14: Feldlinien des elektrostatischen Feldes mit der Feldstärke  $E$  an einer Leiteroberfläche [2]

## Influenz

Wird ein neutraler metallischer Körper in ein elektrostatisches Feld eingebracht, werden sich die freien Elektronen im Körper so anordnen, dass im Inneren das elektrostatische Feld wieder zu Null wird; diese Ladungstrennung dauert bei Metallen unter  $10^{-12}$  Sekunden. Im Experiment mit den *Maxwellschen Doppelplatten* lässt sich dieser Effekt nachweisen.

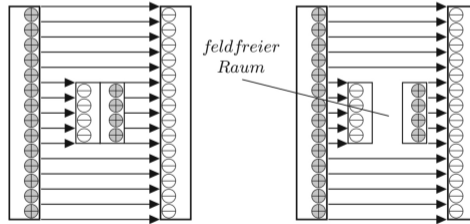


Abb. 15: Die Maxwellschen Doppelplatten [2]

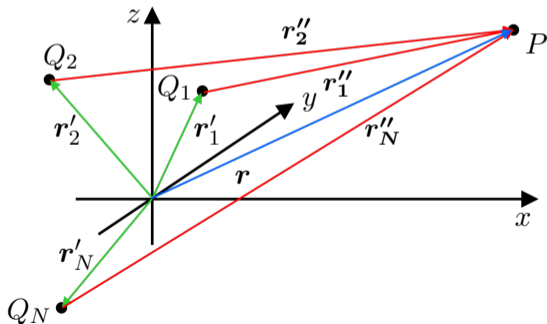
## Punktladungen außerhalb des Ursprunges

Sind Ladungen beliebig im Raum verteilt und ist die elektrische Feldstärke im Raum gesucht, müssen neben den Ladungen auch die entsprechenden Ortsvektoren berücksichtigt werden.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{n=1}^N \frac{Q_n}{|\mathbf{r}''_n|^2} \frac{\mathbf{r}''_n}{|\mathbf{r}''_n|}$$

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{r} - \mathbf{r}'_n$$



## 2.3 Elektrische Spannung und Potential

Wird eine Ladung in einem elektrostatischen Feld durch dieses beschleunigt, so wirken Kräfte und es wird eine Arbeit geleistet.

- Die Kräfte wirken auf freie Ladungen in einem  $\mathbf{E}$ -Feld<sup>b</sup>.
- Es wird eine Arbeit  $W$  verrichtet.
- Bewegung positive Ladung entlang  $\mathbf{E}$ -Feld:  
Kinetische Energie nimmt zu
- Bewegung negativer Ladung entlang  $\mathbf{E}$ -Feld:  
Potentielle Energie nimmt zu

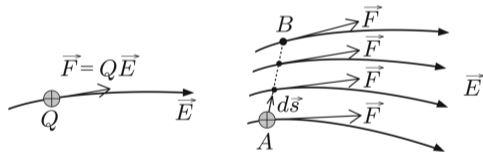


Abb. 16: Kräfte auf eine Punktladung [2]

<sup>b</sup> $\mathbf{E}$ -Feld stellvertretend für ein elektrostatisches Feld

Wird eine Ladung zwischen zwei beliebigen Punkten  $A$  und  $B$  in einem  $\mathbf{E}$ -Feld bewegt, so muss dafür die Arbeit  $W_{AB}$  verrichtet werden.

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F} ds = Q \underbrace{\int_A^B \mathbf{E} ds}_{U_{AB}},$$

mit dem Wegelement  $ds$  und der Spannung  $U_{AB}$ , betrachtet von  $A$  nach  $B$ . Die Einheit der Spannung wird in  $[U] = \frac{[W_{AB}]}{[Q]} = \frac{\text{J}}{\text{As}} = \frac{\text{VAs}}{\text{As}} = \text{V}$  angegeben.

## Linienintegral von $\mathbf{E}$

Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  zwischen zwei Punkten, ist die *Elektrische Spannung* zwischen diesen Punkten.

## Wegunabhängigkeit der Elektrischen Spannung

Um die Effekte und Wirkungen von elektrostatischen Feldern nachzuweisen werden Probeladungen eingeführt.

- Verwendung einer Probeladung  $Q$
- Bewegung von  $Q$  entlang  $C_1$  von  $A$  nach  $B$
- Bewegung von  $Q$  entlang  $C_2$  von  $B$  nach  $A$  entlang  $C_2$
- Es resultiert kein Energiegewinn bei Umlauf
- Es resultiert kein Energieverlust bei Umlauf

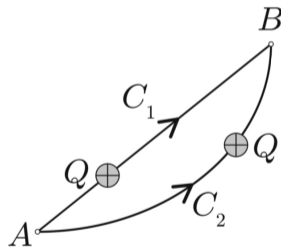


Abb. 17: Zur Wegunabhängigkeit von  $U$  [2]

Das Integral eines vollständigen Umlaufes liefert somit:

$$Q \int_{AC_1}^B \mathbf{E} ds + Q \int_{BC_2}^A \mathbf{E} ds = 0 \Rightarrow \boxed{\oint \mathbf{E} ds = 0}$$

### Geschlossenes Linienintegral der elektrischen Feldstärke

Das Linienintegral der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  entlang jeder beliebigen geschlossenen Kurve ist Null. Allgemein gilt, dass ein Vektorfeld  $\mathbf{a}$ , welches die Eigenschaft  $\oint \mathbf{a} ds = 0$  auf jeder geschlossenen Kurve erfüllt, *wirbelfrei* oder *konservativ* genannt wird.

Hier sei auch auf den 2. Kirchhoffschen Satz verwiesen, der besagt:  
"Die Summe aller Teilspannungen in einer Masche ist Null".



Die Überlagerung der elektrischen Feldstärken in jedem Punkt des Raumes für beliebig viele Ladungen muss vektoriell betrachtet werden.

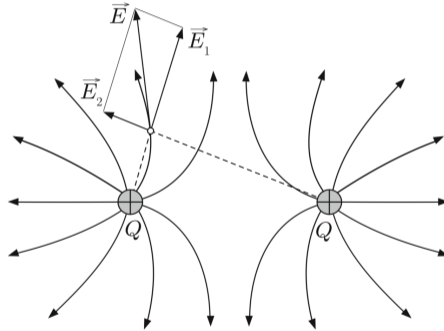


Abb. 18: Feldbild der elektrischen Teil-Feldstärke  $E$  von zwei gleichgroßen Punktladungen [2]

## Das Elektrische Potential

Mit der Einführung einer skalaren Ortsfunktion, dem *elektrischen Potential*  $\varphi$ , kann geschrieben werden:

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = \varphi_A - \varphi_B \Rightarrow \varphi_B = \varphi_A - \int_A^B \mathbf{E} \, d\mathbf{s} \Rightarrow \boxed{\mathbf{E} = -\nabla \varphi_B(x, y, z)}$$

mit  $\nabla \varphi(x, y, z) = \left( \frac{\delta \varphi(x, y, z)}{\delta x} \mathbf{e}_x, \frac{\delta \varphi(x, y, z)}{\delta y} \mathbf{e}_y, \frac{\delta \varphi(x, y, z)}{\delta z} \mathbf{e}_z \right)^T$  und  $\varphi_A = 0$ .

### Potential und Äquipotentialflächen

Das Potential ist eine stetige Funktion, wobei man Flächen mit konstantem Potential *Äquipotential-Flächen* nennt, auf denen die  $\mathbf{E}$ -Feld Linien senkrecht stehen.

- Im Ohm'schen Gesetz  $U = RI$  werden  $U$  und  $I$  richtungsgleich gezählt.
- Positive Ladungen bewegen sich entlang dem  $\mathbf{E}$ -Feld.
- Spannung  $U_{AB}$  wird von  $A$  nach  $B$  gezählt.
- $\varphi_A > \varphi_B \Rightarrow U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$

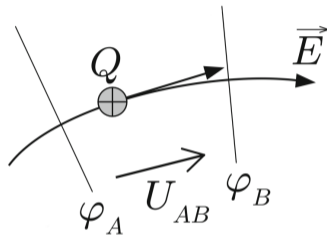


Abb. 19: Vorzeichen der elektrischen Spannung [2]

Ist  $\varphi_A = \varphi_B$  (Äquipotentialfläche), so ist  $\int_A^B \mathbf{E} ds = 0$  und somit ist  $\mathbf{E} \perp ds$ .

Für ein Potential kann der Bezugspunkt auch im Unendlichen liegen, damit folgt:

$$\begin{aligned}
 U_{AB} &= \int_A^B \mathbf{E} \, ds = \int_A^\infty \mathbf{E} \, ds + \int_\infty^B \mathbf{E} \, ds \\
 &= \underbrace{\int_A^\infty \mathbf{E} \, ds}_{\varphi_A} - \underbrace{\int_B^\infty \mathbf{E} \, ds}_{\varphi_B}
 \end{aligned}$$

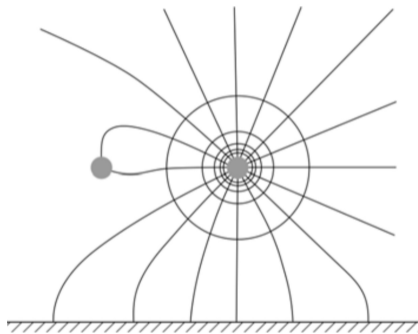


Abb. 20: Ladungsanordnung mit  $\mathbf{E}$ -Feld [4]

## 2.4 Die Erregung des Elektrostatischen Feldes

Das Coulombsche Gesetz beschreibt,

- nicht den Zusammenhang zwischen einer Ladung und dem von ihr erzeugten  $\mathbf{E}$ -Feld.
- die bereits bestehende Feldstärke für eine Punktladung mit  $\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \mathbf{e}_r$ .

### Die Elektrische Flussdichte

Ein  $\mathbf{E}$ -Feld tritt aus einer geladenen Oberfläche  $A$  aus. Die *Elektrische Flussdichte* (auch: *Elektrische Verschiebungsflussdichte*, *Verschiebungsdichte*) ist als Grenzwert mit

$$\|\mathbf{D}\| = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}$$

definiert und ist somit *materialunabhängig*. Und entspricht der Definition einer infinitesimalen Flächenladung, vgl. S. 25.

## Entstehung Elektrische Flussdichte

- Metallkugel positiv geladen mit  $+Q$  und
- umgeben von einer Metallhülle,
- isoliert durch ein Dielektrikum.
- Influenz auf die innere Metallhülle  $\Rightarrow$  Ladungstrennung.
- Es existiert ein *Elektrischer Fluss* oder *Verschiebungsfluss*  $\Psi^a$ .
- $\Psi$  mit Zählrichtung von  $\mathbf{E}$ .
- *Elektrische Flussdichte*  $D = \frac{\Psi}{A}$ , mit der Fläche  $A$

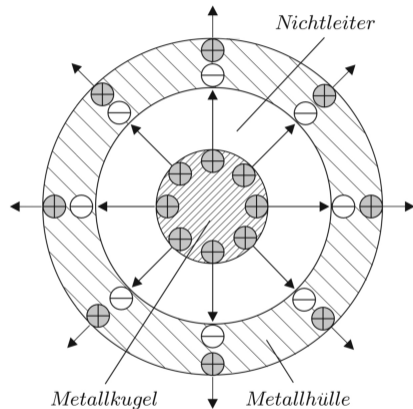


Abb. 21: Anschauung Elektrische Flussdichte  $D$  [2]

<sup>a</sup>Hilfsgröße für die Kraftwirkung

Da das  $\mathbf{D}$ -Feld materialunabhängig ist muss es nicht gleichmäßig auf Flächen verteilt sein und kann somit auch beliebige Winkel mit der Flächennormalen aufweisen, allgemein ist der Verschiebungsfluss definiert als:

$$\Psi = \iint \mathbf{D} d\mathbf{A}$$

### Richtung $\mathbf{D}$ -Feld

Da die Ladungsverschiebung gerichtet ist, weist die elektrische Flussdichte  $\mathbf{D}$  in die Richtung des  $\mathbf{E}$ -Feldes.

Die Einheit der elektrischen Flussdichte<sup>c</sup> ergibt sich zu:  $[\mathbf{D}] = \frac{[Q]}{[A]} = \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$ .

<sup>c</sup>auch: Ladungsdichte freier Ladungsträger

## Der Gaußsche Satz der Elektrostatik

Der Gaußsche Satz der Elektrostatik ist ein fundamentales Grundgesetz der Elektrostatik und beschreibt den elektrischen Fluss  $\Psi$  durch eine geschlossene Fläche (Hülle).

Der Fluss der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}$  durch eine beliebige geschlossene Fläche ist gleich der, von der Fläche insgesamt umhüllten, Ladung:

$$\boxed{\oiint \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q} \Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \mathbf{D}(x, y, z) = \rho_V}$$

wobei:  $\operatorname{div} \mathbf{D}(x, y, z) = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$

Mit der Volumen-Ladungsdichte  $\rho_V$  und dem Flächenelement  $d\mathbf{A}$ , das auf geschlossenen Flächen stets nach außen zeigt.



Der Gaußsche Satz gilt:

- für beliebig geformte Hüllflächen.
- für nichtleitende Hüllflächen auf denen das elektrische Feld nicht senkrecht steht.
- auch für zeitlich schnell veränderliche Felder und beschreibt eine Maxwell Gleichung.

Da die Ladungen als Erregung für den Raumzustand angesehen werden, der sich durch Kraftwirkungen auf Ladungen bemerkbar macht, wird die elektrisch Flussdichte  $\mathbf{D}$  oft *elektrische Erregung* genannt. Somit führt das Vorhandensein einer materialunabhängigen Flussdichte zu einem elektrischen Feld, welches sich durch eine Kraftwirkung bemerkbar macht:

$$Q \Rightarrow \Psi \Rightarrow \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{F}$$

## Zusammenhang von $E$ - und $D$ -Feldern

Die Felder  $E$ -Feld und  $D$ -Feld unterscheiden sich in ihrer Natur durch die folgenden grundlegenden Merkmale:

- Die elektrische Feldstärke  $E$  ist materialabhängig und ist direkt der Wirkung des elektrischen Feldes, der Kraftwirkung  $F$ , zugeordnet:

$$F = Q E$$

- Die elektrische Flussdichte  $D$  ist materialunabhängig und direkt der Ursache, also den felderzeugenden Ladungen, zugeordnet:

$$\Psi = \iint D dA$$

## Das Materialgesetz der Elektrostatik

Die beiden Feldgrößen ( $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$ ) haben in linearen und isotropen Materialien dieselbe Richtung, so dass sie sich ausschließlich in einem skalaren Faktor unterscheiden. In linearen und isotropen Dielektrika besteht der Zusammenhang<sup>d</sup>:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

---

<sup>d</sup>Polarisation  $\mathbf{P}$  wird an dieser Stelle vernachlässigt.

Tab. 1: Materialeigenschaften

	Permittivität $\epsilon_r$	kritische Feldstärke $ E_k $ kV/cm
Luft	1,00059	20...30
Glimmer	5...7	bis 100
Isolieröle	ca. 5,5	50...300
Hartporzellan	4...8	300...350
Quarz	4...5	300.400
Polystyrol	2...3	1000

## 2.5 Feldstärke und Potential spezieller Ladungsverteilungen

Sollen elektrische Feldstärken und elektrische Potentiale einer gegebenen Ladungsverteilung bestimmt werden, so wird der Gaußsche Satz für die Bestimmung der elektrischen Flussdichte  $D$  angewandt.

Das Vorgehen dabei ist immer wie folgt:

- Ansatz:  $Q = \oiint D dA$
- Wahl einer möglichst symmetrischen Hüllfläche.
- Lage der Hüllflächen sollte so gewählt werden, dass das Skalarprodukt für Teilabschnitte einfach zu lösen ist, mit
  - ▶  $D \perp dA$
  - ▶  $D \parallel dA$
  - ▶  $D = 0$

Im Folgenden werden Beispiele für klassische Quellenordnungen betrachtet.

## Feldstärke und Potential einer Punktladung

Es wird das, durch die Ladung  $+Q$  erregte,  $\mathbf{E}$ -Feld im Punkt  $P(\mathbf{r})$  gesucht.

- Radiale Feldlinien starten auf  $+Q$ .
- Bei Abstand  $|\mathbf{r}|$  sind  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  konstant, vgl. Abb. 25.

$$\oiint_{\text{Kugel}} \mathbf{D} d\mathbf{A} \stackrel{D_{\parallel} d\mathbf{A}}{=} D \oiint_{\text{Kugel}} d\mathbf{A} = D 4\pi r^2 = Q$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\varphi_P(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi \epsilon r}$$

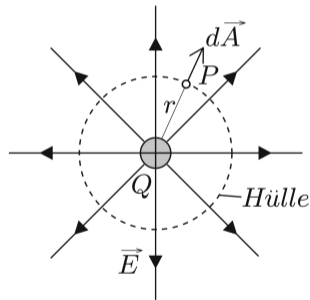


Abb. 22: Positive Punktladung [2]

Schon die Gesamt-Feldstärke von zwei Ladungen lässt sich nicht mehr mit einfachen Mitteln über den Gaußschen Satz berechnet, da keine Hüllfläche zu finden ist auf der gänzlich  $\vec{D} \perp \vec{A}$  gilt.

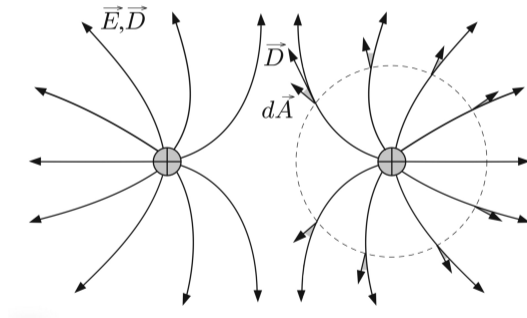


Abb. 23: Feldlinienverlauf von  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$  bei zwei gleichnamigen, gleichgroßen Ladungen [2]

## Feldstärke und Potential einer geladenen metallischen Kugel

Es wird das, durch die Kugelladung mit dem Radius  $R$ , erregte  $\mathbf{E}$ -Feld im Punkt  $P(r)$  gesucht.

- $\mathbf{E}$ -Feld und Potential für  $R \leq r < \infty$ : wie Punktquelle
- $\mathbf{E}$ -Feld für  $0 \leq r < R$ :  $\mathbf{D} = \mathbf{E} = \mathbf{0}$ ,
- Potential für  $0 \leq r < R$ :

$$\varphi_P(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon R}$$

⇒ metallische Körper sind äquipotential.

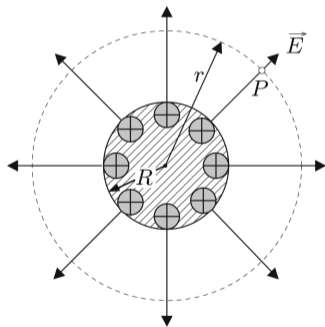


Abb. 24: Positive Ladung auf metallischer Kugel [2]



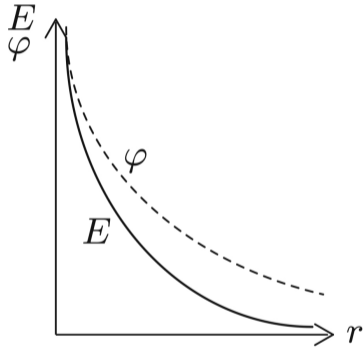


Abb. 25: Verlauf  $E$ -Feld und Potential  $\varphi$  einer Punktladung [2]

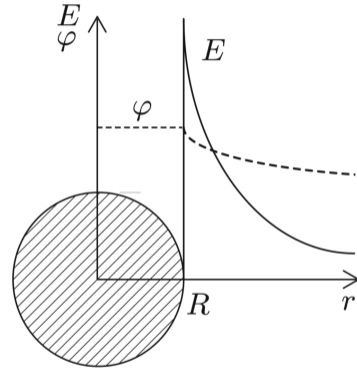


Abb. 26: Verlauf  $E$ -Feld und Potential  $\varphi$  einer geladenen Kugel [2]

## Feldstärke und Potential einer weit ausgedehnten Metallebene

Es wird das, durch die Ladung auf einer quasi unendlich ausgedehnten geladenen Ebene erregte,  $\mathbf{E}$ -Feld im Punkt  $P(\mathbf{r})$  gesucht.

- Finite Flächenladungsdichte:  $\rho_s = \frac{Q}{A}$
- Das  $\mathbf{E}$ -Feld steht senkrecht auf der Fläche  $A$  in Richtung  $\pm \mathbf{e}_x$ .
- Hüllfläche: Parallelepipetische Fläche mit sechs Teilflächen (Kasten):
- auf vier Teilflächen:  $\mathbf{D} \perp d\mathbf{A}$
- auf zwei Teilflächen:  $\mathbf{D} \parallel d\mathbf{A}$

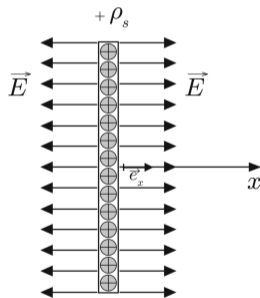


Abb. 27: Quasi unendlich ausgedehnte geladene Platte [2]

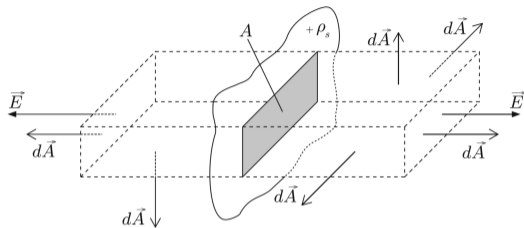


Abb. 28: Berechnung des  $E$ -Feldes einer quasi unendlich ausgedehnten geladenen Platte [2]

$$\oiint_{\text{Kasten}} \mathbf{D} d\mathbf{A} = \epsilon \oiint_{\text{Kasten}} \mathbf{E} d\mathbf{A} = \epsilon \sum_{j=1}^6 \mathbf{E}_j d\mathbf{A}_j \underset{\mathbf{E}_{\parallel A}}{=} 2\epsilon E A = \rho_s A,$$

und somit:

$$\mathbf{E} = \frac{\rho_s}{2\epsilon} \mathbf{e}_x$$

Das  $\mathbf{E}$ -Feld ist homogen und die Feldstärke **konstant**.

Für die Bestimmung des Potentials wird zur einfacheren Berechnung  $\varphi(x_0 = 0) = 0$  angenommen, vgl. Abb. 32.

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) - \int_{x_\varphi}^x \frac{\rho_s}{2\epsilon} dx = - \int_0^x \frac{\rho_s}{2\epsilon} dx$$

$$\varphi(x) = -\frac{\rho_s}{2\epsilon} x$$

Das Potential  $\varphi(x)$  variiert linear mit dem Abstand zur Ebene.

## Feldstärke und Potential von zwei parallelen, geladenen Platten

Gegeben seien zwei parallele Platten, geladen mit  $+\rho_s$  und  $-\rho_s$  im Abstand  $d$ , so kann das Gesamtfeld durch Superposition bestimmt werden.

$$|\mathbf{E}_x| = \frac{\rho_s}{\epsilon} = \boxed{\frac{Q}{\epsilon A}}$$

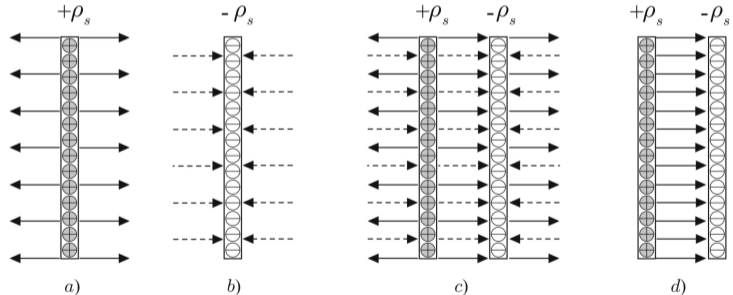


Abb. 29: Superposition der Feldstärken von zwei Platten [2]

Diese Anordnung entspricht einem Plattenkondensator und es gilt:

- Für einen großen Abstand  $d$  zwischen den Platten herrschen inhomogene Randeffekte vor.
- Äquipotentiallinien  $\perp$   $\mathbf{E}$ -Feld
- für  $\varphi_0 = 0$  und die Spannung  $U$  zwischen den Platten
  - ▶  $\varphi_1 = \frac{U}{4}$
  - ▶  $\varphi_2 = \frac{U}{2}$
  - ▶  $\varphi_3 = \frac{3U}{4}$
  - ▶  $\varphi_4 = U$

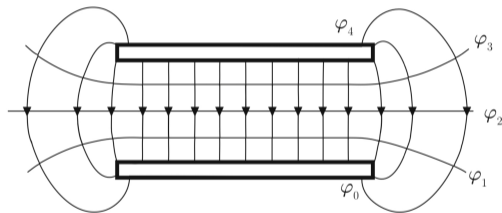


Abb. 30: Aufbau eines Plattenkondensator [2]

## Feldstärke und Potential einer Linienladung

Es wird das, durch eine Linienladung eines unendlich langen Drahtes erregte,  $\vec{E}$ -Feld im Punkt  $P(r)$  gesucht. Mit der Annahme, dass das Potential  $\varphi(r_\varphi) = 0$  sei, ergibt sich:

$$\oiint \mathbf{D} d\mathbf{A} = \rho_L l \Rightarrow \epsilon E 2\pi r l = \rho_L l$$

$$\varphi_{\mathbf{E} \parallel d\mathbf{r}} = - \int_{r_0}^r \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon} \frac{dr}{r} = - \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon} \ln r \Big|_{r_\varphi}^r$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\rho_L}{2\pi \epsilon} \ln \left( \frac{r_\varphi}{r} \right)}$$

Das Potential variiert bei allen Anordnungen, die zylinder-symmetrischen, sind logarithmisch.

