Höhere Mathematik 1

Kapitel 1

Grundlagen

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 1

Kapitel 1

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Mengen, Mengenoperationen und Abbildungen

Definition 1-1: (*Menge*)
Unter einer Menge versteht man die Zusammenfassung von Elementen zu einer Einheit. Dabei können die Elemente der Menge durch bestimmte Eigenschaften charakterisiert sein, oder sie werden explizit aufgezählt.

Beschreibende Darstellungsform:

$$M = \{a : \ a \text{ besitzt die Eigenschaft } E\}$$

Aufzählende Darstellungsform:

endliche Menge: $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$

abzählbar unendliche Menge: $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$

Beispiel:

1) $M_1 = \{2, 3, 5, 7, 11\}$

2) $M_2 = \{\text{grün, rot, gelb, blau}\}$

Symbolik der Elementbeziehung:

$a \in M$ bedeutet: a ist ein Element der Menge M
$a \notin M$ bedeutet: a ist kein Element der Menge M

Beispiel:

1) $2 \in M_1, \quad 5 \in M_1, \quad 9 \notin M_1$

2) $\text{rot} \in M_2, \quad \text{weiß} \notin M_2$

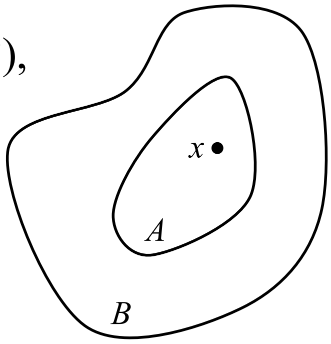
1.1.1 Spezielle Mengen

Definition 1-2: (*Teilmenge*)
Eine Menge A heißt Teilmenge der Menge B, wenn jedes Element der Menge A auch Element von B ist.

Symbolische Schreibweise:

$A \subset B$ (A ist Teilmenge von B),

d.h. $x \in A \Rightarrow x \in B$



Beispiel:

1) $\{1,2,3\} \subset M_1, \quad \{1,2,4\} \not\subset M_1$

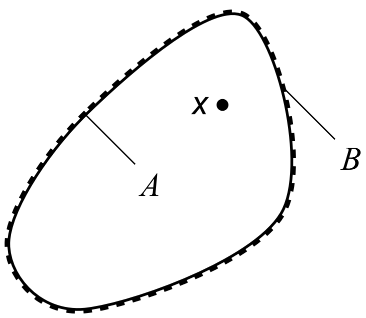
2) $\{\text{rot}, \text{grün}\} \subset M_2, \quad \{\text{schwarz}, \text{blau}\} \not\subset M_2$

Definition 1-3: (*Gleichheit*)
Zwei Mengen A und B heißen gleich, wenn jedes Element der Menge A auch Element von B ist und umgekehrt.

Symbolische Schreibweise:

$A = B$ (A ist gleich B),

d.h. $x \in A \Leftrightarrow x \in B$



Definition 1-4: (*leere Menge*)
Eine Menge M heißt leer, wenn sie kein Element enthält.

Symbolische Schreibweise:

$$M = \{\ \} = \varnothing$$

Definition 1-5: (*Potenzmenge*)
M sei eine Menge und A sei eine Teilmenge von M, d.h. $A \subset M$. Wir bilden eine Menge, die alle Teilmengen A von M enthält und nennen diese Potenzmenge $P(M)$ von M.

Symbolische Schreibweise:

$$P(M) = \{ A : \; A \subset M \}$$

Folgerung:
Es gilt stets, d.h. für jede Menge M

$$\varnothing \in P(M) \wedge M \in P(M),$$

da $\varnothing \subset M$ und $M \subset M$.

Beispiel:

$$M_3 = \{1,2,3\} \;\Rightarrow\; P(M_3) = \{\varnothing, 1, 2, 3, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, M_3\}$$

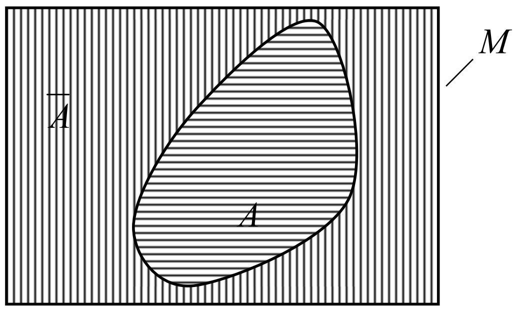
Definition 1-6: (*Komplementärmenge*)
Gegeben sei eine Menge A mit $A \subset M$. $\overline{A}$ heißt Komplementärmenge von A bezüglich M, wenn gilt

$$\overline{A} = \{ x : \; x \in M \wedge x \notin A \},$$

d.h. $\overline{A}$ enthält alle Elemente von M die nicht zu A gehören. Die Menge M wird dabei als Universalmenge bezeichnet.

Folgerung:

$$\overline{M} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = M$$



Beispiel:

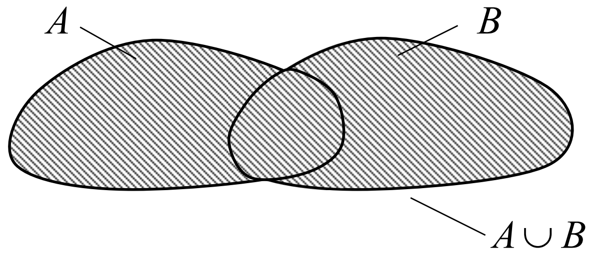
$$A = M_3, \; M = M_1 \;\Rightarrow\; \overline{A} = \{5, 7, 11\}$$

1.1.2 Mengenoperationen

Definition 1-7: (*Vereinigungsmenge*)
Unter einer Vereinigung(smenge) zweier Mengen A und B versteht man die Menge aller Elemente, die mindestens einer der beiden Mengen A oder B angehören.

Symbolische Schreibweise:

$$A \cup B = \{ x : \ x \in A \vee x \in B \} \quad (A \text{ vereinigt } B)$$



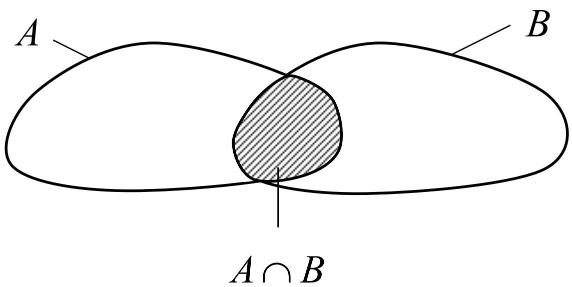
Beispiel:

$$A = \{1,2,3\}, \ B = \{3,4,5\} \ \Rightarrow \ A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$$

Definition 1-8: (*Durchschnittsmenge*)
Der Durchschnitt zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die sowohl A als auch B angehören.

Symbolische Schreibweise:

$$A \cap B = \{ x : \ x \in A \wedge x \in B \} \quad (A \text{ geschnitten } B)$$



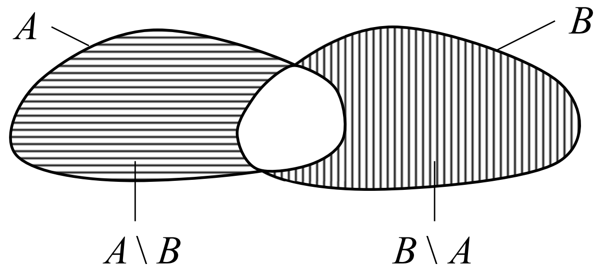
Beispiel:

$$A = \{1,2,3\}, \ B = \{3,4,5\} \ \Rightarrow \ A \cap B = \{3\}$$

Definition 1-9: (*Differenzmenge*)
Die Differenz zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht Element von B sind.