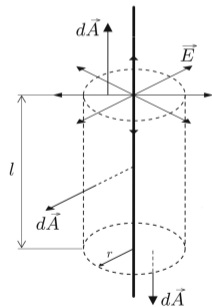


Abb. 31: Linienladung [2]

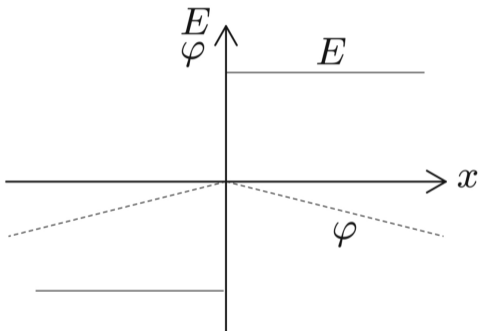


Abb. 32: Verlauf  $E$ -Feld und Potential  $\varphi$  einer geladenen Ebene [2].

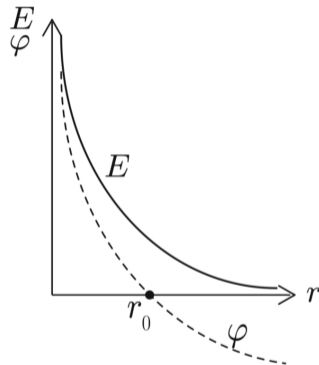


Abb. 33: Verlauf  $E$ -Feld und Potential  $\varphi$  einer Linienladung [2].



## 2.6 Bedingungen an Grenzflächen

Grenzen unterschiedliche Isolationsmaterialien mit unterschiedlichen Dielektrizitätskonstanten aneinander, so unterscheiden sich  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$  nicht mehr nur um eine Konstante.

- Grenze zwischen zwei Materialien mit  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ .
- Die elektrische Feldstärke muss immer  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$  erfüllen.
- Die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}_t$  ist stetig.
- Die elektrische Flussdichte muss immer  $\iint \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q$  erfüllen.  
(Annahme: Quelfreiheit der Materialgrenzen)
- Die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}_n$  ist stetig.

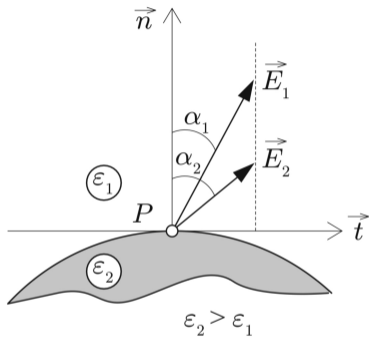


Abb. 34: Tangentialkomponente von  $E$  [2]

$$\mathbf{E}_{t_1} = \mathbf{E}_{t_2}$$

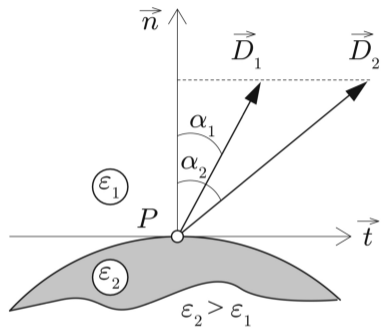


Abb. 35: Normalenkomponente von  $D$  [2]

$$D_{n_1} = D_{n_2}$$

## Brechungsgesetz der Feldlinien an Grenzflächen

Das Verhalten der Normalenkomponente von  $\mathbf{E}$  und Tangentialkomponente von  $\mathbf{D}$  kann wie folgt beschrieben werden:

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_{n_1} = \epsilon_2 \mathbf{E}_{n_2} \Rightarrow \frac{\mathbf{E}_{n_1}}{\mathbf{E}_{n_2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{D}_{t_1}}{\epsilon_1} = \frac{\mathbf{D}_{t_2}}{\epsilon_2} \Rightarrow \frac{\mathbf{D}_{t_1}}{\mathbf{D}_{t_2}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

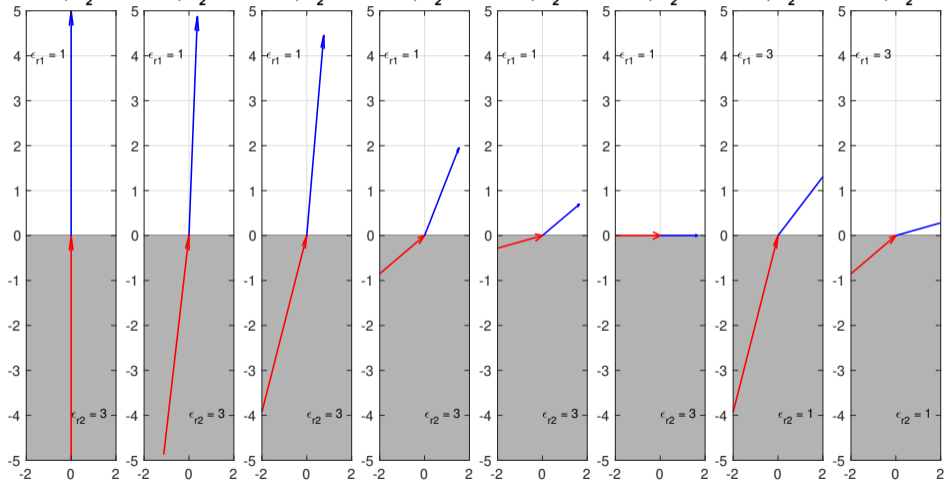
Mit den beiden korrespondierenden Winkeln  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  ergibt sich das Brechungsgesetz der Feldlinien an Grenzflächen mit

$$\tan \alpha_1 = \frac{\mathbf{E}_{t_1}}{\mathbf{E}_{n_1}} = \frac{\mathbf{D}_{t_1}}{\mathbf{D}_{n_1}} \quad \text{und} \quad \tan \alpha_2 = \frac{\mathbf{E}_{t_2}}{\mathbf{E}_{n_2}} = \frac{\mathbf{D}_{t_2}}{\mathbf{D}_{n_2}}$$

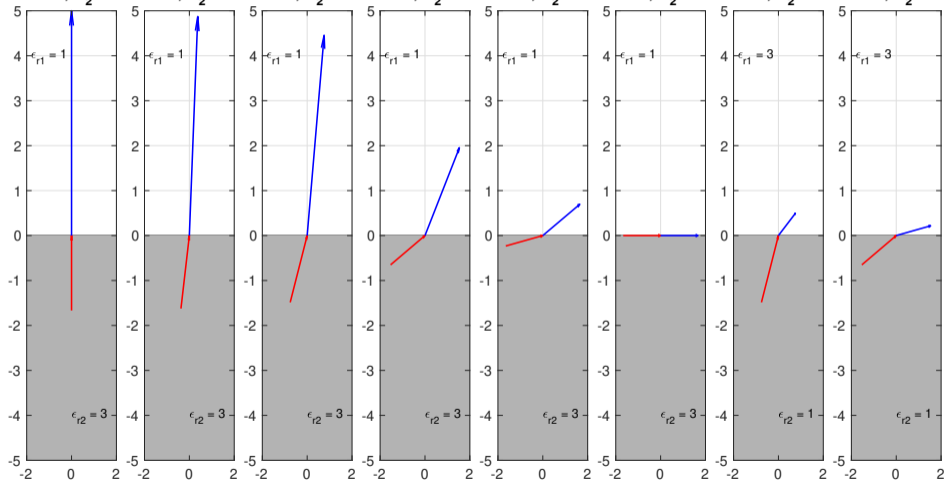
zu

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mathbf{E}_{t_1}}{\mathbf{E}_{n_1}} \frac{\mathbf{E}_{n_2}}{\mathbf{E}_{t_2}} = \frac{\mathbf{D}_{n_2} \epsilon_1}{\epsilon_2 \mathbf{D}_{n_1}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \Rightarrow \boxed{\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}.$$

D-Feld,  $\alpha_2 = 0^\circ$  D-Feld,  $\alpha_2 = 13^\circ$  D-Feld,  $\alpha_2 = 27^\circ$  D-Feld,  $\alpha_2 = 67^\circ$  D-Feld,  $\alpha_2 = 82^\circ$  D-Feld,  $\alpha_2 = 90^\circ$  D-Feld,  $\alpha_2 = 27^\circ$  D-Feld,  $\alpha_2 = 67^\circ$



E-Feld,  $\alpha_2 = 0^\circ$  E-Feld,  $\alpha_2 = 13^\circ$  E-Feld,  $\alpha_2 = 27^\circ$  E-Feld,  $\alpha_2 = 67^\circ$  E-Feld,  $\alpha_2 = 82^\circ$  E-Feld,  $\alpha_2 = 90^\circ$  E-Feld,  $\alpha_2 = 27^\circ$  E-Feld,  $\alpha_2 = 67^\circ$



## Verhalten von $E$ -Feld und $D$ -Feld bei Quer- und Längsschichtung

- Querschichtung  
Steht die Grenzschicht senkrecht zu den Feldlinien von  $E$ -Feld und  $D$ -Feld, so beschreibt diese eine Äquipotentiallinie. Das  $D$ -Feld bleibt stetig an der Grenzfläche wohingegen eine sprunghafte Änderung des  $E$ -Feldes stattfindet.
- Längsschichtung  
Verläuft die Grenzschicht parallel zu den Feldlinien von  $E$ -Feld und  $D$ -Feld, so bleibt das  $E$ -Feld stetig an der Grenzfläche wohingegen eine sprunghafte Änderung des  $D$ -Feldes stattfindet.

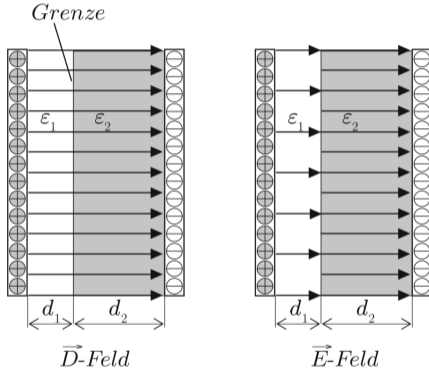


Abb. 36: Querschichtung von Dielektrika [2]

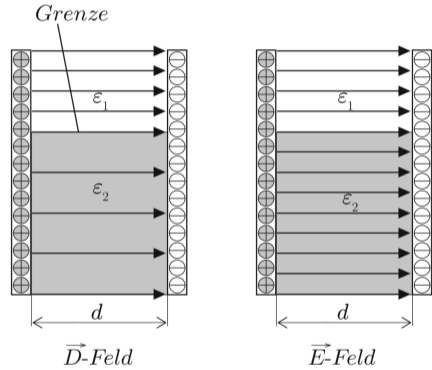


Abb. 37: Längsschichtung von Dielektrika [2]

## 2.7 Kondensator und Kapazität

Der allgemeine Aufbau von *Kondensatoren* umfasst zwei gegeneinander isolierte Elektroden, die entgegengesetzt geladene werden<sup>e</sup>. Der aufgeprägten Ladungen ( $+Q$  und  $-Q$ ) folgt eine Spannung  $U$  und somit eine Potentialdifferenz  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Der Raum zwischen den Elektroden ist dielektrisch gefüllt, in diesem wird das  $\mathbf{E}$ -Feld verdichtet; im Außenbereich entsteht kein Streufeld (Idealisierung). Die Aufnahmefähigkeit des Kondensators für Ladung ist die maßgebende Größe und wird *Kapazität*  $C$  genannt, d.h. die Ladungsmenge  $Q$ , die bei einer Spannung  $U$  auf den Kondensator-Oberflächen gespeichert werden kann. Es gilt:

$$C = \frac{\iint \mathbf{D} d\mathbf{A}}{\int_1^2 \mathbf{E} ds} > 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{Q}{U}}$$

Die Einheit der Kapazität wird in:  $[C] = \frac{\text{As}}{\text{V}} = \text{Farad} = \text{F}$  angegeben.

<sup>e</sup>Umgangssprachlich: "Der Kondensator trägt die Ladung  $Q$ ".



## Ladevorgang eines Kondensators

Zur vollständigen Darstellung wird der Ladevorgang eines Kondensators dargestellt.

- Anlegen einer Gleichspannung zum Zeitpunkt  $t_0$ .
- Elektronen werden zwischen den Elektroden umverteilt.
- Dynamischer Vorgang bis die Spannung zwischen den Elektroden auf  $U$  gestiegen ist.
- Der Strom ist beim Anlegen  $t_0$  maximal.
- Verzögerter Anstieg der Spannung
- *Der Strom eilt vor*

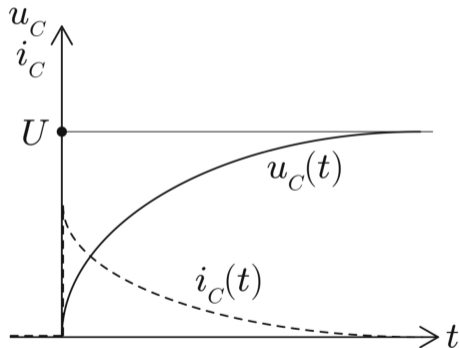


Abb. 38: Einschaltvorgang Kondensator [2]

## Impedanz des Kondensators

Ergänzend wird der Kondensator im Wechselstromkreis betrachtet. Im Wechselstromkreis kann der Strom als eine zeitliche Änderung von Ladung verstanden werden, mit

$I(t) = \frac{dQ}{dt}$ . Mit der Definition der Kapazität  $Q = C U(t)$  ergibt sich  $I(t) = C \frac{dU(t)}{dt}$ . Es wird eine sinusförmige harmonische Schwingung ( $U, I \in \mathbb{C}$ ) mit  $U(t) = \hat{U} e^{j\omega t}$  und  $I(t) = \hat{I} e^{j\omega t}$  betrachtet.

$$I = C \frac{dU}{dt} = C \frac{d}{dt} \left( \hat{U} e^{j\omega t} \right) = C j\omega \underbrace{\hat{U} e^{j\omega t}}_U \rightarrow U = \frac{1}{j\omega C} I$$

Daraus folgt der Wechselstrom-Widerstand, die Impedanz, des Kondensators:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}$$

## Parallel- und Reihenschaltungen von Kapazitäten

In der Praxis kommt der Betrachtung von Parallel- und Reihenschaltungen von Kapazitäten, insbesondere bei parasitären Effekten, eine hohe Bedeutung zu.

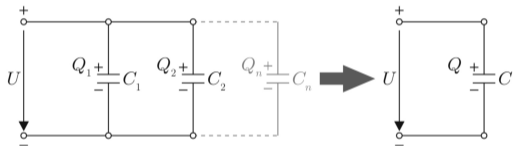


Abb. 39: Parallelschaltung von Kondensatoren [2]

$$C = \sum_{k=1}^n C_k$$

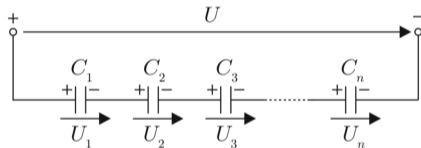


Abb. 40: Reihenschaltung von Kondensatoren [2]

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

## Die Kapazität spezieller Anordnungen: Zylinderkondensator (Koaxialkabel)

In der Nachrichtentechnik werden zur Abschirmung vor hochfrequenten Störungen häufig Koaxialkabel eingesetzt.

- Runder Innenleiter mit Radius  $R_i$   
 $\Rightarrow$  *Linienleiter*
- Dünner Außenleiter  
 $\Rightarrow$  *Flächenleiter*
- Der Zwischenraum mit Radius  $R_a$  ist gefüllt mit Dielektrikum.
- Länge  $l \gg$  Radius  $R_{\{i,a\}}$

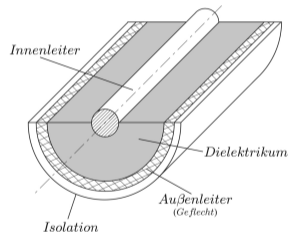


Abb. 41: Darstellung Koaxialkabel [2]

Zur Bestimmung der Kapazität wird ein Zylindermantel mit einem Radius  $R_i < r < R_a$  und eine Ladung  $Q$ , auf der Länge  $l$  verteilt, angenommen.

Die Zylinderkappen liefern keinen Beitrag, da  $\mathbf{D} \perp \mathbf{A}$ ; der Gaußsche Satz liefert:

$$\iint_{\text{Zylinder}} \mathbf{D} d\mathbf{A} \stackrel{\mathbf{D} \parallel d\mathbf{A}}{=} D \iint_{\text{Zylinder}} dA = D 2\pi r l = Q$$

$$\Rightarrow \mathbf{D}(r) = \frac{Q}{2\pi r l} \mathbf{e}_r; \quad \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{2\pi r \epsilon l} \mathbf{e}_r.$$

Die Spannung  $U$  zwischen den Leitern ergibt sich zu (vgl. S. 67):

$$U = \int_{R_i}^{R_a} \mathbf{E} dr \stackrel{\mathbf{E} \parallel dr}{=} \int_{R_i}^{R_a} \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right).$$

Und die Kapazität des Koaxialkabels ergibt sich damit:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

Mit der Annahme, dass  $\varphi(R_i) = 0$  ergibt sich das Potential zu:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \varphi(R_i) - \int_{R_i}^r \mathbf{E} \, d\mathbf{r} = - \int_{R_i}^r \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \frac{dr}{r} \\ &= - \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln\left(\frac{r}{R_i}\right) \end{aligned}$$

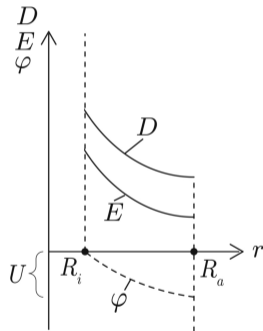


Abb. 42: Verläufe des Zylinderkondensators [2]

## Die Kapazität spezieller Anordnungen: Zylinderkondensator mit Mehrschichtdielektrikum

In der Praxis ist ein häufig auftretender Störfall die Ablösung des Dielektrikums vom Innenleiter.

- Zwischenraum 1 mit Radius  $R_m$ :  
gefüllt mit Dielektrikum  $\epsilon_1 = \epsilon_0$
- Zwischenraum 2 mit Radius  $R_a - R_m$ :  
gefüllt mit Dielektrikum  $\epsilon_2$
- Grenzschicht  $\perp \mathbf{D}$  :  $D_{n1} = D_{n2}$
- $D_1 = D_2 = \frac{Q}{2\pi r l}$
- $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$

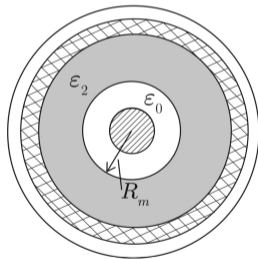


Abb. 43: Mehrschichtdielektrikum [2]

Daraus ergeben sich die Feldstärken in den Zwischenräumen

- für  $R_i \leq r \leq R_m$

$$E_1 = \frac{Q}{2\pi r \epsilon_1 l}$$

- für  $R_m \leq r \leq R_a$

$$E_2 = \frac{Q}{2\pi r \epsilon_2 l}$$

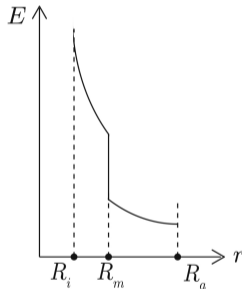


Abb. 44: Verläufe des Zylinderkondensators [2]

In einer sehr dünnen Luftschicht entstehen sehr hohe Feldstärken, die zu einem Durchschlag und Zerstörung führen können, vgl. Tab. 1.



Die Spannung  $U$  zwischen den Leitern ergibt sich zu:

$$U = \int_{R_i}^{R_m} \frac{Q}{2\pi \epsilon_1 l} \frac{dr}{r} + \int_{R_m}^{R_a} \frac{Q}{2\pi \epsilon_2 l} \frac{dr}{r}$$
$$= \frac{Q}{2\pi l} \left[ \frac{1}{\epsilon_1} \ln \left( \frac{R_m}{R_i} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \left( \frac{R_a}{R_m} \right) \right].$$

Die Gesamtkapazität dieses Aufbaus ergibt sich aus der Reihenschaltung der beiden Teil-Kapazitäten:

$$\frac{1}{C_g} = \frac{\ln \left( \frac{R_m}{R_i} \right)}{2\pi \epsilon_1 l} + \frac{\ln \left( \frac{R_a}{R_m} \right)}{2\pi \epsilon_2 l}$$

## Die Kapazität spezieller Anordnungen: Doppelleitung

In der Praxis ist die Kapazität einer Doppelleitung, also die Anordnung von zwei parallelen Leitern, der Länge  $l$  und des Radius  $R$ , im Abstand  $a$  von Interesse.

- Die Ladungen sind gleichmäßig auf den Leitern verteilt.
- Links: positive Ladung
- Rechts: negative Ladung
- Abstand  $a \gg R$
- Der Zwischenraum ist mit Luft gefüllt.
- Die Länge  $l \gg$  Radius  $R$

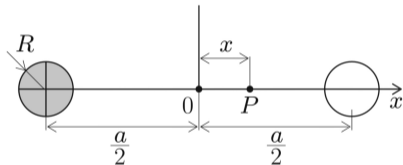


Abb. 45: Doppelleitung [2]

Es bildet sich ein inhomogenes Feld zwischen den beiden Leitern aus.

Für einen beliebigen Punkt auf der  $x$ -Achse wird das  $\mathbf{E}$ -Feld als Superposition der Einzelfelder bestimmt.

$$\mathbf{E}_1(P) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \frac{1}{x + \frac{a}{2}} \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{E}_2(P) = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \frac{1}{\frac{a}{2} - x} \mathbf{e}_x$$

$$\mathbf{E}(P) = \mathbf{E}_1(P) + \mathbf{E}_2(P)$$

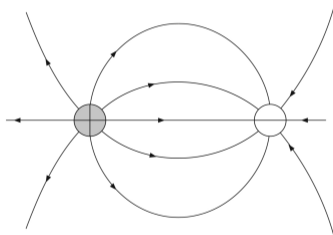


Abb. 46: Inhomogener Feldverlauf einer Doppelleitung [2]

Die Spannung  $U$  zwischen den Leitern ergibt sich zu:

$$U = \int_{-\frac{a}{2}+R}^{\frac{a}{2}-R} \mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_x dx = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \int_{-\frac{a}{2}+R}^{\frac{a}{2}-R} \left( \frac{1}{x + \frac{a}{2}} + \frac{1}{\frac{a}{2} - x} \right) dx = \frac{Q}{\pi \epsilon l} \ln \left( \frac{a}{R} - 1 \right).$$

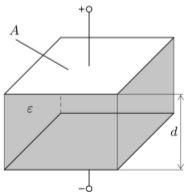
Die Kapazität der Doppelleitung ergibt sich mit  $a \gg R$  zu:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\pi \epsilon l}{\ln \left( \frac{a}{R} \right)}$$

## Die Kapazitäten idealer Kondensatoren [2]

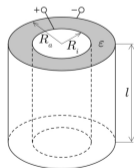
### Plattenkondensator

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$



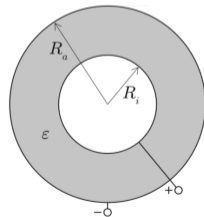
### Zylinderkondensator

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r l}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}$$

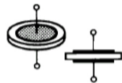


### Kugulkondensator

$$C = \frac{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}}$$



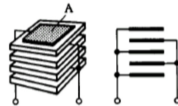
## Die Kapazität spezieller Anordnungen: Überblick



Plattenkondensator



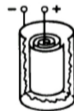
Röhrchenkondensator



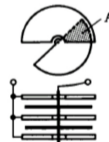
Schichtkondensator



Wickelkondensator



Elektrolytkondensator



Drehkondensator

Abb. 47: Unterschiedliche Bauformen für Kondensatoren [3]

## 2.8 Energie und Kräfte im elektrostatischen Feld

Im Folgenden wird die elektrische Energie, die benötigt wird, um positive und negative Ladungen aufzuprägen, sowie die Kräfte im elektrostatischen Feld, erläutert.

### Elektrische Energie und Energiedichte

Im Aufladevorgang wird dem Kondensator elektrische Energie zugeführt. Die benötigte elektrische Arbeit ist  $W_e = \int_0^\infty u_c(t) i(t) dt$ ; hier beschreiben  $u_c(t)$  und  $i_c(t)$  die Momentanwerte im Ladeprozess. Mit  $u_c = \frac{q}{C}$ ,  $i = \frac{dq}{dt}$  und  $Q = CU$  ergibt sich:

$$W_e = \int_0^\infty \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} dt = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{(CU)^2}{C} \Rightarrow W_e = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} QU$$

Für den Plattenkondensator lässt sich die gespeicherte Energie auch mit

dem  $E$ - und  $D$ -Feld ausdrücken,  $W_e = \int_0^Q u_c dq$ , mit  $u_c = E d$  und  $dq = A dD$ :

$$W_e = \underbrace{Ad}_{\text{Volumen}} \int_0^D E dD = V \int_0^D E dD.$$

Für die Energie pro Volumen, die *Energiedichte*, ergibt sich:

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \int_0^D E dD = \frac{1}{\epsilon} \int_0^D D dD = \frac{D^2}{2\epsilon} \Rightarrow \boxed{w_e = \frac{\epsilon E^2}{2} = \frac{D E}{2}}$$

## Gespeicherte Energie im $E$ -Feld

In einem Kondensator wird die Energie im elektrostatischen Feld, also zwischen den Elektroden, gespeichert.