Symbolische Schreibweise:

$$A \setminus B = \left\{ x:\ x \in A \wedge x \notin B \right\} \quad (A \text{ ohne } B)$$



Beispiel:

$$A = \left\{1,2,3\right\},\ B = \left\{3,4,5\right\} \ \Rightarrow\ A \setminus B = \left\{1,2\right\},\ B \setminus A = \left\{4,5\right\}$$

Rechenregeln für die Operationen $\cup, \cap, \overline{}$
Es gilt für alle Mengen A, B, C und D, die Teilmenge einer Universalmenge M sind

1) $A \cap B = B \cap A$ — Kommutativgesetz
   $A \cup B = B \cup A$
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — Assoziativgesetz
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3) $A \cap (A \cup C) = A$ — Verschmelzungsgesetz
   $B \cup (B \cap C) = B$
4) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — Distributivgesetz
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5) $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$ — $\varnothing$ – Nullelement
   $A \cap M = A, \quad A \cup M = M$ — M – Einselement
6) $A \cup \overline{A} = M \ \wedge\ A \cap \overline{A} = \varnothing$ — Komplement-Eigenschaft

7) $\overline{\overline{A}} = A$

8) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ de-Morgansche Regeln

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Beweis von 8):

Nach 6) genügt es zu zeigen, dass $(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = M$ und $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = M$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= \big((A \cup B) \cup \overline{A}\big) \cap \big((A \cup B) \cup \overline{B}\big) \\ &= \big((A \cup \overline{A}) \cup B\big) \cap \big(A \cup (B \cup \overline{B})\big) \\ &= (M \cup B) \cap (A \cup M) = M \cap M = M\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) &= \big(A \cap (\overline{A} \cap \overline{B})\big) \cup \big(B \cap (\overline{A} \cap \overline{B})\big) \\ &= \big((A \cap \overline{A}) \cap \overline{B}\big) \cup \big((B \cap \overline{B}) \cap \overline{A}\big) \\ &= (\varnothing \cap \overline{B}) \cup (\varnothing \cap \overline{A}) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing\end{aligned}$$

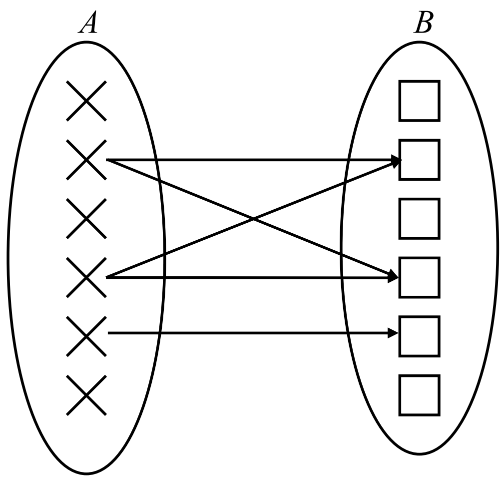
1.1.3 Abbildungen

<u>Definition 1-10:</u>

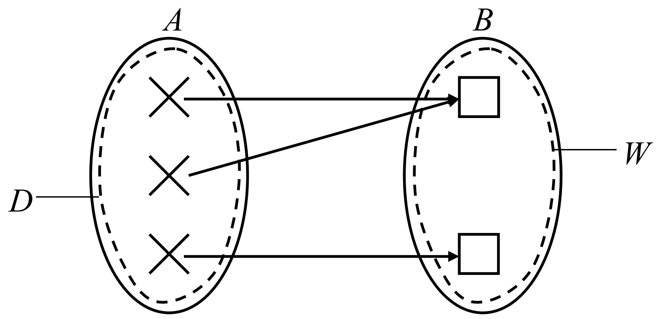
Werden durch eine bestimmte Vorschrift Elemente einer Menge A Elemente einer Menge B zugeordnet, so spricht man von einer Abbildung aus der Menge A in die Menge B.

<u>Abbildungen</u>

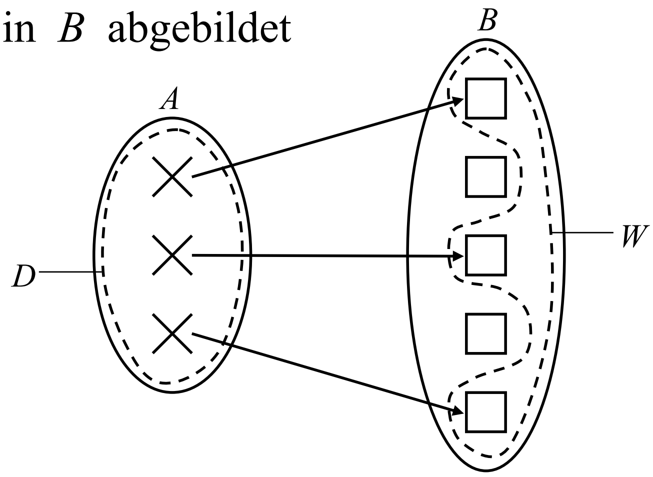
- Relation, aus A wird in B abgebildet



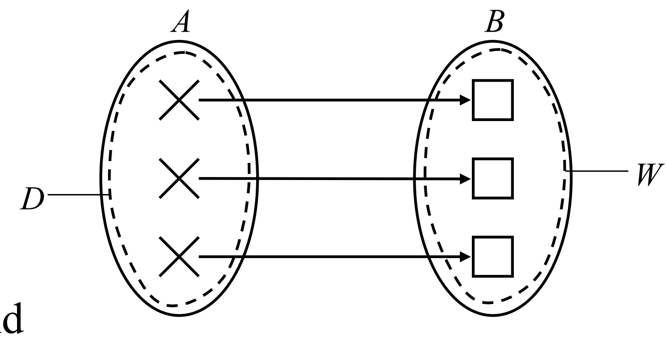
- Surjektive Abbildung, A wird auf B abgebildet (eindeutige auf)



- Injektive Abbildung, A wird in B abgebildet (eineindeutige)



- Bijektive Abbildung, d.h. injektiv und surjektiv, (eineindeutige auf bzw. umkehrbar eindeutig)



wobei D den Definitions- und
W den Wertebereich einer Funktion bezeichnet.

<u>Definition 1-11:</u> (*Produktmenge*)
A und B seien zwei Mengen. Dann heißt

$$A \times B = \{(a,b): \ a \in A \wedge b \in B\}$$

Produktmenge der Mengen A und B (wird auch kartesisches Produkt genannt).

Beispiel:

$$A=\{a,b\},\ B=\{0,2,4\} \Rightarrow A\times B=\{(a,0),(a,2),(a,4),(b,0),(b,2),(b,4)\}$$

Definition 1-12: (*Abbildung*)
A und B seien zwei Mengen. Dann heißt

$$F=\{(x,y):\ x\in A\wedge y\in B\wedge y=f(x)\}\subset A\times B$$

eine Abbildung aus der Menge A in die Menge B.

Beispiel:

$$F=\{(a,2),(b,0),(b,4)\}$$

Alternative Symbolik:

$$f:\ A\to B$$

1.2 Reelle Zahlen

Am Anfang mathematischer Betrachtungen steht auch der Zahlenbegriff. Die Zahlen gehören zu den grundlegenden mathematischen Objekten, mit deren Hilfe die realen Dinge oder Ereignisse quantifiziert oder geordnet werden können.

1.2.1 Natürliche Zahlen

$\mathbb{N}:=\{1,2,3,\ldots\}$ heißt Menge der natürlichen Zahlen,[1)]

$\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,\ldots\}$ heißt Menge der natürlichen Zahlen einschließlich 0

und es gilt

$$n,m\in\mathbb{N} \Rightarrow n+m\in\mathbb{N},\ n\cdot m\in\mathbb{N}$$
$$n,m\in\mathbb{N}\wedge n<m \Rightarrow n-m\notin\mathbb{N} \text{ aber } n-m\in\mathbb{Z}$$

[1)] **N** kann auch axiomatisch erklärt werden. Dazu nutzt man die Kenntnis ihrer Eigenschaften. Wählt man unter diesen eine minimale Zahl von Grundeigenschaften derart aus, dass sich alle weiteren von diesen ableiten lassen, so bilden diese ein Axiomensystem. Für **N** stammt das bekannteste von Peano (1891). a) 1 ist eine natürliche Zahl. b) Zu jeder natürlichen Zahl *n* gibt es genau einen Nachfolger *n*'. c) Es gibt keine natürliche Zahl, deren Nachfolger 1 ist. d) Die Nachfolger zweier verschiedener Zahlen sind voneinander verschieden. e) Enthält eine Menge natürlicher Zahlen die Zahl 1 und mit jeder natürlichen Zahl *n* auch deren Nachfolger *n*', so enthält sie alle natürlichen Zahlen