## Kräfte im elektrostatischen Feld und Virtuelle Verschiebung

Werden homogene Dielektrika betrachtet und ist die Ladungsverteilung bekannt, kann mit  $\mathbf{F} = Q \mathbf{E}$  die wirkende Kraft im  $\mathbf{E}$ -Feld beschrieben werden. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, wird das Prinzip der *Virtuellen Verschiebung* eingesetzt.

### Virtuelle Verschiebung

Betrachtung der Energiebilanz: Es sei ein Körper um ein infinitesimales Wegstück  $ds$  unter der Wirkung der elektrostatischen Kräfte virtuell verschoben. So wurde durch diese Kraft  $\mathbf{F}_s$  die mechanische Arbeit  $dW_e = \mathbf{F}_s ds$  geleistet, mit  $W_e$  für die elektrostatische Energie.

Für die elektrostatische Kraft ergibt sich, wenn die Ladung  $q$  bzw. die Spannung  $U$  konstant bleibt

$$\mathbf{F}_s = - \left( \frac{dW_e}{ds} \right)_{q=const.} = \left( \frac{dW_e}{ds} \right)_{U=const.} .$$

Hier ergeben sich mit  $W_e = \frac{1}{2} Q U$  die folgende Fälle:

- Bei konstanter Spannung  $U$ 
  - ▶  $+F_s$ : Potentielle Energie  $W_e$  des Systems nimmt zu
  - ▶  $-F_s$ : Potentielle Energie  $W_e$  des Systems nimmt ab
- Bei konstanter Ladung  $Q$ 
  - ▶  $-F_s$ : Potentielle Energie  $W_e$  des Systems nimmt zu
  - ▶  $+F_s$ : Potentielle Energie  $W_e$  des Systems nimmt ab

## Resultierende Kräfte

Nur wenn eine energetische Änderung des Systems stattfindet, also die Energiezustände verändert werden, entstehen wirkende Kräfte.

## Kräfte auf bewegliche Ladungen

Für viele Anwendungen ist das Verhalten von Elektronen in elektrostatische Feldern von Bedeutung. Hier wird zunächst die allgemeine Beschleunigung von Ladungen betrachtet.

- Homogenes  $\vec{E}$ -Feld in Richtung  $e_x$ :  $E_x$
- Wirkende Coulombsche Kraft:  

$$F_x = Q E_x$$
- Startgeschwindigkeit bei  
 $v(x = 0) = v_0 = 0$
- Erreichte Endgeschwindigkeit:  $v_e$
- Elektronenmasse:  $m$
- Für die Ladung Zugewinn an kinetischer Energie

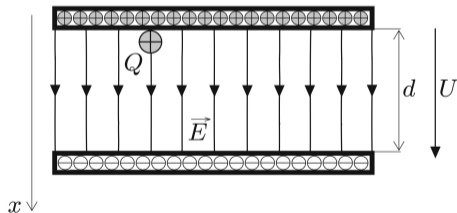


Abb. 48: Freie Ladung im  $\vec{E}$ -Feld [2]

Die Ladung wird von  $v_0$  auf  $v_e$  beschleunigt; die aufgenommene kinetische Energie<sup>f</sup> beträgt

$$\Delta W_{kin} = \frac{1}{2} m (v_e^2 - v_0^2)$$

und wird dem  $\mathbf{E}$ -Feld bei konstanter Spannung  $U = E_x d$  mit  $\Delta W_{el} = QU$  entnommen.  
Mit der Startgeschwindigkeit von  $v_0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta W_{kin} &= \Delta W_{el} \\ \Rightarrow \frac{m (v_e^2 - v_0^2)}{2} &= QU \\ \Rightarrow \frac{m v_e^2}{2} &= QU \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2QU}{m}}.\end{aligned}$$

---

<sup>f</sup>allg.  $W_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$

## Ablenkung in Elektronenstrahlröhren

Innerhalb einer Elektronenstrahlröhre wird die vertikale und horizontale Ablenkung durch elektrostatische Felder zwischen parallelen Platten realisiert.

- Homogenes  $\mathbf{E}$ -Feld:  $\mathbf{E} = (0, E_y)^T$
- Coulombsche Kraft:  $\mathbf{F} = (0, F_y)^T$
- Eintrittsgeschwindigkeit:  $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, 0)^T$
- Elektronenmasse:  $m$
- Spannung zwischen den Platten:  $U_y$
- Plattenlänge  $l$  und Plattenabstand  $d$
- Evakuierter Glaskolben

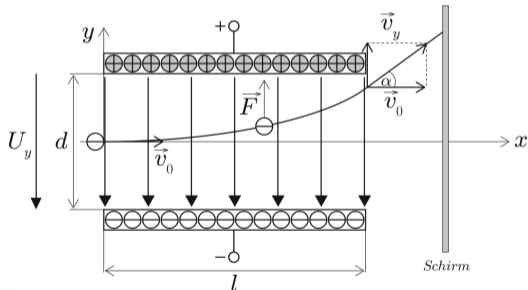


Abb. 49: Ablenkung im  $\mathbf{E}$ -Feld [2]

Das negative geladene Elektron wird in Richtung positiv geladener Platte abgelenkt. Die Coulombsche Kraft wirkt ausschließlich in  $y$ -Richtung mit  $F_y = Q E_y = Q \frac{U_y}{d}$ . Das Elektron wird konstant in positiver  $y$ -Richtung beschleunigt, mit:

$$m a_y = Q E_y \Rightarrow a_y = \frac{Q}{m} \frac{U_y}{d}.$$

Die Zeit, die das Elektron für die Strecke  $l$  benötigt ist  $t = \frac{l}{v_{0x}}$ . Nachdem das Elektron das homogene  $\mathbf{E}$ -Feld durchlaufen hat, beträgt die Geschwindigkeit des Elektrons

$$v_y(x = l) = a_y t = \frac{Q}{m} \frac{U_y}{d} \frac{l}{v_{0x}}.$$

Die Reibung mit den verbleibenden Luftmolekülen kann vernachlässigt werden, daher verändert sich die Geschwindigkeit des Elektron nicht mehr und es verlässt auf einer Geraden unter dem Winkel  $\alpha$  das  $\mathbf{E}$ -Feld:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_{0x}} = \frac{Q U_y l}{m d v_{0x}^2}.$$

Wird das Elektron initial durch eine Spannung  $U_x$  beschleunigt, so ergibt die Startgeschwindigkeit zu:

$$v_{0x} = \sqrt{\frac{2 Q U_x}{m}}$$

und der Austrittswinkel zu:

$$\tan \alpha = \frac{Q U_y l m}{m d 2 Q U_x} = \frac{l U_y}{2 d U_x}.$$

### 3 Stationäre Elektrische Felder

Die kollektive Bewegung von geladenen Teilchen bildet das *elektrische Strömungsfeld*. In Isolatoren sind die elektrischen Ladungen unbeweglich, so dass sich im Idealfall kein Strom ausbilden kann – dies wurde für den elektrostatische Zustand bereits betrachtet.

Die Grundsätze des elektrischen Strömungsfeldes sind:

- Verursacht eine Gleichspannung einen Strom ergibt dies ein *stationäres Strömungsfeld*.
- Dies ist gleichbedeutend mit einem *konstanten* Strom.
- Die Elektrostatik betrachtet stets den stromfreien Zustand.
- Bisher: Gleichstromnetze mit Linien-haften, dünnen Leitern → *homogener Strom*
- In technische Anwendungen werden häufig räumlich beliebig ausgedehnte, geformte stromführende Körper eingesetzt, daher können *inhomogene Ströme* auftreten, bspw. Kondensatoren mit *defekten* Dielektrikum, hohe Kurzschluss- oder Betriebsströme.



- Das Innere von Leitern ist nicht feldfrei.
- Physikalische Stromrichtung: Elektronen werden entgegen dem  $\mathbf{E}$ -Feld beschleunigt.
- Technische Stromrichtung: Ladungen werden mit dem  $\mathbf{E}$ -Feld beschleunigt.
- Für die Elektrostatik werden zwei vektorielle Feldgrößen, das  $\mathbf{E}$ -Feld und  $\mathbf{D}$ -Feld, benötigt, um alle Effekte im Vakuum und Leitern zu beschreiben.
- Für elektrische Strömungsfelder werden zwei vektoriellen Feldgrößen benötigt:
  - ▶ die elektrische Feldstärke ( $\mathbf{E}$ -Feld)
  - ▶ die elektrische *Stromdichte*  $\mathbf{J}$

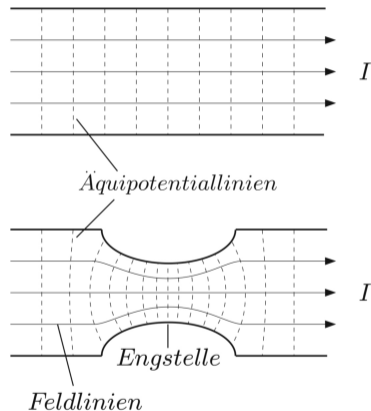


Abb. 50: Beispiele für homogenes und inhomogenes Strömungsfeld [2]

## 3.1 Eigenschaften des Elektrischen Strömungsfeldes

Die Netzwerktheorie geht in Leitern von Stromstärken  $I = \frac{Q}{t}$ , mit der Annahme homogener Ladungsverteilung, aus.

### Die Elektrische Stromdichte; Kontinuität des stationären Strömungsfeldes

Bei inhomogener Strömung, kann die Stromdichte zur Beschreibung des Strömungsfeldes herangezogen werden, mit

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta A}, \text{ dabei sind:}$$

- $\Delta A$  elementare Querschnittsfläche
- $\Delta I$  durch  $\Delta A$  elementarer Stromanteil

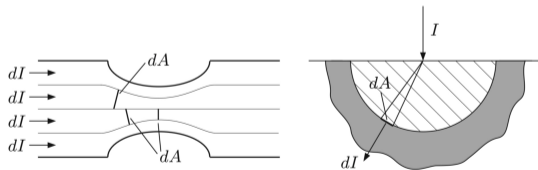


Abb. 51: Erläuterung der Stromdichte [2]

Allgemein lässt sich die skalare Größe, der Strom  $I$ , schreiben als

$$I = \iint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} = \iint_A J dA \cos \angle(\mathbf{J}, d\mathbf{A}) \stackrel{\mathbf{J} \parallel d\mathbf{A}}{=} \iint_A J dA$$

## Elektrische Stromdichte $\mathbf{J}$

Die elektrische Stromdichte ist eine ortsabhängige Funktion und in allen Punkten parallel zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  der Ladungsträger.

Analog zur elektrischen Flussdichte  $\mathbf{D}$  ist die elektrische Stromdichte  $\mathbf{J}$  eine flächenhafte Größe:

$$\mathbf{D} = \frac{dQ}{d\mathbf{A}}; \quad \mathbf{J} = \frac{dI}{d\mathbf{A}}, \text{ und wird in der Einheit: } [\mathbf{J}] = \frac{\text{A}}{\text{m}^2} \text{ angegeben.}$$

## Kontinuitätssatz: Gaußscher Satz des stationären Strömungsfeldes

Der Gesamtstrom durch eine geschlossene Fläche (also eine Hülle) entspricht im stationären Zustand stets Null.

$$\sum I = \oiint \mathbf{J} d\mathbf{A} = 0$$

Dabei müssen stets alle Ströme entsprechend ihres Vorzeichens<sup>g</sup> betrachtet werden, also hinein- und herausfließende Ströme. Hier sei auch auf den 1. Kirchhoffschen Satz verwiesen, der besagt: "Die Summe aller Ströme, die in einen Knoten hinein fließen ist Null".

---

<sup>g</sup>willkürlich gewählter Zählsinn

Dies führt zu der Konsequenz, dass entlang eines elektrischen Leiters der Gleichstrom konstant sein muss.

$$\begin{aligned}
 \iint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} &= \iint_{A_1} \dots + \iint_{A_2} \dots + \iint_{\text{Mantel}} \dots \\
 &= \iint_{A_1} \mathbf{J} d\mathbf{A} + \iint_{A_2} \mathbf{J} d\mathbf{A} = -I_1 + I_2 = 0 \\
 &\Rightarrow \boxed{\mathbf{J}_{n_1} = \mathbf{J}_{n_2}}
 \end{aligned}$$

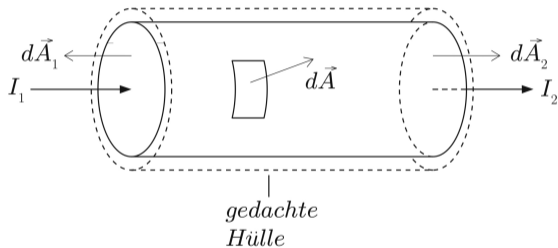


Abb. 52: Gewählte Integrationshülle [2]

Somit ist die Normalenkomponente der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{J}$  stetig und ähnelt der Stetigkeitsbedingung für das  $\mathbf{D}$ -Feld.

Die elektrische Stromdichte  $\mathbf{J}$  muss stets die Bedingung erfüllen:

$$\oiint_A \mathbf{J} d\mathbf{A} = 0.$$

- Außerhalb des Leiters ist  $\mathbf{J} = 0$ ,
- somit gilt  $\mathbf{J}_n = \mathbf{J}_t = 0$ .
- Damit muss  $\mathbf{J}_n$  im Inneren des Leiters auch gleich Null sein.
- Das Strömungsfeld im Leiter verläuft tangential zur Oberfläche.

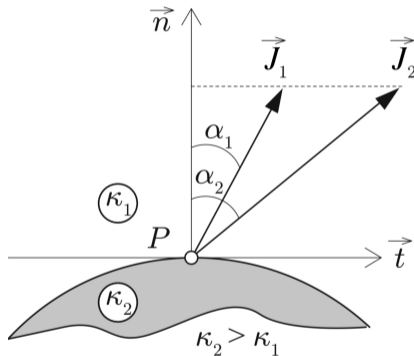


Abb. 53: Stetigkeitsbedingung von  $\mathbf{J}$  [2]

## Geschlossenes Hüllenintegral von $\mathbf{J}$

Das Flächenintegral der elektrischen Stromdichte  $\mathbf{J}$  durch eine beliebig geschlossenen Fläche (Hülle) ist im stationären Zustand Null. Der Gleichstrom kann nur in geschlossenen Kreisen fließen.

Allgemein gilt, dass ein Vektorfeld  $\mathbf{V}$ , welches die Eigenschaft  $\oiint \mathbf{V} \, d\mathbf{A} = 0$  auf jeder Hülle erfüllt, *quellenfrei* oder *Wirbelfeld* genannt wird.

## Wegunabhängigkeit der elektrischen Spannung

Auch im stationären Strömungsfeld besteht weiterhin die Gültigkeit für die Wegunabhängigkeit der Spannung mit den folgenden Konsequenzen:

- Die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$  ist *wirbelfrei*.
- Die Spannung ist wegunabhängig.
- Die elektrische Feldstärke kann auch in Abhängigkeit des Potentials beschrieben werden mit:  $\mathbf{E} = -\text{grad}(\varphi)$ .
- Die Tangentialkomponente des  $\mathbf{E}$ -Feld ist stetig.

$$\oint \mathbf{E} \, ds = 0$$

$$U_{AB} = \int_A^B \mathbf{E} \, ds = \varphi_A - \varphi_B$$

$$\varphi_B = \varphi_A - \int_A^B \mathbf{E} \, ds$$

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}$$



Mit diesen Eigenschaften, die identisch mit der Elektrostatik sind, ergeben sich für das stationäre Strömungsfeld die folgenden Konsequenzen.

In Leitern,

- sind Leiter-Oberflächen nicht äquipotential.
- steht das  $\vec{E}$ -Feld nicht senkrecht auf der Leiter-Oberfläche.
- besteht im Inneren keine Feldfreiheit.
- gilt im angrenzenden Medium  $\vec{E}_{t_1} = \vec{E}_{t_2} > 0$ , mit der *spezifischen Leitfähigkeit*  $\kappa$ .

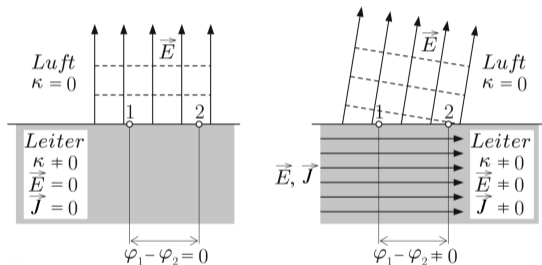


Abb. 54: Vergleich des elektrostatischen und des stationären Falls [2]

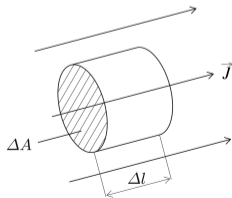
## Das Materialgesetz des Elektrischen Strömungsfeldes

In Analogie zu der Verknüpfung der beiden beschreibend Feldgrößen der Elektrostatik werden im stationären Strömungsfeld, die Stromdichte  $\mathbf{J}$  und der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$  über die spezifische Leitfähigkeit  $\kappa$  miteinander verknüpft.

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$$

Dies beschreibt die Verallgemeinerung des *Ohmschen Gesetzes*; gängig ist ebenso die Verwendung des spezifischen Widerstandes mit  $\rho = \frac{1}{\kappa}$ .

- Leitwert:  $G = \kappa \frac{\Delta A}{\Delta l}$
- Leitwert ist auch:  $G = \frac{\Delta I}{\Delta U}$
- $\Rightarrow \kappa \frac{\Delta A}{\Delta l} = \frac{\Delta I}{\Delta U} \Rightarrow \kappa = \frac{J}{E}$



Der spezifische Leitwert wird in

$$[\kappa] = \frac{\text{Siemens}}{\text{m}} = \frac{\text{S}}{\text{m}}, \text{ mit: } S = \frac{1}{\Omega}$$

und der spezifische Widerstand in  $[\rho] = \Omega \text{ m}$  angegeben. Da Querschnitte von Leitern oft in  $\text{mm}^2$  angegeben werden, ist auch die

$$\text{Einheit } [\rho] = \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \text{ geläufig.}$$

Tab. 2: Spezifische Leitwerte

	$\kappa$ in S/m
Kupfer	$56 \cdot 10^6$
Aluminium	$(33...38) \cdot 10^6$
Eisen	$(6, 7...10) \cdot 10^6$
Silber	$62, 5 \cdot 10^6$
Messing	$12, 5 \cdot 10^6$
Chromnickel	$0, 9 \cdot 10^6$

Ein aktuelles Forschungsgebiet stellen die *Supraleiter* dar, diese weisen für den absoluten Nullpunkt ( $0 \text{ K} = -273, 15^\circ \text{C}$ ) keinen elektrischen Widerstand auf

## Gesetz über die Energiewandlung in Leitern

In stromdurchflossenen Leitern entsteht durch die Reibung der Ladungsträger mit dem Metallgitter stets Wärme, man spricht auch von *Dissipation*. Dies wird durch die Leistungsdichte  $p = \mathbf{J} \mathbf{E}$  ausgedrückt.

### Energiewandlung in Leitern

Die abgegebene Leistung des elektrischen Feldes pro Volumeneinheit des Leiters (Leistungsdichte), entspricht dem Skalarprodukt der Stromdichte  $\mathbf{J}$  und der elektrischen Feldstärke  $\mathbf{E}$ .

Die gesamte umgesetzte Wärmeleistung in einem Leiter mit Volumenelement  $dV$  ist:

$$P = \iiint p dV = \iiint \mathbf{J} \mathbf{E} dV$$

Für einen Leiter des Querschnitts  $A$  mit konstanter Stromdichte  $\mathbf{J}$  und konstanter Feldstärke  $\mathbf{E}$  ergibt sich

$$P = \int_1^2 \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{A} ds \stackrel{\mathbf{E} \parallel ds \parallel \mathbf{J} \parallel d\mathbf{A}}{=} \int_1^2 E J A ds$$

$$= J A \int_1^2 E ds = I U_{12}.$$

$$P = U I = R I^2$$

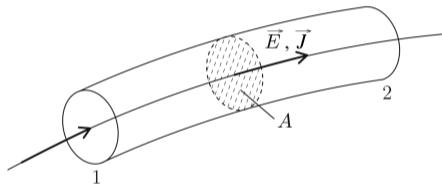


Abb. 55: Konstante Stromdichte [2]

Das Wegstück  $ds$  wird zweckmäßigerweise in Richtung des  $\mathbf{E}$ -Feldes gewählt.

## Analogie zwischen Elektrostatik und stationären Strömungsfeldern

Die Korrespondenzen zwischen der Elektrostatik und dem stationärem Strömungsfeld werden in im Folgendem zusammengefasst.

Tab. 3: Korrespondenzen Elektrostatik und stationäre Strömungsfelder

Elektrostatik	Stationäre Strömungsfelder	Gleichstrom mit $\mathbf{J} = \text{konstant}$
$\oiint \mathbf{D} d\mathbf{A} = Q$	$\oiint \mathbf{J} d\mathbf{A} = 0$	$\sum I = 0$
$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$	$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$	$\sum U = 0$
$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$	$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}$	$I = GU$

## 3.2 Widerstandsberechnung bei inhomogenen Feldern

Für homogene Strömungsfelder findet das Ohmsche Gesetz in spezieller Form Anwendung.

$$R = \frac{U}{I} = \frac{l}{\kappa A}$$

Mit  $l$  der Leiterlänge,  $A$  dem Querschnitt senkrecht zum Ladungstransport und  $\kappa$  der spezifischen, elektrischen Leitfähigkeit. Für inhomogene Felder müssen zwei Integrale gelöst werden, mit

$$R = \frac{\int \mathbf{E} ds}{\iint \mathbf{J} dA}$$

Zwei Beispiele für die Berechnung des Widerstandes  $R$  werden im Folgenden diskutiert. Hierfür werden so genannte Stromfäden als ein Modell eingeführt.

## Variation des Querschnittes entlang des Ladungstransport

Ändert sich der Querschnitt  $A$  entlang des Ladungstransportes, bspw. in  $x$ -Richtung, so ist der Querschnitt eine Funktion von  $x$  ( $A = f(x)$ ) und die Inhomogenität des Strömungsfeldes besteht ausschließlich in  $x$ -Richtung. Das folgende Vorgehen ist zweckmäßig, da die Annahme eines mittleren Querschnittes oftmals mit großen Fehlern verbunden ist:

- Aufteilung des Leiters in Teilstücke der Dicke  $dx$  mit konstantem Querschnitt.
- Der Widerstand einer Scheibe entspricht somit  $dR = \frac{dx}{\kappa A(x)}$ .
- Die Scheiben liegen in Reihe und müssen entlang  $l$  integriert (summiert) werden, mit

$$R = \int_0^l \frac{dx}{\kappa A(x)}.$$



## Variation der Länge der Stromfäden oder Variation der Leitfähigkeit

Ändert sich der Querschnitt  $A$  entlang des Ladungstransportes nicht und sind entweder die Länge der Stromfäden oder die spezifische Leitfähigkeit nicht konstant, ist das folgende Vorgehen ist zweckmäßig:

- Aufteilung des Leiters in Stromfäden der variablen Länge  $l$ .
- Aufteilung des Leiters in Bereiche konstanter spezifischer Leitfähigkeit.
- Integration senkrecht zum Ladungstransport.
- Da die Stromfäden parallel geschaltet sind muss der Leitwertes betrachtet werden,

$$G = \iint_A \frac{\kappa dA}{l}, \text{ mit } R = \frac{1}{G}.$$

## 3.3 Berechnung elektrischer Strömungsfelder

Es werden typische Aufbauten für homogene und inhomogene Strömungsfelder betrachtet.

### Homogenes Strömungsfeld in dünnen Leitern

- Stromdichte  $J$  konstant
- $l = 1 \text{ km}$  und  $A = 10 \text{ mm}^2$
- Spezifischer Leitwert:  $\kappa = 56 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{Vm}}$
- Stromdichte:  $2 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$  bis  $10 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$

$$R = \frac{l}{\kappa A} = 1,785 \Omega.$$

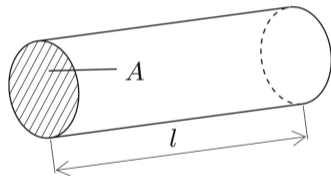


Abb. 56: Homogenes Strömungsfeld im Leiter [2]

Typische Wärmeverluste liegen zwischen  $714 \text{ W}$  und  $17,85 \cdot 10^3 \text{ W}$  und die elektrische Feldstärke für  $J = 2 \frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$  bei  $E = \frac{J}{\kappa} = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ AVm}}{\text{m}^2 56 \cdot 10^6 \text{ A}} = 3,57 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V}}{\text{m}}$ .

## Inhomogenes zylindrisches Strömungsfeld

- Koaxiale, ideale Zylinderelektroden mit  $R_i, R_a, l$  und  $\kappa_E \rightarrow \infty$
- *Schlecht* leitendes homogenes Medium,  $\kappa$  *sehr* klein
- Elektrodenspannung  $U$  gegeben
- Gesucht: Strom  $I$  und Widerstand  $R$
- Radiale Vektorfelder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{J}$  ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{J}$ )

$$I = \iint \mathbf{J} d\mathbf{A} = J 2\pi r l$$

$$\Rightarrow \mathbf{J} = \frac{I}{2\pi r l} \mathbf{e}_r$$

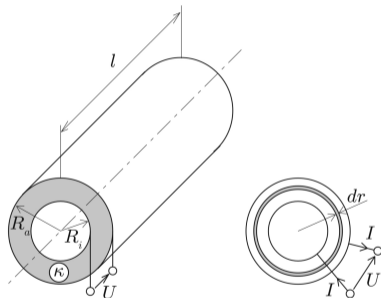


Abb. 57: Zylinder: inhomogenes Strömungsfeld [2]

Die elektrische Feldstärke kann nach dem Ohmschen Gesetz bestimmt werden.

$$E = \frac{J}{\kappa} = \frac{I}{2\pi \kappa r l}$$

$$U = \int_{R_i}^{R_a} E dr = \frac{I}{2\pi \kappa l} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{2\pi \kappa l U}{\ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{1}{2\pi \kappa l} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)$$

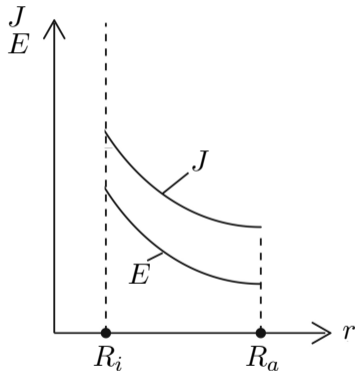


Abb. 58: Verlauf der Feldgrößen [2]

Für diesen Aufbau kann man, mit  $\epsilon$  des Mediums, auch die Kapazität angeben (vgl. S. 82)

$$C = \frac{2\pi \epsilon l}{\ln\left(\frac{R_a}{R_i}\right)}.$$

Dieser Aufbau stellt eine Parallelschaltung von Widerstand und Kondensator dar. Sind  $\epsilon$  und  $\kappa$  für das Medium homogen, kann immer mit

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\iint_2 \mathbf{D} d\mathbf{A}}{\int_1 \mathbf{E} ds} = \frac{\epsilon \iint_2 \mathbf{E} d\mathbf{A}}{\int_1 \mathbf{E} ds} \quad \text{und} \quad R = \frac{U}{I} = \frac{\int_1^2 \mathbf{E} ds}{\kappa \iint \mathbf{E} d\mathbf{A}},$$

$$\boxed{RC = \frac{\epsilon}{\kappa}} \text{ gefolgert werden}^h.$$

<sup>h</sup>Bei gleicher Geometrie für  $R$  und  $C$  ist der Übergang  $\iint \rightarrow \iint$  zulässig.

## Inhomogenes zylindrisches Strömungsfeld mit Querschichtung

Werden zwei leitenden Dielektrika übereinander geschichtet durchströmt, so muss der radiale Strom für alle Richtungen gleich sein.

- $I_1 = I_2 = I$
- $J_1(R_m) = J_2(R_m)$ , da  $J_n$  stetig
- $J_1(R_m) = \frac{I}{2\pi r l}$
- $E_1 = \frac{J_1}{\kappa_1} = \frac{I}{2\pi \kappa_1 r l}$
- $E_2 = \frac{J_2}{\kappa_2} = \frac{I}{2\pi \kappa_2 r l}$
- $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$

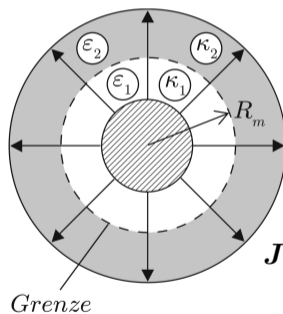


Abb. 59: Inhomogenes Strömungsfeld im Zylinder mit Querschichtung [2]

Die Spannung zwischen den Elektroden ergibt sich zu:

$$U = \int_{R_i}^{R_m} E_1 dr + \int_{R_m}^{R_a} E_2 dr = \frac{I}{2\pi l} \left[ \frac{1}{\kappa_1} \ln \left( \frac{R_m}{R_i} \right) + \frac{1}{\kappa_2} \ln \left( \frac{R_a}{R_m} \right) \right].$$

Bei der Bestimmung des  $\mathbf{D}$ -Feldes in den beiden Medien (mit unterschiedlichen Permittivitäten  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ ) darf nicht mehr  $\mathbf{D}_{n_1} = \mathbf{D}_{n_2}$  angesetzt werden, da im Strömungsfeld die Grenzschicht nicht mehr als *ladungsfrei* angenommen werden darf.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 = \epsilon_1 \mathbf{E}_1 &= \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \mathbf{J}; & \mathbf{D}_2 = \epsilon_2 \mathbf{E}_2 &= \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} \mathbf{J} \\ \Rightarrow \frac{D_1}{D_2} &= \frac{\epsilon_1 \kappa_2}{\epsilon_2 \kappa_1} \end{aligned}$$

Die Flächenladungsdichte  $\rho_S$ , die an der Grenzschicht bei  $r = R_m$  entsteht, kann aus dem Gaußschen Satz der Elektrostatik (vgl. S. 52) bestimmt werden. Daraus folgt die Differenz der elektrischen Flussdichten  $\mathbf{D}_1$  und  $\mathbf{D}_2$  mit<sup>i</sup>

$$\begin{aligned} \rho_S(R_m) &= \epsilon_2 E_2(R_m) - \epsilon_1 E_1(R_m) \\ &= \epsilon_2 \frac{I}{2\pi \kappa_2 R_m l} - \epsilon_1 \frac{I}{2\pi \kappa_1 R_m l} \\ &= \frac{I}{2\pi R_m l} \left[ \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} - \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} \right]. \end{aligned}$$

Die Zylinderanordnung mit einer Querschichtung mit leitenden Dielektrika kann als eine Parallelschaltung von zwei Reihenschaltungen, von jeweils zwei Kondensatoren und zwei Widerständen, betrachtet werden.

<sup>i</sup>Erinnerung:  $[\mathbf{D}]$  ist  $\frac{\text{As}}{\text{m}^2}$  und entspricht einer Flächenladungsdichte



## Inhomogenes zylindrisches Strömungsfeld mit Längsschichtung

Werden zwei leitenden Dielektrika nebeneinander geschichtet, so muss der Strom durch alle Teil-Mantelflächen konstant sein.

- $J_{n_1} = J_{n_2}$
- $E_{t_1} = E_{t_2} \Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E} e_r, \mathbf{E} \parallel \mathbf{J}$
- $E = \frac{J}{\kappa} \Rightarrow \frac{J_1}{\kappa_1} = \frac{J_2}{\kappa_2} = E$
- $\iint \mathbf{J} d\mathbf{A} = I \Rightarrow J_1 \pi r l + J_2 \pi r l = I$   
 $\Rightarrow J_1 + J_2 = \frac{I}{\pi r l} = (\kappa_1 + \kappa_2) E$   
 $\Rightarrow E = \frac{I}{\pi r l (\kappa_2 + \kappa_1)}$

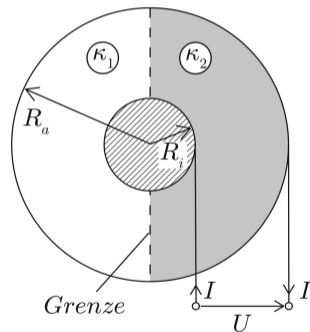


Abb. 60: Inhomogenes Strömungsfeld im Zylinder mit Längsschichtung [2]

Die Spannung zwischen den Elektroden ergibt sich zu:

$$U = \int_{R_i}^{R_a} \frac{I}{\pi r l (\kappa_1 + \kappa_2)} dr = \frac{I}{\pi l (\kappa_1 + \kappa_2)} \ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right).$$

Der Widerstand und die Kapazitäten von längsgeschichteten Zylinderkondensatoren sind gegeben mit:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)}{\pi l (\kappa_1 + \kappa_2)}, \quad C_1 = \frac{\pi \epsilon_1 l}{\ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)}, \quad C_2 = \frac{\pi \epsilon_2 l}{\ln \left( \frac{R_a}{R_i} \right)}.$$

Der gesamte Aufbau entspricht einer Parallelschaltung von vier Elementen; zwei Widerständen und zwei Kondensatoren.

## 4 Stationäre Magnetfelder

Wird ein Magnetfeld durch einen Dauermagneten oder einen konstanten Gleichstrom verursacht, spricht man von *stationären Magnetfeldern*. Allgemein spricht man auch von Elektromagnetismus; dies drückt die Verknüpfung zwischen elektrischem Strom und Magnetfeldern aus.

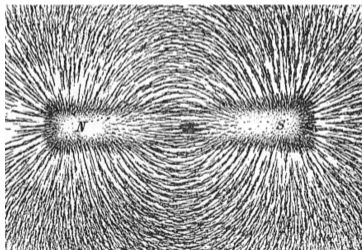


Abb. 61: Magnetfelder eines Dauermagneten [3]

## 4.1 Kräfte auf durchströmte Körper

Ein Magnetfeld kann durch seine Kraftwirkung auf die direkt benachbarte Außenwelt nachgewiesen werden; dabei ist die Ursachen, ob elektrischer Strom oder Dauermagnet, irrelevant. Die Eigenschaften lassen sich einfühend zusammenfassen:

- Ein Magnet ist stets polarisiert; hat also einen Nord- und einen Südpol.
- Es existiert kein magnetischer Monopol  $\Rightarrow$  die Divergenz ist gleich 0.
- Außerhalb eines Dauermagneten verlaufen die Feldlinien vom Nord- zum Südpol.
- Gleichnamige Pole stoßen sich ab und ungleichnamige ziehen sich an.
- Die Tangente der magnetischen Feldlinien gibt die Kraftrichtung an.
- Feldlinien überschneiden sich nicht.
- Es existieren ausschließlich magnetische Wirbelfelder (Feldlinien sind in sich geschlossen)

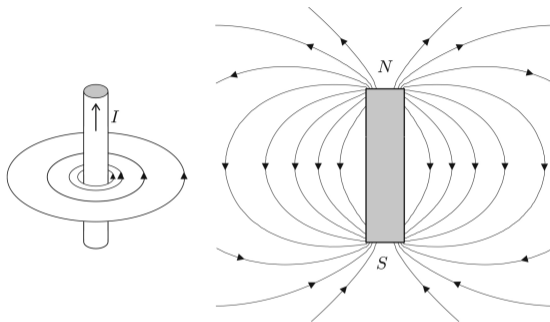


Abb. 62: Magnetfelder und ihre unterschiedlichen Ursachen [2]

Die Ursache ist in beiden Fällen die Bewegung elektrischer Ladungen in der Form von *Elektronenstrom* oder des *Elektronenspins*.

## Kräfte zwischen parallelen Leitern

Bei gleichsinnig stromdurchflossene Leitern ziehen diese sich an, ungleichsinnig stromdurchflossene Leiter stoßen sich ab. Die Kraft, die auf einen stromdurchflossenen Leiter mit dem Strom  $I_1$ , durch den Strom  $I_2$  wirkt, lautet:

$$|\mathbf{F}_{12}| = F_{12} \propto \frac{I_1 I_2 l}{r}$$

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2 l}{r} \mathbf{e}_r, k = \frac{\mu}{2\pi}$$

$\mu$  : magnetische Permeabilität

$l$  : Länge der Leiter

$r$  : Achsenabstand

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{12} = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi r} \mathbf{e}_r$$

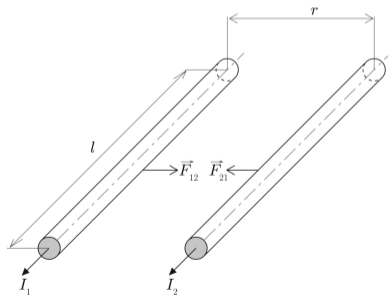


Abb. 63: Gleichsinnig durchströmte Leiter [2]

Die Einheit der magnetischen Permeabilität  $\mu$  ist durch die gegebenen Einheiten des Stromes (Ampère), Abstand (Meter) und Kraft (Newton) mit

$$[\mu] = \frac{[F][l]}{[I]^2} = \frac{\text{V A s m}}{\text{m m A}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

Im Vakuum und in der Luft beträgt der Wert für die Permeabilität

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

und ist eine Naturkonstante, die experimentell gemessen werden muss. Für unterschiedliche Materialien wird die einheitenlose, relative Permeabilitätszahl  $\mu_r$  eingeführt:  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Für die Überlagerung der Kräfte für mehrere Ströme gilt auch hier das Superpositionsprinzip.

## Magnetfeld eines langen Leiters: Magnetische Flussdichte und Feldstärke

Analog zum Coulombschen Gesetz der Elektrostatik ist die Kraft, die auf den zweiten Leiter der Länge  $l$  mit dem Strom  $I_2$  wirkt, proportional zu  $I_2$  mit  $F \propto I_2 l$  und einem Proportionalitätsfaktor  $\frac{\mu I_1}{2\pi r}$ . Dieser Faktor stellt die magnetische Wirkung des ersten Leiters am Ort des zweiten Leiters, im Abstand  $r$ , dar.

$$F_{21} = F = \underbrace{\frac{\mu I_1}{2\pi r} e_r}_{B} I_2 l \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{\mu I_1}{2\pi r} e_r}$$

Diese magnetische Feldgröße nennt man die *magnetische Flussdichte*  $B$  und sie gibt die magnetische Wirkung eines sehr langen Leiters, der vom Strom  $I_1$  durchflossen wird, im Abstand  $r$  an.



- Die magnetische Flussdichte  $B$ ,
- ist somit das Vektorfeld, verursacht durch einen stromdurchflossenen Leiter mit Strom  $I_1$ .
  - entspricht einem Wirbelfeld  $\Rightarrow B$  ist rotationssymmetrisch.
  - nimmt mit  $\frac{1}{r}$  ab.
  - wird in der Einheit  

$$[B] = \frac{\text{Vs A}}{\text{Am m}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \text{Tesla} = \text{T}$$
 angegeben.
  - hat einen willkürlich gewählten Umlaufsinn.

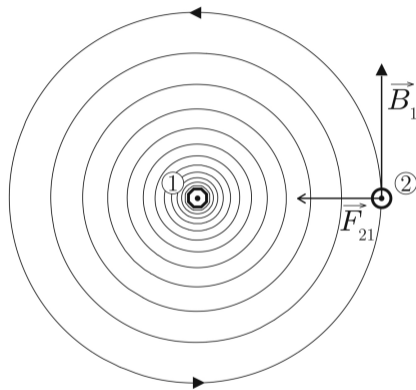


Abb. 64: Magnetfeld eines Leiters (1) und die Kraft  $F_{21}$  auf den Leiter 2 [2]

## Rechtsschraubenregel

Der elektrische Strom<sup>a</sup> und magnetische Flussdichte sind im Sinne der *Rechtsschraubenregel* oder auch *Rechte-Faust-Regel* miteinander verknüpft.

<sup>a</sup>im Sinne der technischen Stromrichtung

Für Leiter die senkrecht zur Zeichenebene liegen, wird der Stromzählpfeil des Stromes für austretenden Strom als Pfeilspitze (Punkt) und für eintretenden Strom als Pfeilende (Kreuz) dargestellt. Dies ist eine willkürliche Konvention und vereint somit die technische und physikalische Stromrichtung.

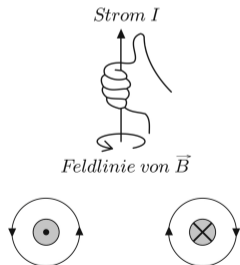


Abb. 65: Die Rechtsschraubenregel [2]

Mit der Materialkonstanten  $\mu$ , stellt die magnetisch Flussdichte  $\mathbf{B}$  eine materialabhängige Größe dar. Die materialunabhängige Größe, *magnetische Feldstärke*  $\mathbf{H}$ , wird analog zur Elektrostatik, eingeführt mit

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_H.$$

Das  $\mathbf{H}$ -Feld wird auch als *magnetische Erregung* bezeichnet und wird in der Einheit  $[\mathbf{H}] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$  angegeben; daraus folgt der Zusammenhang:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Um das Magnetfeld von Paralleldrahtleitungen schneller berechnen zu können, betrachtet man zunächst das Feld eines Leiters auf einer Achse. Der Strom  $I$  sei in Richtung der  $z$ -Achse und gesucht ist die Flussdichte  $\mathbf{B}$  auf der  $x$ -Achse.

- rechts vom Leiter, falls  $x_0 = 0$

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi |x|} \mathbf{e}_y$$

- links vom Leiter, falls  $x_0 = 0$

$$\mathbf{B}(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi |x|} \mathbf{e}_y$$

- allgemein, falls  $x_0 \neq 0$

$$\mathbf{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi (x - x_0)} \mathbf{e}_y$$

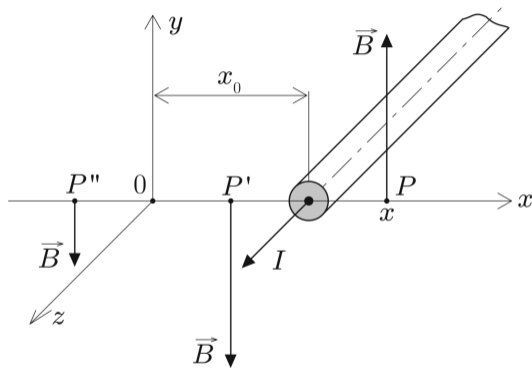


Abb. 66:  $\mathbf{B}$ -Feld eines Leiters [2]

## Magnetfelder von Paralleldrahtleitungen

Parallel verlaufende Leiter werden gegenseitig bestromt.

- Zwei dünne Leiter im Abstand  $2d$ ,
- $l \gg d \Rightarrow \mathbf{B} \neq f(z)$ .
- Das Innere der beiden Leiter wird nicht betrachtet,  $x \neq d$ .
- Die Flussdichten ergeben sich zu

$$\mathbf{B}_1(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi (x + d)} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{B}_2(x) = \frac{\mu_0 (-I)}{2\pi (x - d)} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_1(x) + \mathbf{B}_2(x)$$

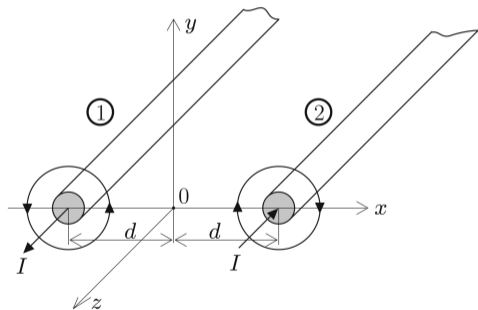


Abb. 67: Paralleldrahtleitung gegenseitig bestromt [2]

Die resultierende Flussdichte in jedem Punkt auf der  $x$ -Achse (außerhalb der Leiter) ergibt sich zu:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{(x+d)} + \frac{1}{(d-x)} \right) e_y$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I d}{\pi (d^2 - x^2)} e_y}$$

- Zwischen den Leitern wird das Feld *verstärkt*,
- außerhalb beider Leiter wird das Feld *geschwächt*.
- Das Feld im Außenbereich kann gegen Null gehen.

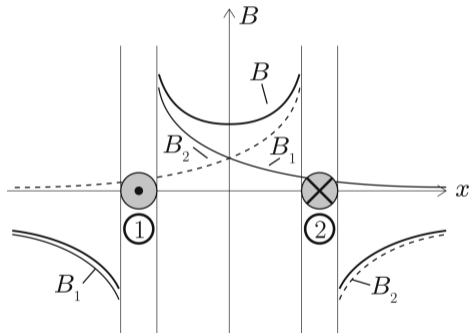


Abb. 68: Verlauf der  $B$ -Felder bei gegensinniger Bestromung [2]

Parallel verlaufende Leiter werden gleichsinnig bestromt.

- Zwei dünne Leiter im Abstand  $2d$
- Länge  $l \gg d \Rightarrow \mathbf{B} \neq f(z)$
- Das Innere der beiden Leiter wird nicht betrachtet,  $x \neq d$ .
- Die Flussdichten ergeben sich zu:

$$\mathbf{B}_1(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi (x + d)} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{B}_2(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi (x - d)} \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{B}_1(x) + \mathbf{B}_2(x)$$

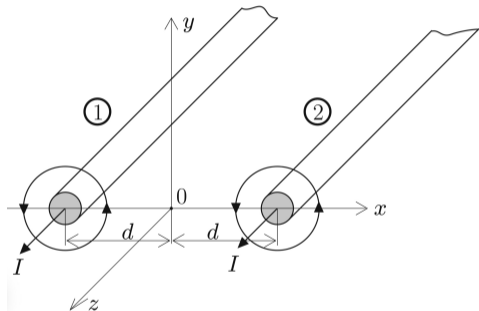


Abb. 69: Paralleldrahtleitung gleichsinnig bestromt [2]

Die resultierende Flussdichte in jedem Punkt auf der  $x$ -Achse (außerhalb der Leiter) ergibt sich zu:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{1}{(x+d)} + \frac{1}{(x-d)} \right) e_y$$

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 I x}{\pi (x^2 - d^2)} e_y}$$

- Zwischen den Leitern wird das Feld *geschwächt*,
- außerhalb beider Leiter wird es *verstärkt*.
- Das Feld bei  $x = 0$  geht aus Gründen der Symmetrie gegen Null.

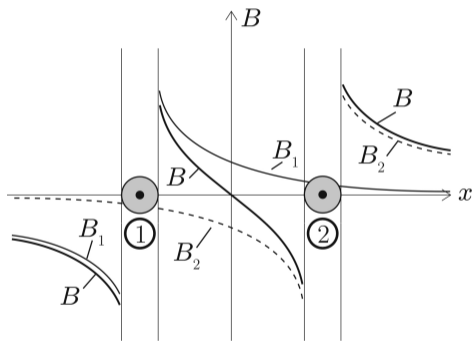
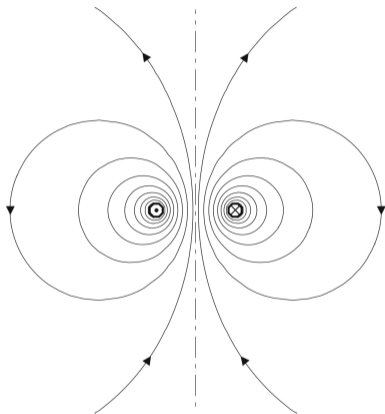
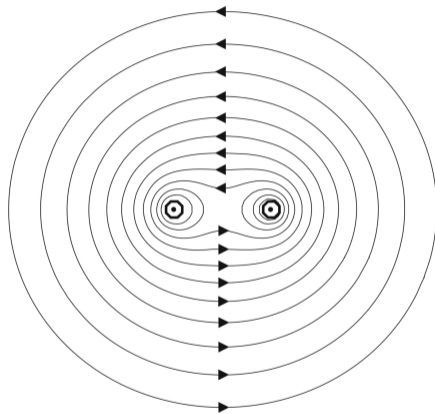


Abb. 70: Verlauf der  $B$ -Felder bei gleichsinniger Bestromung [2]





**Abb. 71:** Feldlinienbild einer Paralleldrahtleitung mit gegenseitig bestromten Leitern [2]



**Abb. 72:** Feldlinienbild einer Paralleldrahtleitung mit gleichsinnig bestromten Leitern [2]

Die Überlagerung der magnetischen Feldern von bspw. drei parallel in einer Ebene liegenden Leitern, die den gleichen Strom führen, muss vektoriell betrachtet werden.

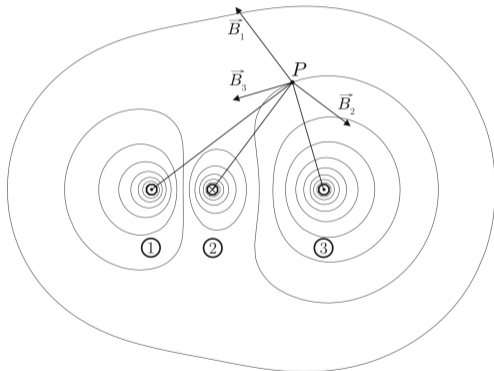


Abb. 73: Feldbild von drei parallelen Leitern [2]

## Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

Mit der zuvor eingeführten wirkenden Kraft  $\mathbf{F} = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi r} \mathbf{e}_r$  und der Berücksichtigung der Definition der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  ergibt sich:

$$\mathbf{F} = I l \mathbf{B} \underset{l \perp \mathbf{B}}{=} I l B \Rightarrow B = \frac{F}{I l}$$

- Stehen  $l$  und  $\mathbf{B}$  nicht senkrecht aufeinander, ergibt sich

$$\boxed{\mathbf{F} = I (\mathbf{l} \times \mathbf{B})} = I l B \sin(\alpha).$$

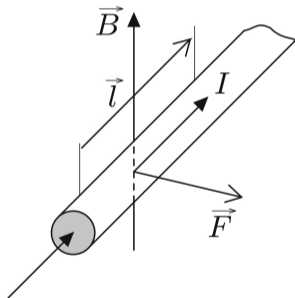


Abb. 74: Strom, Flussdichte und Kraftwirkung [2]

## Kraft von Laplace<sup>a</sup>

Die Kraft  $\mathbf{F} = I (\mathbf{l} \times \mathbf{B})$  beschreibt die Kraft, die

- auf den Leiter der Länge  $|\mathbf{l}|$ , der vom Strom  $I$  durchströmt ist, wirkt.
- proportional zum Vektor  $\mathbf{l}$  ist, mit  $|\mathbf{l}|$  der Länge des Leiters und der Richtung des Ladungstransportes.
- proportional zu der fremderzeugten magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  ist.