1.2.2 Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} := \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ bzw. $\mathbb{Z} := \{p : p \in \mathbb{N}_0 \vee (-p) \in \mathbb{N}\}$

heißt Menge der ganzen Zahlen und es gilt

$$p,q \in \mathbb{Z} \;\Rightarrow\; p+q \in \mathbb{Z},\; p-q \in \mathbb{Z},\; p \cdot q \in \mathbb{Z}$$

$$p,q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \wedge p,q \text{ teilerfremd} \;\Rightarrow\; \frac{p}{q} \notin \mathbb{Z} \text{ aber } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}.$$

1.2.3 Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} := \{ r = p/q : p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$

heißt Menge der rationalen Zahlen und es gilt

$$r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; r_1 + r_2 \in \mathbb{Q},\; r_1 - r_2 \in \mathbb{Q},\; r_1 \cdot r_2 \in \mathbb{Q}$$

$$r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \wedge r_2 \neq 0 \;\Rightarrow\; r_1/r_2 \in \mathbb{Q} \text{ aber im allgemeinen ist } \sqrt{r_1} \notin \mathbb{Q}.$$

1.2.4 Mathematische Beweismethoden

Grundlagen aus der Aussagelogik

A und B seien zwei Aussagen mit

A: Es regnet bzw. A: Das Tier ist ein Pferd

B: Die Straße ist nass B: Es ist ein Säugetier

Implikation

$$A \Rightarrow B$$

(aus A folgt B, wenn A dann B, A impliziert B)

Für die negierten Aussagen

$\neg A$: Es regnet nicht bzw. $\neg A$: Das Tier ist kein Pferd

$\neg B$: Die Straße ist nicht nass $\neg B$: Es ist kein Säugetier

gilt

$$\neg B \Rightarrow \neg A \text{ }^{1)}$$

1) Die Aussage $\neg A \Rightarrow \neg B$ ist nicht allgemein gültig, z.B. wenn das Tier kein Pferd ist, dann ist es nicht zwingend kein Säugetier.

Kontraposition

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

Beweis:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
f	f	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w
w	f	f	w	f	f
w	w	w	f	f	w

Nun bezeichne Aussage

A: die Voraussetzung (die Bedingung)
B: die Behauptung (den Sachverhalt)

Notwendige Bedingung

$$B \Rightarrow A \quad \Leftrightarrow \quad \neg A \Rightarrow \neg B$$

- Wenn die Voraussetzung A nicht erfüllt ist, dann gilt auch die Behauptung B nicht.
- Bei Erfüllung der Voraussetzung A kann keine Aussage über die Gültigkeit der Behauptung B gemacht werden.

Hinreichende Bedingung

$$A \Rightarrow B \quad \Leftrightarrow \quad \neg B \Rightarrow \neg A$$

- Von der Gültigkeit der Voraussetzung A kann auf die Gültigkeit der Behauptung B geschlossen werden.
- Wenn die Voraussetzung A nicht erfüllt ist, dann kann keine Aussage über die Gültigkeit der Behauptung B getroffen werden.

Notwendige und Hinreichende Bedingung

$$A \Leftrightarrow B$$

- Wenn die Voraussetzung A erfüllt ist, dann gilt auch die Behauptung B.
- Wenn die Voraussetzung A nicht erfüllt ist, dann gilt auch die Behauptung B nicht.

Direkte Beweismethode

Beim direkten Beweis folgert man aus der Gültigkeit der Voraussetzung A durch aussagelogische Gesetze die Gültigkeit der Behauptung B. Man geht von der Voraussetzung A aus und überführt diese durch mathematisches Schließen direkt in die Behauptung B.

$$\text{Voraussetzung } A \Rightarrow \text{Behauptung } B$$

Beispiel:

Voraussetzung:

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n$$

Behauptung:

$$s_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1$$

Beweis:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \\ xs_n(x) &= \phantom{1 + {}} x + x^2 + \ldots + x^n + x^{n+1} \\ \Rightarrow s_n(x) - xs_n(x) &= 1 - x^{n+1} \\ s_n(x) &= \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \end{aligned}$$

Indirekte Beweismethode

Nicht immer lässt sich eine Voraussetzung A problemlos in die gewünschte Behauptung B überführen. Es ist häufig leichter, von der Nichtgültigkeit der Behauptung B auszugehen und daraus auf einen Widerspruch zur Voraussetzung A, d.h. auf die Nichtgültigkeit der Voraussetzung A, zu schließen.