---

<sup>a</sup>die Lorentz-Kraft (vgl. S. 211) wirkt auf Ladungen

In der Elektrostatik war die Kraft-verursachende Größe die elektrische Feldstärke  $\mathbf{E}$ , wohingegen in der Magnetostatik die Kraft-verursachende Größe die Flussdichte  $\mathbf{B}$  ist. Sollte das  $\mathbf{B}$ -Feld nur auf Teilstücken homogen sein, so kann die resultierende Kraft nur für Leiterelemente angegeben werden, auf denen das  $\mathbf{B}$ -Feld konstant ist,  $\Delta\mathbf{F} = I (\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B})$ .

## 4.2 Magnetfeld von Leitern in der Luft

Die magnetische Feldstärke kann für den idealisierte Fall mit einem unendlich langen, dünnen Leiter angegeben werden mit

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi r} \mathbf{e}_r.$$

Für praktische Anwendungen mit unterschiedlichen dünnen Leitern, beliebiger Anordnungen, kann die Formel nach *Biot und Savart* herangezogen werden.

### Die Formel von Biot und Savart

Ein durchgeführtes Experiment von Biot und Savart betrachtet das  $\mathbf{H}$ -Feld auf der Winkelhalbierenden eines geknickten Leiters.

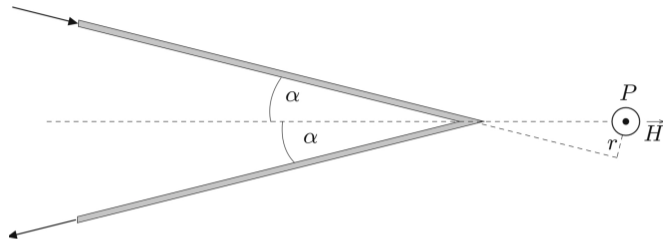


Abb. 75: Bestimmung des  $\mathbf{H}$ -Feldes auf der Winkelhalbierenden der Leiteranordnung [2]

Das  $\mathbf{H}$ -Feld in Punkt  $P$  kann beschrieben werden, mit:

$$\mathbf{H}(P) = \frac{I}{2\pi r} (1 - \cos(\alpha)) \mathbf{e}_H.$$

Für  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  ergibt sich wieder die Formel für einen graden, unendlich langen Leiter.

## Satz von Biot und Savart

„Das Magnetfeld eines beliebigen Stromkreises in einem Punkt des Raumes kann als Überlagerung der Beiträge kleiner Elemente des Stromkreises betrachtet werden.“ [2].

Mathematisch formuliert sich der Satz wie folgt:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{s}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|^2} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_I}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_I|}$$

Dieser Zusammenhang wurde von Biot und Savart aufgestellt und in den darauf folgenden Experimenten bestätigt. Zu beachten ist hier, dass es stets der Integration entlang einer geschlossenen Linie (geschlossener Stromkreis) bedarf und es etwa nicht als Feld eines einzelnen, isolierten Leiterelements  $d\mathbf{s}$  verstanden werden darf.

Die Betrachtung stationärer Ströme bedingt stets die Betrachtung geschlossener Linien.

- Stromkreis mit Strom  $I$
- Die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  in Aufpunkt  $P$  ist gesucht.
- Leiterelement  $ds$ , in Richtung des Ladungstransportes
- Vektor  $\mathbf{r}$  vom Leiterelement zum Aufpunkt  $P$
- $\mathbf{H}$  ist proportional zu  $I$  und zu  $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ .

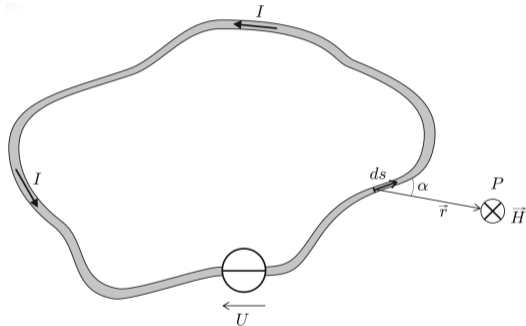


Abb. 76: Leiterschleife und Bestimmung des  $\mathbf{H}$ -Feldes [2]



## Gültigkeitsbereich der Formel von Biot und Savart

Die Formel Biot-Savartschen Formel gilt

- nur für geschlossene Kreise.
- nur für stationäre Ströme.
- nur in Luft; für ferromagnetische Stoffe mit  $\mu_r \gg 1$  gilt keine Gültigkeit.
- auch innerhalb von *massiven* Leitern mit homogener Stromdichte.
- auch für räumlich ausgedehnte Leiter, in denen die Stromdichte  $\mathbf{J}$  inhomogen ist. Dazu muss über alle stromführende Volumenelemente integriert werden,  $I = \iint \mathbf{J} d\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{r})}{r^3} \underbrace{dA ds}_{dV} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(\mathbf{J} \times \mathbf{r})}{r^3} dV.$$

## Anwendung der Biot–Savartschen Formel

Für die Betrachtung von Magnetfeldern mit Hilfe der Biot–Savartschen Formel muss der Strom und die stromführende Geometrie bekannt sein. Das Vorgehen ist folgendermaßen:

- Wahl Geometrie des Stromkreises und die Stromzählrichtung.
- Wahl des Aufpunktes  $P$ , in dem das  $\mathbf{H}$ -Feld bestimmt werden soll.
- Leiterelement  $ds$  in Richtung des Ladungstransportes.
- Bestimmung des Vektors  $\mathbf{r}$  zwischen  $ds$  und  $P$ .
- Bestimmung  $ds \times \mathbf{r}$  und damit auch die Richtung von  $d\mathbf{H}$  in  $P$ .
- Randparameter für  $ds$  und  $\mathbf{r}$  anhand der Geometrie wählen.
- Integration über den gesamten Stromkreis durchführen.

## Magnetfeld eines endlich langen, geraden Leiterstückes

Ein Leiterteilstück kann nur dann betrachtet werden, wenn es Teil eines geschlossenen Stromkreises ist. Dieses Vorgehen kann für die Beschreibung von komplizierte Geometrien geschlossener Stromkreise verwendet werden.

- Das  $\mathbf{H}$ -Feld steht senkrecht auf der Zeichenebene und tritt in diese hinein (in  $P$ ).
- Kürzester Abstand zwischen  $P$  und Leiter ist  $a$ .
- Winkel zwischen  $\mathbf{r}$  und  $d\mathbf{s}$  an den Enden des Leiterstückes:  $\beta_1, \beta_2$
- Vektor  $\mathbf{r}$  vom Leiterelement zum Aufpunkt  $P$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \int_A^B \frac{(d\mathbf{s} \times \mathbf{r})}{r^3}, \quad |\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi} \int_A^B \frac{(ds \sin \beta)}{r^2}$$

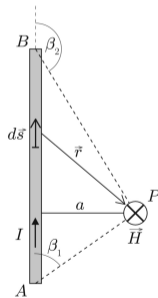


Abb. 77:  $\mathbf{H}$ -Feld eines Leiterstückes [2]

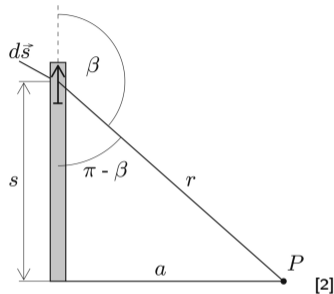
$$\tan(\pi - \beta) = \frac{a}{s}$$

$$\Rightarrow s = a \cot(\pi - \beta) = -a \cot(\beta)$$

$$\frac{ds}{d\beta} = a \frac{1}{\sin^2 \beta} \Rightarrow ds = a \frac{d\beta}{\sin^2 \beta}$$

$$\sin(\pi - \beta) = \frac{a}{r} \Rightarrow r = \frac{a}{\sin \beta}$$

$$ds \times \mathbf{r} = ds r \sin \beta$$



$$|\mathbf{H}| = \frac{I}{4\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{a d\beta}{\sin^2 \beta} \frac{\sin^2 \beta}{a^2} \sin \beta = \frac{I}{4\pi} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sin \beta}{a} d\beta = \frac{I}{4\pi a} (-\cos \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi a} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \mathbf{e}_H$$

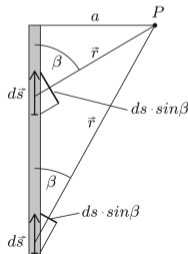
Die magnetische Feldstärke eines geraden Leiterstückes ergibt sich somit zu

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi a} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2) \mathbf{e}_H$$

und für den unendlich langen Leiter, mit  $\beta_1 = 0$ ,  $\beta_2 = \pi$ , erneut:  $\mathbf{H} = \frac{I}{2\pi a} \mathbf{e}_H$ .

$$|\mathbf{H}| = H = \frac{I}{4\pi} \int_A^B \frac{(ds \sin \beta)}{r^2}$$

- Das  $\mathbf{H}$ -Feld nimmt mit  $\frac{1}{r^2}$  ab.
- Das  $\mathbf{H}$ -Feld skaliert mit der *Effektivlänge*:  $ds \sin \beta$



[2]

## Approximation unendlich langer Leiter

Je weiter eine Leiterstücke  $ds$  vom Aufpunkt  $P$  liegt (Abstand  $a$ , vgl. Abb. 77), desto kleiner ist der Beitrag zum gesamten  $\mathbf{H}$ -Feld. Das Leiterteilstück der Länge  $4a$  liefert bereits 90% der magnetischen Feldstärke eines unendlich langen Leiters im Punkt  $P$ . Ob ein Leiter als unendlich lang betrachtet werden darf hängt damit von der Entfernung des Aufpunktes  $P$ , in dem das Feld berechnet werden soll, ab.

Betrachtet wird eine quadratische Leiterschleife; das  $\mathbf{H}$ -Feld im Mittelpunkt soll bestimmt werden. Es sei erwähnt, dass in allen anderen Raumpunkten, die Bestimmung nicht auf einfache geometrische Verhältnisse zurückgeführt werden kann.

- Superposition von vier Teilfeldern
- Alle Teilfelder stehen senkrecht auf der Zeichenebene.
- Oberes Teilstück liefert  $H_1$ , mit:  
 $a = h$ ,  $\beta_1 = 45^\circ$  und  $\beta_2 = 135^\circ$

$$\cos \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$H_1 = \frac{I}{4\pi h} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{I\sqrt{2}}{4\pi h}$$

$$H_{ges} = 4H_1 = \frac{I\sqrt{2}}{\pi h}$$

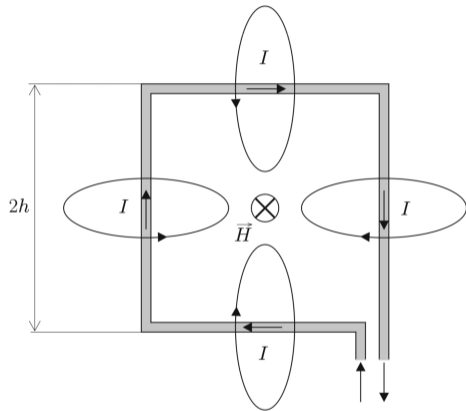


Abb. 78:  $H$ -Feld einer quadratischen Leiterschleife im Mittelpunkt [2]

## Magnetfeld auf der Achse einer kreisförmigen Leiterschleife

Die *kreisrunde Leiterschleife* ist ein elementares Grundkonzept aus dem viele praktische Anwendungen hervorgehen, bspw. die *kurze zylindrische Spule*. Wird das Magnetfeld einer kreisförmigen Schleife außerhalb der Achse gesucht, ist dies i. d. R. mit einfachen mathematischen Herangehensweisen nicht mehr lösbar.

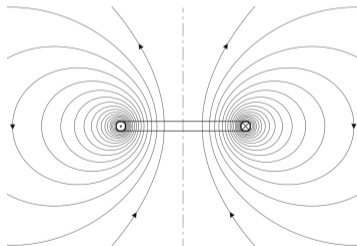


Abb. 79: Feld in der Diametralebene einer bestromten kreisförmigen Schleife [2]

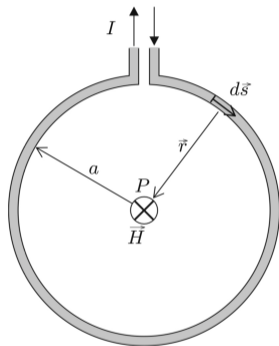


## Bestimmung des $\mathbf{H}$ -Feldes im Zentrum einer kreisrunden, bestromten Schleife.

$$d\mathbf{s} \times \mathbf{r} = ds r \sin(90^\circ) = ds a$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{\text{Schleife}} \frac{d\mathbf{s}}{a^2} \mathbf{e}_H = I \frac{2\pi a}{4\pi a^2} \mathbf{e}_H$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2a} \mathbf{e}_H$$



Soll das  $\mathbf{H}$ -Feld entlang der Achse bestimmt werden, werden Symmetrien ausgenutzt, die die Berechnung vereinfachen.

Abb. 80: Bestimmung  $\mathbf{H}$ -Feld einer Leiterschleife [2]

Der Aufpunkt wird nun auf der  $z$ -Achse außerhalb des Zentrums gewählt.

$$r_1 = r_2 = \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$d\mathbf{s} \perp \mathbf{r}$$

$$dH_{1,y} + dH_{2,y} = 0$$

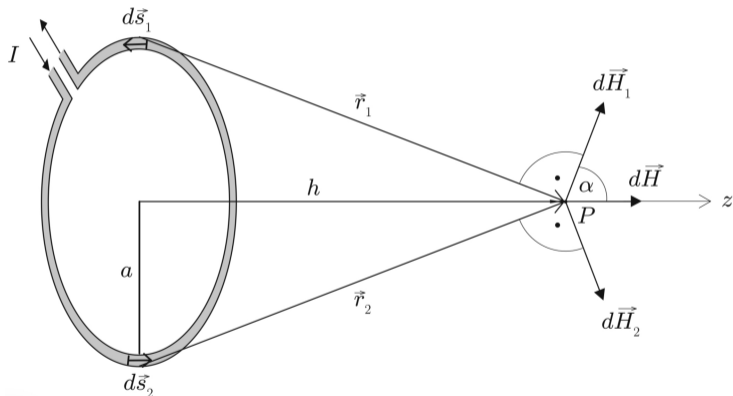
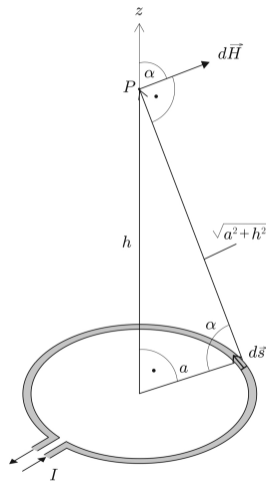


Abb. 81:  $\mathbf{H}$ -Feld Bestimmung entlang der  $z$ -Achse [2]

Während sich  $d\mathbf{H}_1$  und  $d\mathbf{H}_2$  aufheben, addieren sich die axialen Komponenten  $dH \cos \alpha$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{I}{4\pi} \oint_{\text{Schleife}} \frac{ds r}{r^3} \cos \alpha \mathbf{e}_z \\ &= \frac{I}{4\pi} \oint_{\text{Schleife}} \frac{ds a}{(a^2 + h^2) \sqrt{a^2 + h^2}} \mathbf{e}_z \\ &= \frac{I}{4\pi} \frac{2\pi a^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

mit:  $\oint ds = 2\pi a$



Für die kreisrunde Leiterschleife ergibt sich somit das  $\mathbf{H}$ -Feld entlang der  $z$ -Achse mit

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z$$

Im Zentrum der Schleife ergibt sich, mit  $h = 0$  erneut:

$$\mathbf{H} = \frac{I}{2a} \mathbf{e}_z,$$

und im Fernfeld, mit  $h \gg a$  :

$$\mathbf{H} \approx \frac{I}{2} \frac{a^2}{h^3} \mathbf{e}_z.$$

Die magnetische Feldstärke nimmt entlang der  $z$ -Achse mit  $h^3$  ab.

## Magnetfeld auf der Achse einer kurzen Zylinderspule

Das Magnetfeld einer *kurzen Zylinderspule* entspricht außerhalb der Spule exakt dem Feld eines Dauermagneten mit denselben Abmaßen. Daher kann man der kurzen Zylinderspule ebenso einen Nord- und einen Südpol zuordnen.

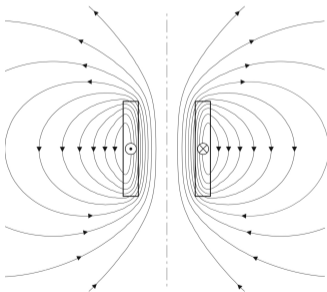


Abb. 82: Feld einer kurzen Zylinderspule [2]

Bestimmung des  $\mathbf{H}$ -Feldes einer kurzen Zylinderspule auf der  $z$ -Achse mit  $W$  der Anzahl aller Windungen. Jede elementare Kreisspule führt den Strom:

$$dI = I \frac{W}{L} dz$$

Mit dem  $\mathbf{H}$ -Feld der elementaren Kreisschleife ergibt sich:

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{2} \frac{W}{L} dz \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z,$$

$$\text{mit } \tan(\beta) = \frac{a}{z} \Rightarrow z = a \cot(\beta)$$

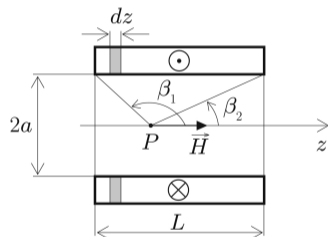


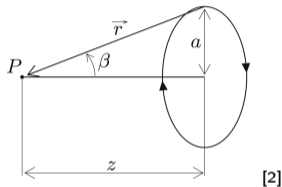
Abb. 83:  $\mathbf{H}$ -Feld Bestimmung einer kurzen Zylinderspule [2]

$$\frac{dz}{d\beta} = -a \frac{1}{\sin^2 \beta} \Rightarrow dz = -a \frac{d\beta}{\sin^2 \beta}$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$d\mathbf{H} = -\frac{I}{2} \frac{W}{L} \frac{a d\beta}{\sin^2 \beta} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z \frac{\sin \beta}{\sin \beta}$$

$$\text{mit } \sin^3 \beta = \frac{a^3}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow d\mathbf{H} = -\frac{I}{2} \frac{W}{L} \sin \beta d\beta \mathbf{e}_z$$



$$\mathbf{H} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\mathbf{H} = -\frac{I}{2} \frac{W}{L} (-\cos \beta) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} \mathbf{e}_z \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{I}{2} \frac{W}{L} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \mathbf{e}_z$$

## Magnetfeld auf der Achse einer langen Zylinderspule

Der Übergang von einer *kurzen* zu einer *langen Zylinderspule* bedeutet hier exemplarisch eine Verdoppelung der Länge und eine Halbierung des Durchmessers der Spule. Das Feld innerhalb der langen Spule zeigt nun Bereiche in denen das  $\mathbf{H}$ -Feld radialsymmetrisch parallel zur  $z$ -Achse verläuft.

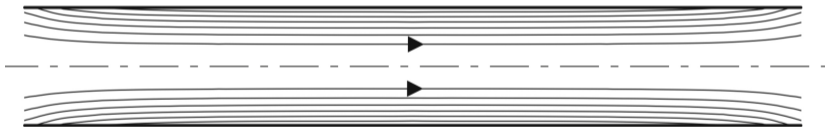


Abb. 84:  $\mathbf{H}$ -Feld im Inneren einer langen Zylinderspule [2]

Ist die Länge der Spule viel größer als der Durchmesser, darf von einem *homogenen* Feld im Spuleninneren ausgegangen werden (und nicht nur auf der Achse).



Für sehr lange Zylinderspulen gilt  $\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0$  und die magnetische Feldstärke wird zu

$$\mathbf{H} = \frac{IW}{L} \mathbf{e}_z$$

und damit in jedem Punkt im Inneren der Zylinderspule konstant (*homogenes Feld*).  
Der Betrag des Feldes am Ende der Spule, also bei  $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$  wird zu

$$H = \frac{IW}{2L} |\cos \beta_1|.$$

Ist  $L \gg a$ , wird  $\beta_1 \approx \pi \Rightarrow \cos \beta_1 \approx -1$  und damit  $|H| \approx \frac{IW}{2L}$ .

Der Betrag der Feldstärke an den Rändern der Spule, entspricht ca. der halben Feldstärke in der Mitte der Spule<sup>j</sup>.

---

<sup>j</sup>Gedankenexperiment: unendlich lange Spule vertikal auftrennen

## 4.3 Das Durchflutungsgesetz

Das Durchflutungsgesetz beschreibt den Zusammenhang zwischen der Stromdichte  $\mathbf{J}$  und der magnetischer Feldstärke  $\mathbf{H}$ .

### Magnetische Durchflutung und Magnetische Spannung

Analog zu der elektrischen Spannung in der Elektrostatik und für stationäre Strömungsfelder wird eine *magnetische Spannung* motiviert, mit

$$V_m = \int_1^2 \mathbf{H} ds$$

Die magnetische Spannung wird in der Einheit  $[V_m] = [H] [l] = \frac{\text{A}}{\text{m}} \text{m} = \text{A}$  angegeben.

Da in einem Magnetfeld alle Feldlinien geschlossen sind, ist es zweckmäßig über einen geschlossenen Weg zu integrieren.

$$V_m = \oint \mathbf{H} ds \stackrel{\mathbf{H} \parallel ds}{=} 2\pi r H$$

mit:  $H = \frac{I}{2\pi r}$

$$\Rightarrow \boxed{V_m = \oint \mathbf{H} ds = I}$$

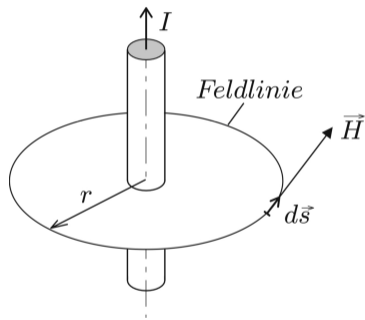


Abb. 85:  $\mathbf{H}$ -Feld für einen Leiter [2]

Verweis auf den Integralsatzes von Stokes, mit der Erkenntnis  $I = \iint_A \mathbf{J} d\mathbf{A}$ .

Im Zusammenhang mit dem Durchflutungsgesetz und der magnetischen Spannung verwendet man den Ausdruck von *verketteten Strömen*, da der Integrationsweg senkrecht zum Ladungstransport zu wählen ist; ist dies erfüllt, ist der Umlauf beliebig zu wählen.

Nur der Umlauf ① entspricht einer Feldlinie, die Umläufe ② und ③ sind beliebig gewählt, liefern aber die selbe magnetische Spannung, da in allen drei Fällen der gesamte Strom  $I$  umschlossen wird.

Daraus lässt sich schlussfolgern, dass Integrationswege zweckmäßig zu wählen sind.

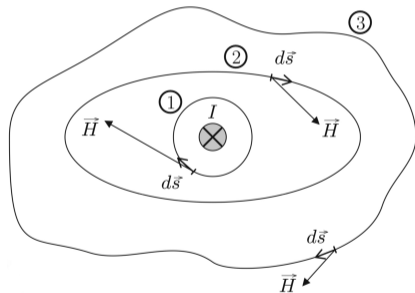


Abb. 86: Unterschiedliche Integrationswege [2]

Werden mehrere Strombahnen verkettet betrachtet, so gilt:

$$V_m = \oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = I_1 + I_2 - I_3 = \Theta$$

Der Strom  $I_4$  wird vom Umlauf nicht eingeschlossen und ist somit nicht *verkettet*. Die Summe der Ströme nennt man die *Durchflutung*  $\Theta$ . Die Zählrichtung des Stromes  $I$  und die Richtung des Umlaufes sind einander im Sinne einer Rechtsschraube verknüpft.

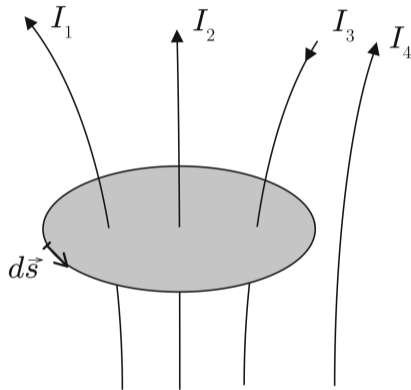


Abb. 87: Betrachtung mehrerer Strombahnen [2]

Ist die Strömung räumlich ausgedehnt, mit  $I = \iint \mathbf{J} d\mathbf{A}$ , ergibt sich

$$\oint_{\text{Fläche}} \mathbf{H} ds = \iint_{\text{Fläche}} \mathbf{J} d\mathbf{A} = \Theta$$

Wird hingegen kein Strompfad verkettet, so gilt:  $\oint \mathbf{H} ds = 0$ . Diese Zusammenhänge werden das *Durchflutungsgesetz* genannt und es verknüpft die Ursache des Magnetfeldes die Stromdichte  $\mathbf{J}$ , und die Wirkung,  $\mathbf{H}$  miteinander.

### Durchflutungsgesetz

„Das Linienintegral über die magnetische Feldstärke  $\mathbf{H}$  entlang jeder beliebigen geschlossenen Linie (Umlauf) ist stets gleich dem gesamten Strom, der durch eine beliebige, von dieser Linie berandete Fläche hindurchtritt.“ [2]

Anbei werden Beispiele für unterschiedliche Durchflutungen gezeigt.

- Für einen verketteten Strom:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = I$$

- Für mehrere verkettete Ströme:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n I_k$$

- Allgemeine Formulierung:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = \iint \mathbf{J} d\mathbf{A} = \Theta$$

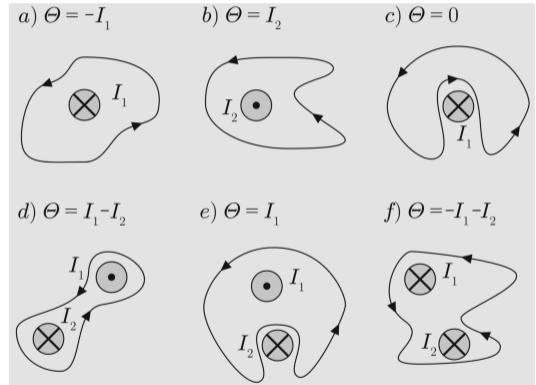


Abb. 88: Verschiedene Durchflutungen [2]

## Anwendung des Durchflutungsgesetzes

Ist die Richtung des  $\mathbf{H}$ -Feld für alle Raumpunkte bekannt, so kann das Skalarprodukt  $\mathbf{H} ds$  ausgerechnet werden und das Durchflutungsgesetz mit einfachen Mitteln angewendet werden. Dies ist nur in wenigen Fällen möglich, bpsw. für sehr lange, grade Leiter, sehr lange Zylinderspule oder Ringspulen. Hier ist auch die Ausbreitung in ferromagnetischen Materialien, d.h. dass das Magnetfeld durch einen ferromagnetischen Körper geführt wird, erlaubt<sup>k</sup>.

Wird das  $\mathbf{H}$ -Feld innerhalb von Leiter betrachtet, muss die bisherige Formel  $H = \frac{I}{2\pi r}$  genauer untersucht werden, da mit  $r \Rightarrow 0$  die magnetische Feldstärke gegen Unendlich strebt. Die Idealisierung, die dies bisher erlaubte, war dass der stromführende Leiter keine axiale Ausdehnung aufwies.

---

<sup>k</sup>Dies ist für die Biot-Savartsche Formel nicht zulässig.



## 1. Anwendung

Bestimmung des  $\mathbf{H}$ -Feldes eines zylindrischen Leiters von  $r = 0$  bis  $r \Rightarrow \infty$ .

- Im Intervall  $r_0 \leq r < \infty$ :

$$H_a = \frac{I}{2\pi r}$$

- Im Inneren des Leiters umschließt ein Umlauf nicht den gesamten Strom, sondern nur einen Stromanteil:

$$I_i(r) = J A_i = \frac{I}{\pi r_0^2} \pi r^2 = I \frac{r^2}{r_0^2}$$

$$\Rightarrow \oint \mathbf{H} d\mathbf{s} = H_i 2\pi r = I \frac{r^2}{r_0^2}$$

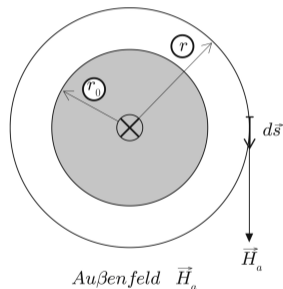


Abb. 89:  $\mathbf{H}$ -Feld Bestimmung eines Leiters mit Radius  $r_0$  [2]

Damit ergibt sich das  $\mathbf{H}$ -Feld im Intervall  $0 \leq r \leq r_0$ :  $H_i = \frac{I r}{2\pi r_0^2}$

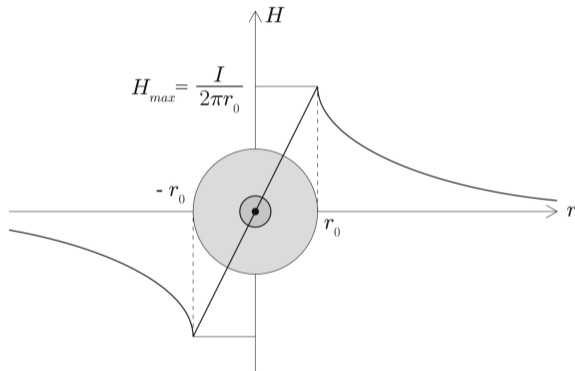


Abb. 90: Radialer  $\mathbf{H}$ -Feld Verlauf im Intervall  $-\infty \leq r \leq \infty$  [2]

## 2. Anwendung

Bestimmung des  $\mathbf{H}$ -Feldes eines *zylindrischen Hohlleiters* (Rohr) von  $r = 0$  bis  $r \Rightarrow \infty$ .

- Innerer, stromfreier Bereich ①: Jeder Umlauf mit  $r \leq r_i$  umschließt keinen Strom:

$$\Rightarrow \oint \mathbf{H}_1 ds = 0$$

- Stromdurchflossener Bereich ②: Jeder Umlauf mit  $r_i \leq r \leq r_a$  umschließt einen Teilstrom:

$$I_i = J A_i = \frac{I}{\pi (r_a^2 - r_i^2)} \pi (r^2 - r_i^2)$$

$$\Rightarrow \oint \mathbf{H}_2 ds = H_2 2\pi r = I \frac{(r^2 - r_i^2)}{(r_a^2 - r_i^2)}$$

- Äußerer, stromfreier Bereich ③: Der Strom  $I$  wird vollständig umschlossen mit  $r \geq r_a$

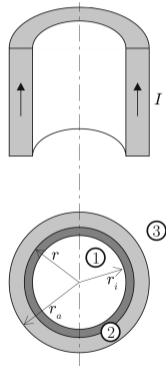


Abb. 91:  $\mathbf{H}$ -Feld eines Hohlleiters [2]

Damit ergeben sich drei  $H$ -Felder im Intervall  $0 \leq r \leq \infty$ :

- Bereich ①

$$H_1 = 0$$

- Bereich ②:

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \frac{(r^2 - r_i^2)}{(r_a^2 - r_i^2)}$$

- Bereich ③:

$$H_3 = \frac{I}{2\pi r}$$

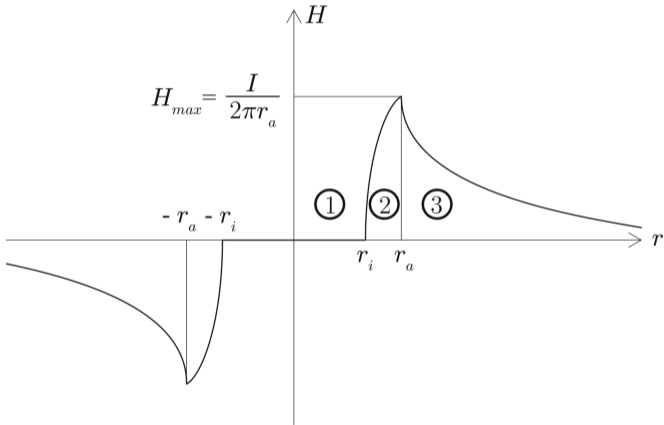


Abb. 92: Radialer  $H$ -Feld Verlauf im Intervall  $-\infty \leq r \leq \infty$  [2]

### 3. Anwendung

Bestimmung des  $\mathbf{H}$ -Feldes einer langen *Zylinderspule (Solenoid)* von  $r = 0$  bis  $r \Rightarrow \infty$ . Dieses Feld wurde bereits mithilfe der Biot-Savartschen Formel bestimmt, es soll nun mit dem Durchflutungsgesetz erneut gezeigt werden. Ist die Länge der Spule viel größer als der Durchmesser, kann  $\mathbf{H}_a$  im Außenbereich (Nahe der Spule<sup>1</sup>) gegenüber  $\mathbf{H}_i$  vernachlässigt werden. Das Umlaufintegral kann aufgeteilt werden:

$$\oint \mathbf{H} ds = \int_{\text{innen}} \mathbf{H} ds + \int_{\text{außen}} \mathbf{H} ds \approx H_i L = \Theta = N I \Rightarrow H_i \approx \frac{N I}{L},$$

mit der Windungszahl  $N$ . Im Inneren kann das Feld in guter Näherung als homogen angenommen werden. Die Approximation liegt hier in der Annahme, dass das Außenfeld gegen Null geht.

---

<sup>1</sup>Feldlinien verlaufen sehr weit weg vom Spulenkörper

## 4. Anwendung

Bestimmung des  $\mathbf{H}$ -Feldes einer *Ringspule (Toroid)* von  $r = 0$  bis  $r \Rightarrow \infty$ .

Es liegen drei Bereiche vor:

- Innerer, stromfreier Bereich ①: Jeder Umlauf mit  $r \leq r_i$  umschließt keinen Strom.
- Innerhalb der Ringspule, Bereich ②: Jeder Umlauf mit  $r_i \leq r \leq r_a$  umschließt den selben Strom:

$$N I = \oint \mathbf{H}_2 ds = H_2 2\pi r \Rightarrow H_2 = \frac{N I}{2\pi r}$$

- Äußerer, stromfreier Bereich ③:

$$\oint \mathbf{H}_3 ds = N I - N I = 0.$$

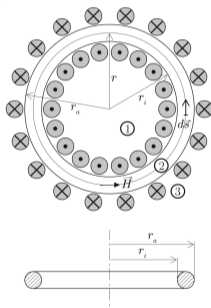


Abb. 93:  $\mathbf{H}$ -Feld einer Ringspule [2]

Mit der Annahme, dass der Leiterquerschnitt der einzelnen Windungen gegen 0 geht, ergeben sich drei  $\mathbf{H}$ -Felder im Intervall  $0 \leq r \leq \infty$ :

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = \frac{NI}{2\pi r}$$

$$H_3 = 0$$

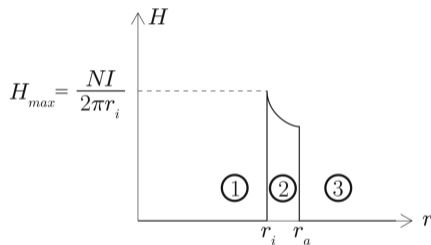


Abb. 94: Radialer  $\mathbf{H}$ -Feld Verlauf im Intervall  $0 \leq r \leq \infty$  [2]

Ein Toroid kann in guter Näherung als streufrei angenommen werden, wenn dieser schmal und dicht bewickelt ist.

## Erweitertes Durchflutungsgesetz

### Das Durchflutungsgesetz

$$\oint \mathbf{H} ds = \iint \mathbf{J} dA$$

ist für die Betrachtung von stationären Zuständen immer gültig. Wird ein nicht geschlossener Stromkreis mit einem Kondensator betrachtet, führt das Durchflutungsgesetz in dieser Form jedoch zu Widersprüchen. Zwischen den isolierten Kondensatorplatten herrscht immer  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$  und dennoch kann in den Leitungsdrähten ein Wechselstrom fließen. Wählt man zwei kreisförmige Umläufe, um diesen Widerspruch zu verdeutlichen, dann gilt einmal

$$\oint \mathbf{H} ds = I \quad \text{und} \quad \oint \mathbf{H} ds = 0.$$



Um diesen Widerspruch aufzulösen wird die *Verschiebungsstromdichte* eingeführt. Sie beschreibt die zeitliche Änderung der elektrischen Flussdichte und wurde von James Clerk Maxwell als notwendiger Zusatzterm definiert.

Die Verschiebungsstromdichte lautet

$$\mathbf{J}_D = \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t}$$

Daraus folgt die 1. *Maxwellsche Gleichung*

$$\oint \mathbf{H} ds = \iint \left( \mathbf{J} + \frac{\delta \mathbf{D}}{\delta t} \right) d\mathbf{A}$$

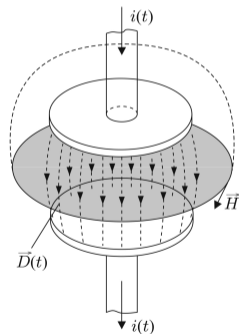


Abb. 95: Verschiebungsstrom im Kondensator [2]

## Erweitertes Durchflutungsgesetz

Ein Kondensator stellt in einem Gleichstromkreis eine Unterbrechung dar und führt zwischen den Platten keinen Strom (Dielektrikum). Variiert aber die elektrische Flussdichte (Verschiebungsflussdichte)  $D$  mit der Zeit, so ist  $\frac{\delta D}{\delta t} \neq 0$  und es fließt ein Verschiebungsstrom, der die Fortsetzung des Leitungsstromes zwischen den Elektroden ist. Dieser Verschiebungsstrom ist bei der Auf- und Entladung des Kondensators, sowie bei Wechselstrom, zu finden. Der Verschiebungsstrom hat das gleiche magnetische Außenfeld wie der Leitungsstrom.

## 4.4 Der magnetische Fluss; Kontinuität des Flusses

Für die vollständige Beschreibung des Magnetfeldes wird die skalare Größe, der magnetische Fluss, eingeführt. Dieser gibt die Gesamtheit der Flussdichte an.

### Der Gaußsche Satz des Magnetfeldes

Analog zum elektrischen Strom  $I$ , der als Flächenintegral der Stromdichte  $\mathbf{J}$  definiert ist, wird der *magnetische Fluss* definiert. Er ist ebenfalls das Flächenintegral der magnetischen Flussdichte über die durchströmte Fläche.

$$\Phi = \iint \mathbf{B} d\mathbf{A}$$

Der magnetische Fluss durch eine Fläche ist am größten, wenn das  $\mathbf{B}$ -Feld parallel zur Flächennormalen verläuft

$$\Phi = \iint B dA \cos \angle (\mathbf{B}, d\mathbf{A}) \stackrel{\mathbf{B} \parallel d\mathbf{A}}{=} \iint B dA.$$

Kann  $B$  als homogen betrachtet werden, so gilt  $\Phi = B A$ . Der magnetische Fluss  $\Phi$  wird in der Einheit  $[\Phi] = [B] [A] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \text{m}^2 = \text{Vs} = \text{Weber} = \text{Wb}$  angegeben.

## Gaußscher Satz des Magnetfeldes

Auch als Kontinuität von  $\Phi$  bezeichnet. Der Gesamtfluss von  $\mathbf{B}$  durch eine beliebig geschlossene Fläche (Hülle) ist immer gleich Null und damit quellenfrei.

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0$$

## 4.5 Das magnetische Verhalten materieller Körper

Unterschiedliche Werkstoffe haben nicht nur auf das elektrische, sondern auch das magnetische Feld unterschiedliche Auswirkungen.

### Das Materialgesetz

Im Vakuum besteht zwischen der magnetischen Flussdichte  $\mathbf{B}$  und der magnetischen Feldstärke  $\mathbf{H}$  (magnetische Erregung) der Zusammenhang:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \text{ mit: } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}.$$

Diese Gleichung kann mit der *Magnetisierung*  $\mathbf{M}$  erweitert werden; diese stellt eine zusätzliche magnetische Erregung dar, hervorgerufen durch Kreisströme in der Materie.

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

Bei dauerhaft magnetisierten Materialien ist  $\mathbf{M}$  immer ungleich Null, bei allen anderen Materialien ist sie eine Funktion der magnetischen Feldstärke<sup>m</sup>:  $\mathbf{M} = f(\mathbf{H})$ . Weisen Feldstärke und Magnetisierung einen einfachen linearen Zusammenhang auf, so ergibt sich eine Proportionalitätskonstante:

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H},$$

mit der magnetischen *Suszeptibilität*  $\chi$ . Daraus folgt das Materialgesetz,

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \chi \mathbf{H}) = \mu_0 \mathbf{H} (1 + \chi) = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

---

<sup>m</sup>bis zu einer maximalen Feldstärke  $\mathbf{H}_{\max}$

## Klassifizierung von Materialien

Je nach Größenordnung der relativen magnetischen Permeabilität  $\mu_r$  unterscheidet man in drei Klassen:

- 1 Diamagnetische Stoffe:  $\mu_r < 1$   
Sehr geringe Schwächung des Magnetfeldes im Vergleich zu Luft.  
Stoffe: bspw. Kupfer, Wismut.
- 2 Paramagnetische Stoffe:  $\mu_r > 1$   
Sehr geringe Verstärkung des Magnetfeldes im Vergleich zu Luft.  
Stoffe: bspw. Aluminium.
- 3 Ferromagnetische Stoffe:  $\mu_r \gg 1$  bis  $10^5$   
Bis zu sehr hohe Verstärkungen des Magnetfeldes im Vergleich zu Luft.  
Stoffe: bspw. Eisen, Kobalt, Nickel.

Eine oft verwendete Klassifizierung teilt deswegen die Stoffe in zwei Kategorien ein:  
*ferromagnetische* und *nicht-ferromagnetische*.

## Magnetisierungskennlinie, Hysteresekurve

Bei den ferromagnetischen Stoffen ist  $\mu_r$  eine Funktion von  $\mathbf{H}$  und die Beziehung  $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$  ist nichtlinear, sie wird experimentell gemessen und als *Magnetisierungskennlinie* dargestellt.

- *Neukurve* für entmagnetisierte Stoffe
- *Sättigung*: Zuwachs an  $\mathbf{B}$ -Feld sehr gering
- *Remanenzflussdichte*  $B_R$ : Verringerung von  $\mathbf{H}$ -Feld führt zu  $B \neq 0$
- *Koerzitivfeldstärke*  $H_C$ :  $\mathbf{B}$ -Feld wird für negatives  $\mathbf{H}$ -Feld zu Null
- *Hart- oder weichmagnetische* Materialien

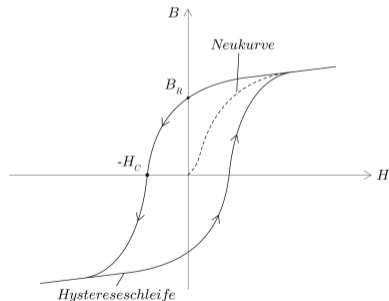


Abb. 96: Magnetisierungskennlinie [2]



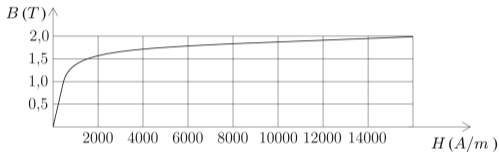


Abb. 97: Magnetisierungskennlinie von St37 [2]

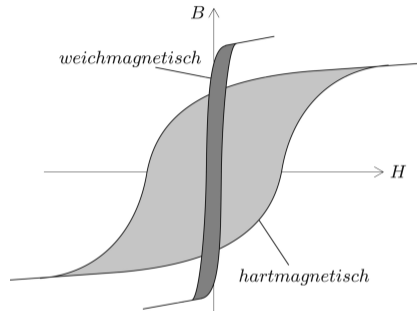


Abb. 98: Magnetisierungskennlinie /  
Hystereseschleife [2]

Die Fläche der Hystereseschleife entspricht den Verlusten, die bei einem Magnetisierungszyklus entstehen – dies hat besondere Relevanz für Wechselströme<sup>n</sup>.

<sup>n</sup>Durchlaufen (teilweise) der Hyteresschleife pro Perioden

## 4.6 Bedingungen an Grenzflächen

- **Stetigkeit der Normalkomponente der magnetischen Flussdichte  $B$**   
Aus der Bedingung  $\oiint B dA = 0$  ergibt sich, analog zum Strömungsfeld, die Stetigkeit der Normalenkomponente der magnetischen Flussdichte  $B$ :

$$B_{n_1} = B_{n_2}$$

- **Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke  $H$**   
Für  $H$  gilt das Durchflutungsgesetz  $\oint H ds = \Theta$ , damit ergibt sich, analog zur elektrischen Feldstärke, die Stetigkeit der Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke  $H$ , wenn in der Grenzschicht kein Strom fließt:

$$H_{t_1} = H_{t_2}$$

## Brechungsgesetz der Feldlinien an Grenzflächen

Analog zur Elektrostatik kann man ein Brechungsgesetz für die magnetischen Feldlinien festlegen, vgl. Abb. 100.

$$\tan \alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}} = \frac{\mu_1 H_{t1}}{B_{n1}}$$

$$\tan \alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}} = \frac{\mu_2 H_{t2}}{B_{n2}}$$

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1 H_{t1}}{B_{n1}} \frac{B_{n2}}{\mu_2 H_{t2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}}$$

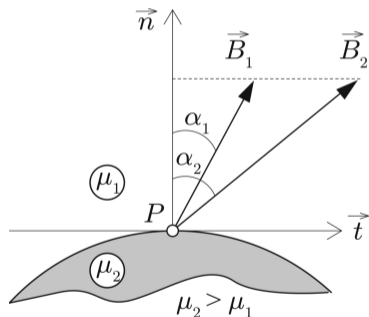


Abb. 99: Normalenkomponente von  $B$  [2]

## Verhalten von $B$ an der Grenze zwischen Luft und Eisen

Bei der Berechnung von Magnetkreisen müssen Annahmen über den Verlauf der Feldlinien getroffen werden. In Kreisen mit ferromagnetischen Anteilen ( $\mu_r \gg 1$ ) kann dieser Verlauf in guter Näherung angenommen werden.

Das  $B$ -Feld steht in der Luft nahezu *senkrecht* auf Eisenflächen

$$\tan \alpha_2 = \tan \alpha_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \approx 0$$

$$\Rightarrow \alpha_2 \approx 0, \text{ da } \frac{\mu_1}{\mu_2} \approx 0.$$

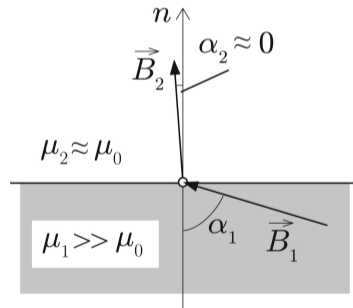


Abb. 100: Übergang Luft Eisen [2]

## 4.7 Der magnetische Kreis

Magnetische Kreise sind Anordnungen aus Magnetfeldquellen (Dauermagnete, Spulen) und ferromagnetischen Teilen, die den Magnetfluss auf einem vordefinierten Weg führen; der Weg ist entsprechend den technischen Anforderungen gewählt.

Mögliche Anwendungen sind:

- Erzeugung von Kräften oder Drehmomenten.
- Wandlung elektromagnetischer Energie in mechanische Energie.
- Bildgebende Diagnostik, bspw. Dauermagnet-Tomograph.
- Magnetkreise werden i. d. R. ungesättigt betrieben.
- Unterscheidung von:
  - ▶ unverzweigt, mit und ohne Luftspalt
  - ▶ verzweigt, mit und ohne Luftspalt
- Klassische technische Anwendungen: Proportional-Elektromagnet, Zweipoliger Universal-Motor, Transformator.

## Berechnungsmethoden für lineare Magnetkreise

Es werden lineare (ungesättigte) Magnetkreise mit  $\mu = \text{konstant}$  betrachtet, vgl. Abb. 97. Damit gehen die folgenden Näherungen einher:

- Kurzer Luftspalt in Relation zur Breite  
 $\Rightarrow$  kein Streufeld.
- Das  $B$ -Feld ist in Eisen und im Luftspalt gleich groß.
- Homogenes Magnetfeld in jedem Querschnitt; somit kann die *mittlere* Länge der Feldlinien betrachtet werden.

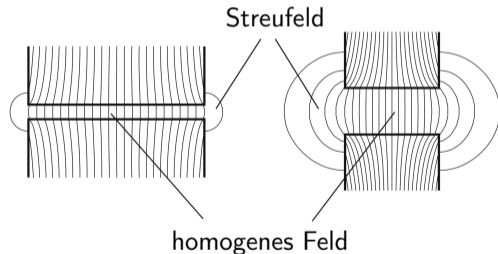


Abb. 101: Nutz- und Streufeld an Luftspalten [2]

## Berechnung von unverzweigten Kreisen

Soll der magnetische Fluss  $\Phi$  in unverzweigten Kreisen mit und ohne Luftspalt berechnet werden, so können drei Berechnungswege angewendet werden. Hierfür muss die Durchflutung  $\Theta = NI$  bekannt sein. Ist die magnetische Durchflutung gesucht, so kann bei gegebenem magnetischen Fluss analog vorgegangen werden.