Beispiel:

$$\underbrace{p \in \mathbb{Z} \wedge p^2 \text{ durch 2 teilbar}}_{\text{Voraussetzung } A} \Rightarrow \underbrace{p \text{ durch 2 teilbar}}_{\text{Behauptung } B}$$

Beweis:

Annahme: $\underbrace{p \text{ sei nicht durch 2 teilbar}}_{\neg B}$

$$\Rightarrow p = 2r + 1 \text{ mit } r \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow p^2 = (2r+1)^2 = \underbrace{4r^2 + 4r}_{\text{durch 2 teilbar}} + 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{p^2 \text{ nicht durch 2 teilbar}}_{\neg A}$$

somit gilt wegen der Kontraposition

$$\neg B \Rightarrow \neg A \quad \Leftrightarrow \quad A \Rightarrow B$$

$$\Rightarrow p \text{ durch 2 teilbar}$$

Beweis durch vollständige Induktion

Häufig ist die Gültigkeit einer Behauptung B zu zeigen, die von natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ abhängt, d.h.

$$B = B(n).$$

Zum Beweis einer solchen Behauptung wird häufig das Beweisverfahren der vollständigen Induktion angewendet. Dabei wird ausgehend von einem Induktionsanfang über die Induktionsannahme und einem Induktionsschritt ein Induktionsschluss gefolgert.

1) Induktionsanfang $B(n_0)$ ist richtig für $n_0 \in \mathbb{N}$

2) Induktionsannahme $B(n)$ ist richtig für $n \geq n_0$

3) Induktionsschritt Aus $B(n)$ folgt auch $B(n+1)$

4) Induktionsschluss Aus der Gültigkeit von 1) – 3) folgt, dass $B(n)$ richtig ist $\forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$

<u>Beispiel:</u>

Behauptung: $\underbrace{2^n \geq n+2}_{B(n)}, \quad \forall n \geq 2$

<u>Beweis:</u>

Induktionsanfang: $n = 2: \quad 2^n = 4 \geq n+2 = 4$

Induktionsannahme: für beliebiges $n \geq 2$ sei $2^n \geq n+2$

Induktionsschritt: $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+2) = 2n+4 > n+3 = (n+1)+2$
$(n \to n+1)$

Induktionsschluss: $2^n \geq n+2$ gilt $\forall n \geq 2$

1.2.5 Irrationale Zahlen

<u>Behauptung:</u>

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

<u>Beweis:</u> (indirekter Beweis, d.h. Widerspruchsbeweis)

Annahme: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} = p/q$
mit p und q haben keinen gemeinsamen Teiler >1

$\Rightarrow 2q^2 = p^2$
$\Rightarrow p^2$ durch zwei teilbar
$\Rightarrow p$ durch zwei teilbar (Beweis siehe oben)
$\Rightarrow p = 2r$ mit $r \in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow 2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$
$\Rightarrow q$ durch zwei teilbar
$\Rightarrow p$ und q durch zwei teilbar

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme

$\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\sqrt{2}$ ist also eine irrationale Zahl. Irrationale Zahlen besitzen unendliche nicht periodische Dezimalbruchdarstellungen.

Beispiel:

$$\sqrt{2} = 1,4142135 \ \ldots$$
$$\pi = 3,1415926 \ \ldots$$
$$e = 2,7182818 \ \ldots \qquad \text{(Eulersche Zahl)}$$

Die Vereinigung aus der Menge der rationalen und der Menge der irrationalen Zahlen

$$\mathbb{R} := \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationale Zahlen}\}$$

heißt Menge der reellen Zahlen.