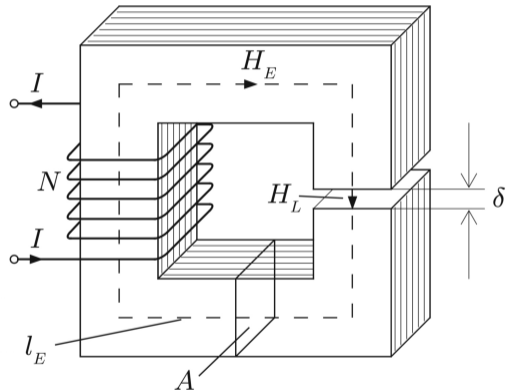


Abb. 102: Unverzweigter Magnetkreis mit Luftspalt [2]

## 1. Berechnungsweg: „Drei Gesetze der stationären Magnetfelder“

- Alle Feldlinien folgen der rechteckigen Eisenkontur, wobei die *äußeren* länger als die *inneren* sind. Die *mittlere Weglänge* des Eisen  $l_E$  wird als Näherung verwendet.
- Anwendung des Durchflutungsgesetzes auf dem Umlauf  $l_E$ , mit  $\delta$  Länge des Luftspalts:

$$\oint \mathbf{H} ds = \Theta = N I = \int_{\mathbf{H} \parallel ds} H_E l_E + H_L \delta.$$

- Mit der Annahme, dass kein Streufeld existiert, muss sich das  $\mathbf{H}$ -Feld in Eisen und Luft unterscheiden, daher führt das Durchflutungsgesetz auf zwei magnetische Spannungen.



- Die Kontinuität von  $\Phi$ , bei vernachlässigter Streuung, besagt<sup>o</sup>:

$$\oiint \mathbf{B} d\mathbf{A} = 0, \text{ mit: } \Phi_E = \Phi_L \Rightarrow B_E A = B_L A \Rightarrow B_E = B_L = B.$$

- Mit dem Materialgesetz,  $B_E = \mu_E H_E$  und  $B_L = \mu_0 H_L$ , ergibt sich:

$$\frac{B}{\mu_E} l_E + \frac{B}{\mu_0} \delta = N I.$$

- Mit  $\Phi = B A$  und der Erweiterung um  $A$  ergibt sich:

$$\Phi \left( \frac{l_E}{\mu_E A} + \frac{\delta}{\mu_0 A} \right) = N I \Leftrightarrow \Phi = \frac{N I}{\frac{l_E}{\mu_E A} + \frac{\delta}{\mu_0 A}}.$$

- Analog zu den elektrischen Strömungsfeldern wird ein *magnetischer Widerstand* (*Reluktanz*) definiert.

$$\boxed{R_m = \frac{l}{\mu A}} \Rightarrow \Phi (R_{m_E} + R_{m_L}) = N I.$$

- Damit kann die magnetische Spannung,
  - ▶ im Eisen, mit  $V_{m_E} = H_E l_E = \Phi R_{m_E}$  beschrieben werden.
  - ▶ im Luftspalt, mit  $V_{m_L} = H_L \delta = \Phi R_{m_L}$  beschrieben werden.
- Definition des *Ohmschen Gesetz des magnetischen Kreises*  $\boxed{V_m = \Phi R_m}$ .
- Die allgemeine Definition des magnetischen Widerstandes lautet:

$$R_m = \frac{V_m}{\Phi} = \frac{\int_1^2 \mathbf{H} ds}{\iint \mathbf{B} dA} \Big|_{\mu=\text{const.}}$$

- Der magnetische Widerstand wird in der Einheit  $[R_m] = \frac{\text{A}}{\text{Vs}} = \frac{1}{\text{Henry}}$  angegeben.
- Der magnetische Leitwert mit  $\Lambda = \frac{1}{R_m}$ .

## 2. Berechnungsweg: „Numerische Feldberechnung“

Mit numerischen Methoden lassen sich magnetische Kreise exakt berechnen.

---

°Stetigkeit der Normalenkomponente von  $B$

### 3. Berechnungsweg: „Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises“

Im Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises entsprechen die magnetischen Widerstände den Elektrischen,  $\Phi$  entspricht  $I$  und  $V_m$  entspricht  $U$ .

- Rechtsschraubenregel für  $I$  und  $\mathbf{H}$
- Spannungsabfall:  

$$V_m = \int_1^2 \mathbf{H} ds$$
- Magnetische Quellspannung:  

$$\Theta = \oint \mathbf{H} ds$$
- Maschengleichung:  

$$\Theta = \Phi (R_{m_e} + R_{m_L})$$

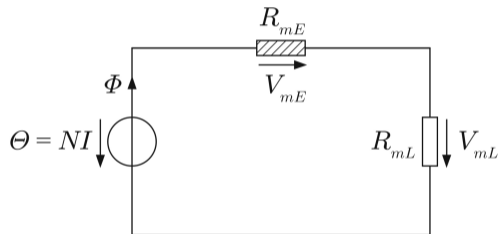


Abb. 103: Ersatzschaltbild [2]

Konvention: Der magnetische Widerstand des Eisen wird schraffiert oder dunkel eingefärbt dargestellt.

Daraus ergibt sich die folgende Lösungsstrategie:

- Aufteilung des Kreises in Abschnitte mit konstantem Querschnitt  $A$  und konstanter Permeabilität  $\mu$ . Somit sind  $\mathbf{H}$ -Feld und  $\mathbf{B}$ -Feld abschnittsweise konstant.
- Berechnung der magnetischen Widerstände für die mittlere Eisenlänge,  $R_m = \frac{l}{\mu A}$ .
- Aufstellung der Maschengleichung  $\Theta = \Phi \sum R_m$ .
- Bei bekannter Durchflutung ergibt sich der Fluss  $\Phi$  und damit  $H$  und  $B$ .
- Bei bekanntem Fluss, ergibt sich die Durchflutung  $\Theta$ .

## Analogie zwischen Stromkreis und Magnetkreis

Elektrischer Kreise	$\Rightarrow$ Magnetischer Kreis
Elektrischer Strom $I$	$\Rightarrow$ Magnetischer Fluss $\Phi$
Elektrische Spannung $U$	$\Rightarrow$ Magnetische Spannung $V_m$
Elektrischer Widerstand $R$	$\Rightarrow$ Magnetischer Widerstand $R_m$
Knotensatz: $\sum I = 0$	$\Rightarrow \sum \Phi = 0$
Maschensatz: $\sum U = \sum U_q$	$\Rightarrow \sum V_m = \sum \Theta$

*Anmerkung:* Das Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises wird nicht im gleichen Umfang wie das Ersatzschaltbild des elektrischen Kreises genutzt. Die Gründe hierfür sind: es gibt keine magnetischen Isolatoren, die Quellen (Spulen, Dauermagnete) sind räumlich nicht konzentriert, Schätzung der mittleren Eisenlänge ist ungenau und alle ferromagnetischen Werkstoffe sind nichtlinear.

## Kräfte auf hochpermeable Eisenflächen

Auf die Grenzfläche zwischen Luft und Eisen mit sehr großer Permeabilität  $\mu$  wirkt, bei Existenz eines Magnetfeldes, eine Magnetkraft  $\mathbf{F}$ .

- Die Magnetkraft  $\mathbf{F}$  steht senkrecht auf der Eisenfläche und ist nach außen gerichtet.
- Gilt  $\mu \approx \infty$ , so ist der Betrag der Kraft gegebene mit

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{2\mu_0} B^2 A.$$

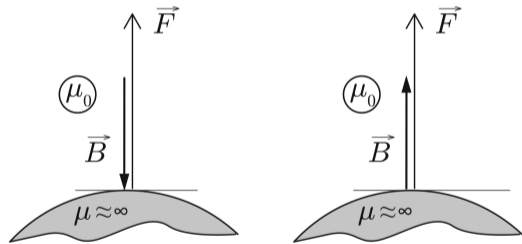


Abb. 104: Kraftwirkung [2]

## Unterschiede Dauermagnet und bestromte Spule

Wird ein Magnetfeld durch einen Dauermagneten oder einen konstanten Gleichstrom verursacht, spricht man von *stationären* Magnetfeldern. Es können auch magnetische Kreise betrachtet werden, die sowohl Dauermagnete als auch bestromte Spule enthalten. Unterschiede können mit den bisherigen Betrachtungen herausgestellt werden.

- Mit stromdurchflossenen Spulen und ferromagnetischen Materialien können im stationären Magnetfeld nur anziehende Kräfte erzeugt werden.
- Mit Dauermagneten können auch abstoßende Kräfte erzielt werden
- Ferromagnetische Körper können im stationären Magnetfeld nur angezogen werden.
- Kraftwirkung bestromter Spulen kann gesteuert werden
- Kraftwirkung von Dauermagneten benötigen eine größere Gegenkraft oder eine Entmagnetisierung.



## 5 Das Quasistationäre Magnetfelder

Für *quasistationäre* Magnetfelder verändert sich die felderzeugende Größe so langsam, dass keine Antennenstrahlung erfolgt. Die Magnetfelder sind daher ortsgebunden. Grundvoraussetzung dafür ist, dass die Leitungslängen viel kleiner sein müssen als ein Viertel der Wellenlänge  $\lambda$ , mit

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{f} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}}$$

und der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v$ , der Frequenz  $f$  und  $c$  die Lichtgeschwindigkeit.

### Beispiel Laborleitung

Es sei eine Laborleitung mit  $l = 1$  m gegeben. Es wird gefordert, dass  $l = \frac{\lambda}{100}$ , da die Drahtlänge viel kleiner als sein muss als  $\lambda$ . Aus  $\epsilon_r = \mu_r \approx 1$  und  $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  folgt die Grenzfrequenz:  $f_{\text{grenz}} \approx 3$  MHz.

## 5.1 Induktionswirkung und Induktionsgesetz

Wird ein zylindrischer Dauermagnet mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  in der Nähe einer kreisförmigen Schleife bewegt, so gibt es vier mögliche Versuche<sup>a</sup>:

- ❶ Der Nordpol wird zur Schleife hin bewegt.
- ❷ Der Nordpol wird von der Schleife weg bewegt.
- ❸ Der Südpol wird zur Schleife hin bewegt.
- ❹ Der Südpol wird von der Schleife weg bewegt.

<sup>a</sup>Experimente von Faraday

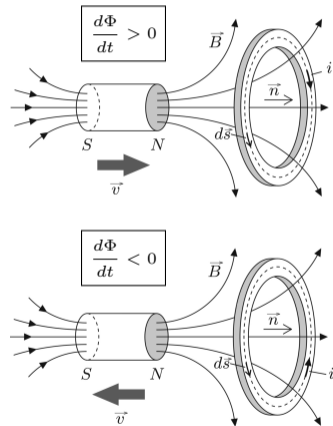


Abb. 105: Versuche zum Induktionsgesetz [2]

Durch relative Bewegungen des Dauermagneten oder der Schleife werden Ströme in der Schleife *induziert*, die damit verbundene Erscheinung nennt man *Induktion*. Bei dieser relativen Bewegung ändert sich der magnetische Fluss  $\Phi$ , den der Dauermagnet durch die von der Leiterschleife begrenzte Fläche hindurch schickt. Der magnetische Fluss ist gegeben, mit:

$$\Phi = \iint \mathbf{B} d\mathbf{A}.$$

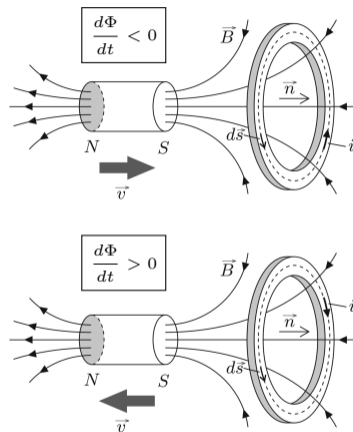


Abb. 106: Versuche zum Induktionsgesetz [2]

Ändert sich der Fluss durch die Fläche  $A$  über die Zeit, können die vier Fälle diskutiert werden:

- 1 Der magnetische Fluss  $\Phi$  durch die Schleife wird größer und ist positiv, da das  $\mathbf{B}$ -Feld und die Flächennormale  $\mathbf{n}$  gleichgerichtet sind, es gilt  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ .
- 2 Die Anzahl der Feldlinien durch die Fläche  $A$  verringert sich. Der magnetische Fluss  $\Phi$  ist weiterhin positiv, da das  $\mathbf{B}$ -Feld und die Flächennormale  $\mathbf{n}$  gleichgerichtet sind, es gilt  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ .
- 3 Das  $\mathbf{B}$ -Feld und die Flächennormale  $\mathbf{n}$  sind entgegen gerichtet und der magnetische Fluss  $\Phi$  nimmt ab (Betrag nimmt zu), es gilt  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ .
- 4 Wird der Südpol entfernt, so nimmt der Fluss zu und es gilt  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ .

Betrachtet man die Richtung der vier induzierten Ströme, so stellt man fest, dass dort, wo  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$  ist, der Strom im positiven Umlaufsinn fließt, wo  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$  ist, im negativen Sinn.

## Lenzsche Regel

Jeder der vier induzierte Ströme erzeugt wieder ein Magnetfeld, welches zusammen mit der Bewegung des Dauermagneten unterschiedlich wirkt.

- ① Nordpol auf induzierten Nordpol:

$$\frac{d\Phi}{dt} > 0$$

- ② Nordpol auf induzierten Südpol:  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$

- ③ Südpol auf induzierten Südpol:  $\frac{d\Phi}{dt} < 0$

- ④ Südpol auf induzierten Nordpol:  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$

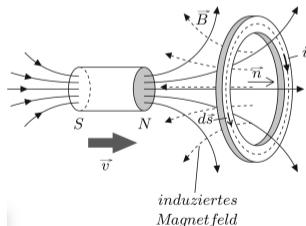


Abb. 107: Nordpol auf induzierten Nordpol [2]

## Lenzsche Regel

Die induzierten Ströme wirken ihre Ursache entgegen, wobei die Ursache die Änderung des Flusses ist. Das bedeutet, dass nicht der induzierende Fluss gemindert werden soll, sondern seine Änderung soll geschwächt werden.

Anmerkung zur Energieerhaltung:

Wird ein Magnet mit konstanter Geschwindigkeit, also ohne *vermeintlich* Arbeit zu leisten, zu der Schleife hin bewegt, entsteht ein induzierter Strom, der nach Joule Wärme erzeugt. Diesem induzierten Strom folgt ein Magnetfeld, so dass der Magnet gegen diese abstoßende Kraft bewegt werden muss. Um ihn mit konstanter Geschwindigkeit zu bewegen muss eine Arbeit geleistet werden, die als Energie des induzierten Stromes erscheint.

## Kraft auf bewegte Ladungen im Magnetfeld

Elektrische Ladungen erfahren nicht nur in elektrostatischen Feldern (vgl. Coulomb-Kraft S. 33) eine ablenkende Kraftwirkung, sondern auch in Magnetfeldern, vgl. auch S. 132.

### Lorentz-Kraft

Wird eine Ladung  $Q$  mit der Geschwindigkeit  $v$  unter dem Winkel  $\alpha$  zu den Feldlinien eines  $B$ -Feld bewegt, so wirkt die Kraft:

$$\vec{F}_m = Q (\vec{v} \times \vec{B}) = Q v B \sin \alpha$$

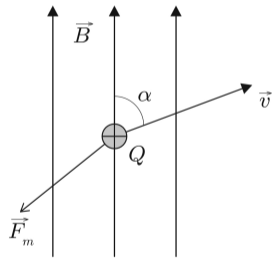


Abb. 108: Lorentz-Kraft [2]

## Das Induktionsgesetz in einfacher Form: Die Bewegungsinduktion

Induktionserscheinungen können immer dann beobachtet werden, wenn ein magnetischer Fluss durch eine Fläche zeitliche Änderungen erfährt. Man unterteilt diese in zwei Klassen:

- *Bewegungsinduktion*  
Elektrische Leiter werden in einem konstantem Magnetfeld bewegt.
- *Ruheinduktion*  
Ein ruhender elektrischer Leiter befindet sich in einem sich zeitlich ändernden Magnetfeld.

Es können auch beide Effekte zeitgleich auftreten, die sich dann addieren.



Wird ein elektrischer Leiter in einem homogenen  $\mathbf{B}$ -Feld mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, so wirkt auf die frei beweglichen Elektronen im Leiter die Lorentz-Kraft, mit

$$\mathbf{F}_m = Q (\mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Mit den negativen Elementarladungen des Leiters werden die Elektronen an das vordere Ende des Stabes bewegt. Aus der Ladungstrennung ergibt sich ein  $\mathbf{E}$ -Feld, eine Spannung und ein Potentialunterschied.

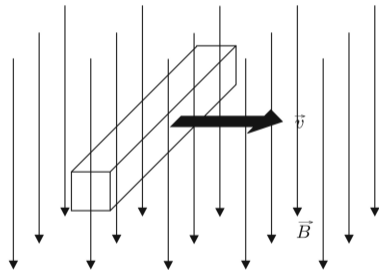


Abb. 109: Bewegungsinduktion [2]

Das  $\mathbf{E}$ -Feld ist nach vorne gerichtet und die wirkende Coulomb Kraft  $\mathbf{F}_e = Q \mathbf{E}$  auf die Elektronen lautet

$$\mathbf{F}_e = e \mathbf{E}.$$

Diese ist, aufgrund der negativen Elementarladung, der Lorentz-Kraft entgegen wirkend. Die Ladungstrennung erfolgt bis ein Gleichgewicht erreicht ist, mit

$$\mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = e \mathbf{E} + e (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0.$$

Daraus lässt sich folgern, dass das Vektorprodukt  $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$  auch als elektrische Feldstärke verstanden werden kann und es wird *induzierte Feldstärke* genannt; diese wirkt ihrer

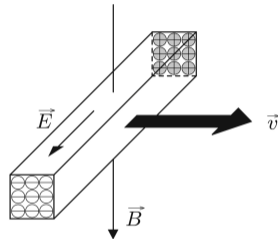


Abb. 110: Ladungstrennung durch  $\mathbf{F}_e$  [2]

Ursache, der magnetischen Feldstärke, entgegen.

$$\boxed{\mathbf{E}_i = (\mathbf{v} \times \mathbf{B})}, \text{ mit der Einheit: } [(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] = \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Die *induzierte Spannung* kann mit

$$u_i = \int_1^2 \mathbf{E}_i ds = \int_1^2 (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) ds \underset{(\mathbf{v} \perp \mathbf{B}) \parallel ds}{=} v B l$$

angegeben werden, wobei  $l$  die Länge des Leiters ist. Augenblickswerte für Strom und Spannung werden anstatt einer Funktion von  $t$  ( $U(t)$  oder  $I(t)$ ) als  $u$  und  $i$  gekennzeichnet.

Dieser Leiter ist nun Teil eines geschlossenen Kreises, in dem ein Strom fließen kann. Der Leiter wird auf einer elektrisch leitenden Schiene mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Bedingt durch die induzierte Spannung kann der Strom  $i$  im geschl. Kreis, nach  $u = Ri$  fließen. Die von  $\mathbf{B}$  durchströmte Fläche ist eine Funktion der Zeit, mit  $A = A(t)$ ,

$$u_i = v B l = \frac{dx}{dt} B l = B \frac{dA(t)}{dt}.$$

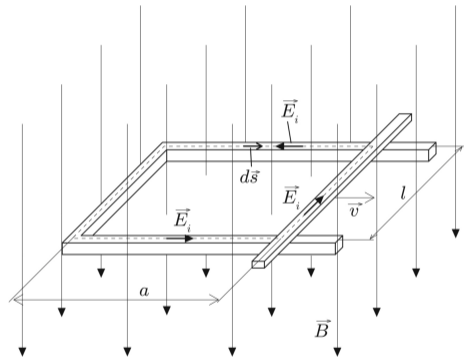


Abb. 111: Bewegungsinduktion im geschl. Kreis [2]

Die Richtung der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  auf dem Flächenelement  $d\mathbf{A}$  ist mit dem Wegelement  $d\mathbf{s}$  im Sinne einer Rechtsschraube verknüpft.

Weisen  $\mathbf{B}$  und das Flächenelement  $d\mathbf{A}$  in die gleiche Richtung, ergibt sich nach

$$\Phi = \iint \mathbf{B} d\mathbf{A},$$

ein positiver Fluss. Mit der Annahme des Verbraucher-Zählpfeilsystems ergibt sich ein Strom  $i$  der  $ds$  entgegen gesetzt ist. Somit ergibt sich ein Strom im negativem Umlaufsinn bei wachsendem Magnetfluss ( $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ). Dies folgt allen Experimenten nach Faraday.

### Induktionsgesetz in einfacher Form

Die induzierte Spannung ist gleich der negativen Änderung des magnetischen Flusses,

$$u_i = - \frac{d\Phi(t)}{dt}$$

## Das Induktionsgesetz in einfacher Form: Die Ruheinduktion

Ein ruhender Leiter umschließt ein sich zeitlich veränderndes Magnetfeld,

$$\Phi(t) = B(t) A \Rightarrow u_i = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -A \frac{dB(t)}{dt}.$$

Allgemein kann der *verkettete Fluss* mit  $N$  Windungen definiert werden:

$$\boxed{\Psi = N \Phi} \Rightarrow \boxed{u_i = -N \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\frac{d\Psi(t)}{dt}}$$

Die Richtung der induzierten Spannung  $u_i$  ergibt sich auch hier aus der Richtung des induzierten Stromes  $i$ , dessen Eigenfeld muss, nach der Regel von Lenz, der Ursache entgegen wirken.

## Das Induktionsgesetz in allgemeiner Formulierung

Liegt ein sich änderndes Magnetfeld vor, so wird in den Umlauf *beliebiger* Flächen, eine elektrische Spannung induziert.

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} \Rightarrow \oint \mathbf{E}_i d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint \mathbf{B} d\mathbf{A}.$$

Hier sind erneut  $d\mathbf{s}$  und  $d\mathbf{A}$  nach der Rechtsschraubenregel verknüpft. Die allgemeine Formulierung des Induktionsgesetz entspricht der *2. Maxwell Gleichung*.

Aus ihr ergeben sich weitreichende Konsequenzen:

- Der geschlossene Umlauf erfordert keinen Leiter; das Induktionsgesetz gilt für alle geschlossenen Umläufe, auch durch Luft und Isolierstoffe  $\Rightarrow$  dies liefert die Grundlage für instationäre oder schnell veränderliche elektromagnetische Felder mit Antennenstrahlung.

- Jedes zeitlich veränderliches  $\mathbf{B}$ -Feld hat ein  $\mathbf{E}$ -Feld zur Folge.
- In der Elektrostatik ist  $\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = 0$  und somit ist die elektrische Spannung wegunabhängig.
- Die induzierte Spannung  $u_i = \oint \mathbf{E} d\mathbf{s} \neq 0$  ist wegunabhängig  $\Rightarrow$  es werden je nach Wahl des Umlaufs mehr oder weniger Feldlinien umfasst.

Das Induktionsgesetz umfasst Bewegungs- und Ruheinduktion

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{s} = \underbrace{\oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) d\mathbf{s}}_{\text{Bewegungsinduktion}} - \underbrace{\iint \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{A}}_{\text{Ruheinduktion}}$$



Im weiteren Verlauf werden die folgenden Anwendungen diskutiert

- Anwendung 1: Konstante Geschwindigkeit, zeitlich konstantes Magnetfeld
- Anwendung 2: Unbewegter Stab, zeitlich variables Magnetfeld
- Anwendung 3: Konstante Geschwindigkeit, zeitlich veränderliches Magnetfeld
- Anwendung 4: Variable Geschwindigkeit, konstantes Magnetfeld
- Anwendung 5: Unbewegter Stab, Feld zeitlich variabel und inhomogen

## Induktionsgesetz, Anwendung 1: Konstante Geschwindigkeit, zeitlich konstantes Magnetfeld

- Bewegung nach rechts: Vergrößerung der Fläche der Leiterschleife
- $u_i = \oint (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s}$
- Umlaufsinn im Uhrzeigersinn
- $\mathbf{E}_i = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  entgegen  $d\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{E}_i \parallel d\mathbf{s}$
- $u_i = - \oint \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{s} = - \oint v B ds$
- Integrand ist nur auf Länge  $l$  ungleich 0, da hier  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  gilt.

$$\Rightarrow \boxed{u_i = -v B l}$$

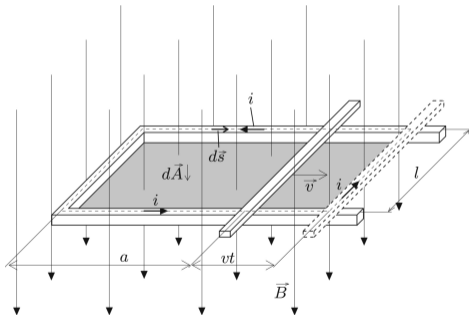


Abb. 112: Bewegungsinduktion mit konstanter  $v$  [2]

Im geschlossenen Stromkreis fließt ein Strom  $i$  mit der gleichen Zählrichtung wie  $u_i$ , also entgegen dem gewählten Umlaufsinn.

### Überprüfung mit Lenzscher Regel

Der induzierte Strom erzeugt ein *sekundäres* Magnetfeld, welches dem *primären* Magnetfeld entgegenwirkt und den ursprünglichen Magnetfluss verringert. Die Ursache des induzierten Stromes war die Vergrößerung der durchströmten Fläche, was analog zu einer Vergrößerung des Flusses ist. Somit ist die resultierende Stromzählrichtung korrekt.

## Induktionsgesetz, Anwendung 2: Unbewegter Stab, zeitlich variables Magnetfeld

- Konstante Fläche der Leiterschleife
- $B(t) = B_{\max} \sin(\omega t)$

$$u_i = - \iint \frac{dB}{dt} dA = - \frac{dB}{dt} A = - \frac{dB}{dt} a l$$

$$\Rightarrow u_i = -\omega B_{\max} a l \cos(\omega t)$$

- Die induzierte Spannung skaliert linear mit der Frequenz  $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ).

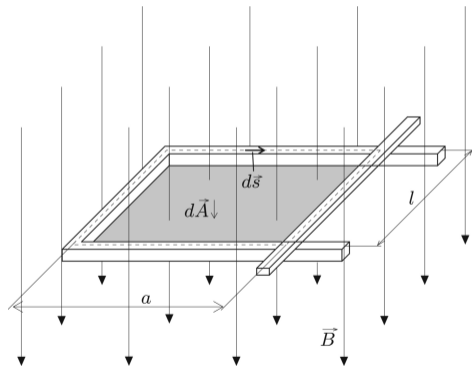


Abb. 113: Ruheinduktion [2]

## Induktionsgesetz, Anwendung 3: Konstante Geschwindigkeit, zeitlich veränderliches Magnetfeld

Dieser Fall stellt die Überlagerung von Bewegungs- und Ruheinduktion dar.

- $B(t) = B_{\max} \sin(\omega t)$
- Die Fläche ist eine Funktion der Zeit:  $A(t) = l (a + v t)$

$$u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \iint \mathbf{B} d\mathbf{A} \right) = -\frac{d}{dt} \left( B_{\max} \sin(\omega t) l (a + v t) \right)$$

$$\Rightarrow u_i = -B_{\max} l \left[ \omega (a + v t) \cos(\omega t) + v \sin(\omega t) \right]$$

- Die Lösung kann auch über die allgemeine Formulierung des Induktionsgesetzes, vgl. S. 220, mit den ersten beiden betrachteten Fällen bestimmt werden.

## Induktionsgesetz, Anwendung 4: Variable Geschwindigkeit, konstantes Magnetfeld

- $v(t) = v_0 \sin(\omega t)$ ,  $B = const.$
- Zwei Teilflächen sind zu betrachten:  
 $al$  und  $xl$ .
- Die Strecke  $x$  ergibt sich aus  $v(t)$ :  

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow dx = v(t) dt$$

$$x = \int v_0 \sin(\omega t) dt = -v_0 \frac{1}{\omega} \cos(\omega t)$$

$$\Phi = Bl \left( a - v_0 \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \right)$$
- Der Stab pendelt von links nach rechts.
- $u_i = - \frac{d\Phi}{v \perp B dt} = -v_0 l B \sin(\omega t)$

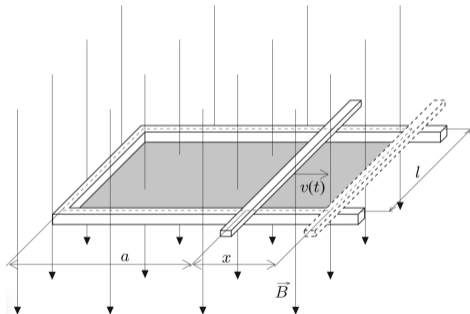


Abb. 114: Bewegungsinduktion mit variabler  $v$  [2]

## Induktionsgesetz, Anwendung 5: Unbewegter Stab, Feld zeitlich variabel und inhomogen

- $B(t) = B_{\max} \frac{x}{a} \sin(\omega t)$

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint \mathbf{B} d\mathbf{A} = B_{\max} \frac{1}{a} \sin(\omega t) \int_0^a x l dx \\ &= B_{\max} \frac{1}{a} l \frac{a^2}{2} \sin(\omega t) = B_{\max} \frac{al}{2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_{\max} \omega \frac{al}{2} \cos(\omega t)$$

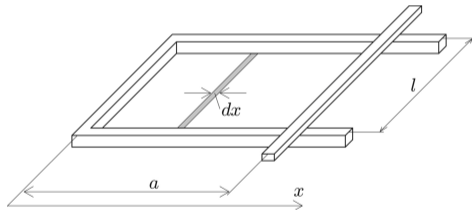


Abb. 115: Ruheinduktion mit inhomogenem, zeitlich veränderlichem Magnetfeld [2]

## Wirbelströme bei Wechselstrom

Die Gesetzmäßigkeiten der Induktion treten auch in Form unerwünschter Effekte in Erscheinung. Da ferromagnetische Werkstoffe auch elektrische Leiter sind<sup>a</sup>, führt ein zeitlich variabler Magnetfluss zu einer induzierten Spannung im Eisen und folglich zu einem Stromfluss – so genannte *Ringströme* oder *Wirbelströme*. Die hervorgerufenen Wärmeverluste reduzieren den Wirkungsgrad merklich. Ein Aufbau aus gegeneinander isolierte Eisenblechen reduziert diesen Effekt; man spricht von einem *Eisenfüllfaktor*.

<sup>a</sup>Leitfähigkeit Eisen:  $10 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$ , Kupfer:  $56 \cdot 10^6 \frac{S}{m}$

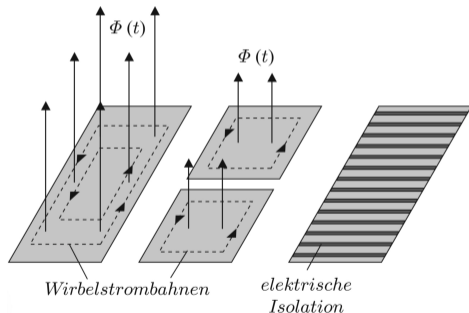


Abb. 116: Unterdrückung von Wirbelströmen [2]



## 5.2 Induktivitäten

In Analogie zu dem bereits eingeführten Kondensator wird das Bauteil *Induktivität* motiviert und eingeführt.

### Selbstinduktion und Induktivität

Die Lenzsche Regel besagt, dass eine geschlossene Schleife, die ein sich zeitlich veränderlichen Magnetfluss umfasst, sich der Änderung des Flusses widersetzt. Die in dieser Schleife induzierte Spannung hat einen elektrischen Strom und folglich einen sekundären Magnetfluss zur Folge, der dem Primärfluss entgegen wirkt. Dieser Vorgang wird *Selbstinduktion* genannt.

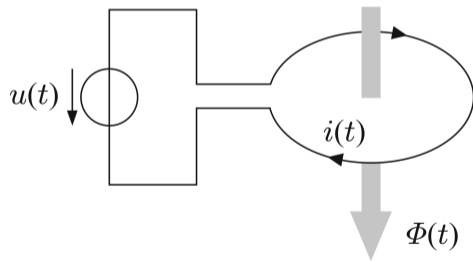


Abb. 117: Prinzip der Selbstinduktion [2]

Betrachtet sei eine geschlossene Leiterschleife, die an eine Spannungsquelle  $u(t)$  angeschlossen ist und die induzierte Spannung  $u_i(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$  zur Folge hat. Nach dem Induktionsgesetz stellt sich ein Strom ein, so dass die Summe der Spannungen auf dem geschlossenen Umlauf gleich  $-\frac{d\Phi}{dt}$  ist:

$$-u(t) + R i(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (\text{für } N = 1),$$

mit  $\Phi$  dem Eigenfluss der Spule, der proportional zum Strom  $i$  ist ( $\Phi \propto i$ ). Der Proportionalitätsfaktor wird *Selbstinduktivität der Spule*  $L$  genannt.<sup>P</sup>

$$\Phi = L i \Leftrightarrow L = \frac{\Phi}{i}$$

---

<sup>P</sup>wenn  $\mu = const.$

Vergleichbar mit der Kapazität ( $C = \frac{Q}{U}$ ) ist auch die Selbstinduktivität unabhängig von  $\Phi$  und  $i(t)$ . Die Einheit der Selbstinduktivität ist:

$$[L] = \frac{[\Phi]}{[i]} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \text{Henry.}$$

Mit  $\Phi = L i(t)$  kann geschrieben werden:

$$-u + R i(t) + \underbrace{L \frac{di(t)}{dt}}_{u_l(t)} = 0.$$

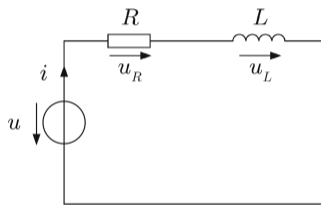


Abb. 118: Ersatzschaltbild Selbstinduktion [2]

Diese Gleichung entspricht dem Ersatzschaltbild, in dem die Selbstinduktivität als Schaltelement aufgefasst werden kann.

Besteht die Schleife aus  $N$  Windungen, ist der verkettete Fluss  $\Psi = N \Phi$  zu verwenden

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{N \Phi}{i} \geq 0.$$

Unter Verwendung des Ohmschen Gesetzes des magnetischen Kreises, mit

$$\Phi R_m = \Theta; \quad \Phi = \Lambda \Theta,$$

ergibt sich

$$N \Phi = N \Lambda \Theta = N N i \Lambda = N^2 \Lambda i \Rightarrow L = \frac{N \Phi}{i} = \boxed{N^2 \Lambda = \frac{N^2}{R_m}},$$

mit  $\Lambda$  dem magnetischen Leitwert des Magnetkreises der Spule.

Somit stehen, bei konstanter Permeabilität, zwei Verfahren zur Verfügung, um den Betrag von Induktivitäten zu berechnen.

- 1 Mit der Annahme, dass durch die Spule ein beliebiger Strom fließt, wird der durch diesen erzeugten Fluss ins Verhältnis gesetzt; die Induktivität ist somit  $L = \frac{\Psi}{i}$ .
- 2 Mit den geometrischen Abmaßen wird der magnetische Leitwert  $\Lambda$  oder der magnetischen Widerstand  $R_m$  bestimmt. Die Induktivität ist dann entweder  $L = N^2 \Lambda$  oder  $L = \frac{N^2}{R_m}$ .

## Impedanz der Induktivität

Ergänzend wird die Impedanz der Induktivität betrachtet. Im Wechselstromkreis gilt für die induzierte Spannung der Zusammenhang  $u_i(t) = -L \frac{di(t)}{dt}$ . Es wird eine sinusförmige harmonische Schwingung ( $U, I \in \mathbb{C}$ ) mit  $U(t) = \hat{U} e^{j\omega t}$  und  $I(t) = \hat{I} e^{j\omega t}$  betrachtet.

$$U = -L \frac{di}{dt} = -L \frac{d}{dt} \left( \hat{I} e^{j\omega t} \right) = -L j\omega \underbrace{\hat{I} e^{j\omega t}}_I \Rightarrow U = -j\omega L I$$

Daraus folgt der Wechselstrom-Widerstand, die Impedanz<sup>a</sup>, der Induktivität:

$$Z_L = j\omega L$$

<sup>a</sup>mit positivem Vorzeichen, da Verbraucherzählpfeilsystem

## Induktivität spezieller Anordnungen: Zylinderspule (Solenoid)

Eine Zylinderspule kann ohne oder mit<sup>r</sup> Eisenkern aufgebaut werden. Bei einer langen, dünnen Spule gilt in guter Näherung die Annahme, dass das Außenfeld Null und das Innenfeld homogen ist. Es gilt:

$$\oint \mathbf{H} \, dl = H l = N i \Rightarrow H = \frac{N i}{l} \Rightarrow B = \frac{\mu N i}{l}$$

$$\Phi = B A = \frac{\mu N i A}{l} \Rightarrow L = \frac{N \Phi}{i} = \boxed{N^2 \frac{\mu A}{l}}$$

Die Betrachtung des magnetische Widerstandes der Spule führt auf das gleich Ergebnis:

$$R_m = \frac{l}{\mu A} \Rightarrow L = N^2 \frac{1}{R_m} = N^2 \frac{\mu A}{l}.$$

---

<sup>r</sup>mit  $\mu = \text{const.}$

## Induktivität einer Ringspule (Toroid)

Die ideale Toroidspule ist streufrei, somit ist das Magnetfeld nur innerhalb der Spule vorhanden, vgl. Seite 179.

$$\oint \mathbf{H} \, dl = N i \Rightarrow H = 2\pi r = N i$$

$$B = \frac{\mu N i}{2\pi r}.$$

Da das  $\mathbf{B}$ -Feld nicht homogen ist, muss für den magnetischen Fluss das Integral gelöst werden:

$$\Phi = \iint \mathbf{B} \, d\mathbf{A}.$$

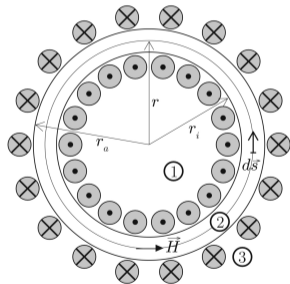


Abb. 119: Aufbau einer Toroidspule [2]



Damit ergibt sich die exakte Lösung für die Induktivität zu

$$\Phi = \int_{r_i}^{r_a} \frac{\mu N i h}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu N i h}{2\pi} \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right) \Rightarrow \boxed{L = N^2 \frac{\mu h}{2\pi} \ln \left( \frac{r_a}{r_i} \right)},$$

mit  $h$  der Höhe des rechteckförmigen Querschnitts. Ist der Querschnitt der Spule klein, so ist in vielen Anwendungen die Näherung eines homogenen  $\mathbf{B}$ -Feld zulässig, d.h. das Feld ist homogen über den gesamten Querschnitt verteilt:

$$\Phi = B A = \frac{\mu N i}{2\pi} \frac{2}{r_a + r_i} h (r_a - r_i) \Rightarrow L = \frac{N \Phi}{i} = \boxed{N^2 \frac{\mu h}{\pi} \frac{r_a - r_i}{r_a + r_i}}.$$

Ist beispielsweise das Verhältnis  $\frac{r_a}{r_i} = \frac{5}{4}$ , so beträgt der Fehler lediglich 0,4%.

## Induktivität einer Spule mit Eisenkern und Luftspalt

Das Eisen muss auch hier wieder mit  $\mu = \text{konstant}$  angenommen werden. Ein derartiger Aufbau hat den magnetische Widerstand, vgl. S. 196:

$$R_m = R_{m_E} + R_{m_L} = \frac{l_E}{\mu_0 \mu_r A} + \frac{l_L}{\mu_0 A}$$

$$L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \frac{\mu_0 \mu_r A}{l_E + \mu_r l_L}$$

Ist  $\mu_r$  sehr groß (gewünscht), geht  $R_{m_E}$  gegen Null und der Anteil des Luftspalts verbleibt.

$$L = N^2 \frac{\mu_0 A}{l_L}$$

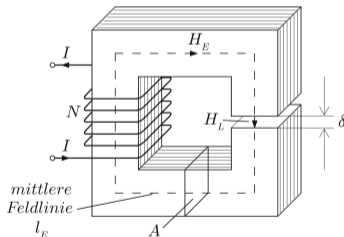


Abb. 120: Spule mit Eisenkern und Luftspalt [2]

## Induktivität einer Spule mit Eisenkern ohne Luftspalt

Das Eisen muss auch hier wieder mit  $\mu = const.$  angenommen werden. Das Magnetfeld konzentriert sich ausschließlich im Eisen und ist in guter Näherung homogen. Damit ergibt sich die Induktivität zu:

$$H l_m = N i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 \mu_r N i}{l_m} \Rightarrow \Phi = \frac{\mu_0 \mu_r N i A}{l_m} \Rightarrow \boxed{L = N^2 \frac{\mu_0 \mu_r A}{l_m}}$$

Die Betrachtung des magnetischen Widerstandes ergibt:

$$R_m = \frac{l_m}{\mu_0 \mu_r A} \Rightarrow L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \frac{\mu_0 \mu_r A}{l_m}$$

Bei einem geschlossenen Magnetkreis ohne Luftspalt strebt für  $\mu_r \rightarrow \infty$ ,  $L \rightarrow \infty$ . Somit begrenzt der Luftspalt die Induktivität des Aufbaus und ermöglicht eine Einstellbarkeit der Induktivität.

## Induktivität einer Doppelleitung

Eine Doppelleitung mit gegensinniger Bestromung der Leiter kann als langgestreckte Schleife mit der Windungszahl  $N = 1$  betrachtet werden.

Hier können unterschiedliche Induktivitäten definiert werden; die folgenden Magnetflüsse treten auf:

- zwischen den Leitern, vgl. S. 138
- in den Leitern

Üblich ist die Angabe der Induktivität pro Längeneinheit in  $\frac{\text{Henry}}{\text{km}}$ .

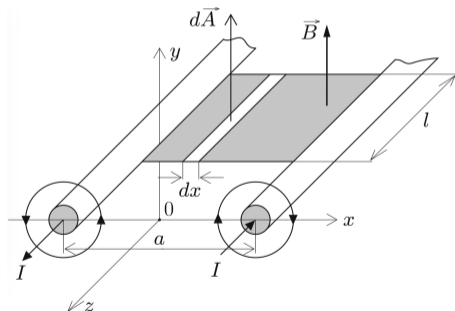


Abb. 121: Gegenseitig bestromte Doppelleitung [2]

Die äußere Induktivität  $L_a$  pro Länge  $l$  kann mit der Überlagerung der magnetischen Flussdichten der beiden Leiter berechnet werden.

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(x + \frac{a}{2}\right)} - \frac{\mu_0 I}{2\pi \left(x - \frac{a}{2}\right)}$$

$$L_a = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}+r_0}^{\frac{a}{2}-r_0} \left[ \frac{1}{x + \frac{a}{2}} - \frac{1}{x - \frac{a}{2}} \right] dx = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[ \underbrace{\ln \left(x + \frac{a}{2}\right)_{-\frac{a}{2}+r_0}^{\frac{a}{2}-r_0}}_{=\ln \frac{a-r_0}{r_0}} - \underbrace{\ln \left(x - \frac{a}{2}\right)_{-\frac{a}{2}+r_0}^{\frac{a}{2}-r_0}}_{=\ln \frac{-r_0}{-a+r_0}} \right]$$

$$\Rightarrow L_a = \frac{\mu_0 l}{2\pi} 2 \ln \left( \frac{a - r_0}{r_0} \right)$$

Der *Induktionsbelag* pro Längeneinheit einer Doppelleitung, bei Vernachlässigung des geringen Feldes innerhalb der Leiterdrähte, ist  $\frac{L_a}{l}$ .

## Induktivität eines Koaxialkabels

Die magnetischen Feldstärken für alle Bereiche des Koaxialkabels wurden bereits abgeleitet (vgl. Übung). Der Magnetfluss, der für die Induktivitäten maßgebend ist, setzt sich aus drei Teilen zusammen:

- $\Phi_1$  im Innenleiter  $\Rightarrow L_1$
- $\Phi_2$  im Luftraum zwischen den Leitern  $\Rightarrow L_2$
- $\Phi_3$  im Außenleiter  $\Rightarrow L_3$

In guter Näherung ergibt sich der Induktionsbelag für hochfrequente Signale des Koaxialkabels<sup>a</sup> zu  $\frac{L_2}{l}$ .

<sup>a</sup>Für hochfrequente Signale: *Skineffekt*

$$H_2 = \frac{I}{2\pi r} \Rightarrow B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \Phi_2 = \int_{R_i}^{R_m} \frac{\mu_0 I l}{2\pi r} dr$$

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{R_m}{R_i} \right)$$

mit  $R_i$  : äußerer Radius Innenleiter,  
 und  $R_m$  : innerer Radius Außenleiter

## Gegeninduktivität magnetisch gekoppelter Spulen

Betrachtet werden zwei Spulen, die so angeordnet sind, dass sich ihre magnetischen Flüsse überlagern und die Spulen somit *gekoppelt* sind.

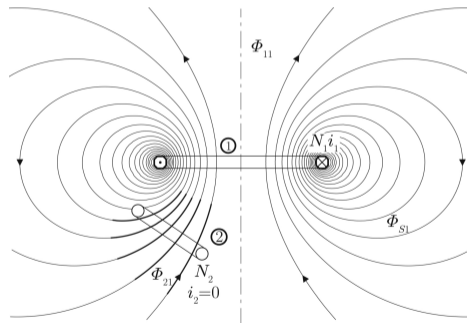


Abb. 122: Zwei gekoppelte Spulen ① und ② [2]

Die Spule ① sei stromdurchflossen, der Fluss  $\Phi_1$ , der durch alle Windungen der Spule ① geht, ist die Summe aus  $\Phi_1 = \Phi_{21} + \Phi_{S1}$ , mit

- $\Phi_{21}$ : der Fluss durch Spule ②
- $\Phi_{S1}$ : der Streufluss, der von Spule ① erzeugt wird aber keine magnetische Kopplung verursacht.

Das Verhältnis zwischen dem von Spule ① in Spule ② erzeugten Fluss und dem Strom  $i_1$  der Spule ① wird *Gegeninduktivität*  $M_{21}$  genannt

$$M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1}.$$

Der Fluss  $\Phi_{21}$  beschreibt den Fluss durch jede Windung der Spule ② und somit ist  $N_2 \Phi_{21}$  der verkettete Fluss; der Fluss, der durch alle Windungen hindurch tritt. Hier beschreibt der erste Index den Ort der *Wirkung* und der zweite Index den Ort der *Ursache*. Eine



magnetische Kopplung (Gegeninduktivität) ist in vielen technischen Anwendungen eine erwünschte Erscheinung. Die Gegeninduktivität ist stets eine Funktion beider Windungszahlen ( $M \propto N_1 N_2$ ) und bei konstantem  $\mu$  ist  $M_{12} = M_{21}$ . Abhängig vom Zählsinn der Ströme  $i_1$  und  $i_2$ <sup>s</sup> kann die Gegeninduktivität auch negative Werte annehmen.

- $M_{21} > 0$ , wenn  $i_2 \rightarrow \bullet$
- $M_{21} < 0$ , wenn  $\bullet \rightarrow i_2$
- Nur eine Spule darf für die Betrachtung bestromt sein.
- $\mu = const. \Rightarrow M_{12} = M_{21}$

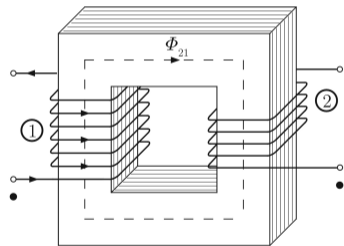


Abb. 123: Transformator mit den Spulen ① ② [2]

<sup>s</sup>bzw. Wickelsinn (•) der Spule

Betrachtung zweier Spulen, die magnetisch in Luft gekoppelt sind.

- Spule ① unendlich langer, dünner Leiter (Leiterschleife, die sich im Unendlichen schließt)
- Spule ② einfache Leiterschleife,
- $\Phi_{21}$  einfach zu berechnen
- $M_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} \Rightarrow M_{12} = M_{21}$ , da  $\mu = \mu_0$

- Bei idealer Kopplung:  $M = \sqrt{L_1 L_2}$

- Bei nicht ideale Kopplung,  
*Kopplungsfaktor:*

$$0 \leq k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \leq 1$$

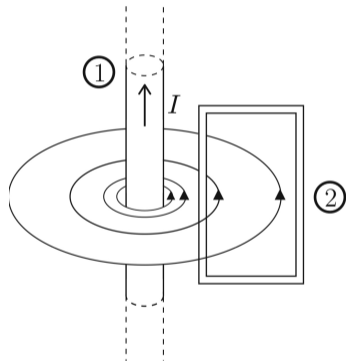


Abb. 124: Gekoppelte Spulen ① und ②[2]

## 5.3 Energie und Kräfte im Magnetfeld

In technischen Aufbauten, die Magnetfelder einsetzen, muss für eine vollständige Untersuchung die gespeichert Energie betrachtet werden: wo wird diese gespeichert und wie kann diese wieder zugänglich gemacht werden.

### Magnetische Energie und Energiedichte

Eine Induktivität  $L$  kann Energie in ihrem Magnetfeld speichern; hierzu wird der Einschaltvorgang betrachtet. Hierbei wird der Spule, mit der Spannung  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , die folgende Energie zugeführt:

$$W_m = \int_0^{\infty} u(t) i(t) dt = \int_0^{\infty} L \frac{di(t)}{dt} i(t) dt = \int_0^I L i(t) di \Rightarrow \boxed{W_m = \frac{1}{2} L I^2}$$

und ist damit analog der elektrischen Energie  $W_e = \frac{1}{2} C U^2$ . Über den magnetischen Fluss  $\Phi = L I$  ergibt sich des Weiteren

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi I$$

$$W_m = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$$

Die gespeicherte Energie im Magnetfeld kann auch über die Feldgrößen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$  beschrieben werden. Hierzu wird das Feld einer langen zylindrischen Spule (vgl. S. 177) beispielhaft verwendet, mit  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{H}$ .

$$H = \frac{N I}{l}; \Phi = B A N \Rightarrow W_m = \frac{1}{2} B A N \frac{l H}{N} = \frac{1}{2} B H \underbrace{A l}_{\text{Volumen}}$$

$$\Rightarrow \boxed{W_m = \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{H} V} \quad \text{oder allgemein} \quad \boxed{W_m = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{B} \mathbf{H} V}$$

## Berechnung von Kräften über die Magnetenergie

Für die Bestimmung von Kräften in einem Magnetfeld findet auch das Prinzip der *virtuellen Verschiebung* Anwendung. Die wirkende Kraft in Richtung einer allgemeinen Koordinate  $x$  ist gleich der Ableitung der Energie nach dieser Koordinate  $x$ . Der Betrag der Kraft wird dabei negativ gezählt, falls die magnetischen Flüsse  $\Phi$  konstant sind. Der Betrag der Kraft wird für konstante Ströme positiv gezählt.

$$F_x = - \left( \frac{dW_m}{dx} \right)_{\Phi=const.} = \left( \frac{dW_m}{dx} \right)_{i=const.}$$