Definition 1-13:

1) Mengen $M \neq \emptyset$, die endlich viele Elemente besitzen, heißen endliche Mengen.
2) Mengen, die nicht aus endlich vielen Elementen bestehen, heißen unendliche Mengen
3) Mengen, deren Elemente sich mit Hilfe der natürlichen Zahlen nummerieren lassen, heißen abzählbare Mengen.

$\mathbb{N}$ ist eine abzählbare unendliche Menge.

$\mathbb{Z}$ ist eine abzählbare unendliche Menge.

$\mathbb{Q}$ ist eine abzählbare unendliche Menge.

$\mathbb{R}$ ist eine nicht abzählbare unendliche Menge.

Eine nicht abzählbare unendliche Menge bezeichnet man als überabzählbar.

$\mathbb{R}$ ist eine überabzählbare Menge.

1.2.6 Axiome der reellen Zahlen

Körperaxiome[1)]

1) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; a+b \in \mathbb{R}$ Abgeschlossenheit der Addition

   a) $a+b=b+a$ Kommutativgesetz

   b) $(a+b)+c=a+(b+c)$ Assoziativgesetz

   c) $\forall a,b \in \mathbb{R}\;\dot{\exists} x \in \mathbb{R}$ mit $a+x=b$
   ($x := b-a$ neutrales/inverses Element)

bezüglich der Addition ist $\mathbb{R}$ eine kommutative oder auch abelsche Gruppe.

2) $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; ab \in \mathbb{R}$ Abgeschlossenheit der Multiplikation

   a) $ab=ba$ Kommutativgesetz

   b) $(ab)c=a(bc)$ Assoziativgesetz

[1)] Man spricht von einer Gruppe, wenn bzgl. der Addition 1b und 1c und bzgl. der Multiplikation 2b und 2c, von einer abelschen (kommutativen) Gruppe, wenn bzgl. der Addition 1a, 1b und 1c und bzgl. der Multiplikation 2a, 2b und 2c und von einem Ring, wenn 1a,1b,1c und 2a, 2b sowie 3 gilt.

   c) $\forall a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\wedge\; \forall b \in \mathbb{R}\;\dot{\exists} x \in \mathbb{R}$ mit $ax=b$
   ($x := b/a$ neutrales/inverses Element)

bezüglich der Multiplikation ist $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ eine kommutative oder abelsche Gruppe.

3) $a(b+c)=ab+ac$ Distributivgesetz

$\mathbb{R}$ bildet einen Körper, d.h. in $\mathbb{R}$ werden die Eigenschaften 1)–3) erfüllt.

Ordnungsaxiome

4) $a,b \in \mathbb{R}$ gilt

   a) $a<b \;\vee\; a>b \;\vee\; a=b$ Trichotomiegesetz

   b) $a<b \;\wedge\; b<c \;\Rightarrow\; a<c$ Transitivitätsgesetz

   c) $a<b \;\Rightarrow\; a+c<b+c$ Monotoniegesetz
   $a<b \;\wedge\; c>0 \;\Rightarrow\; ac<bc$

$\mathbb{R}$ bildet einen angeordneten Körper, d.h. in $\mathbb{R}$ werden die Eigenschaften 1) – 4) erfüllt.

Archimedisches Axiom

5) $\forall a \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$

Vollständigkeitsaxiom

6) $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$ mit $\forall \mathrm{a} \in A \;\wedge\; \forall b \in B$ sei $a \le b$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $a \le c \le b \quad \forall a \in A \;\wedge\; \forall b \in B$

Mit diesen Axiomen lassen sich sämtliche Rechengesetze der reellen Zahlen herleiten.

1.2.7 Anwendungen

Bezeichnungen

Summenzeichen: $\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Produktzeichen: $\prod_{i=1}^{n} a_i := a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$

Rechengesetze:

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=l+1}^{n+l} a_{k-l} \quad l \in \mathbb{Z}$

2) $\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$ Kommutativgesetz

3) $\sum_{i=1}^{n} \mu\, a_i = \mu \sum_{i=1}^{n} a_i$ Distributivgesetz

4) $\sum_{i=1}^{n} a_i \wedge \forall i$ gilt $a_i = a \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a = na$

5) $\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=l+1}^{n+l} a_{k-l} \quad l \in \mathbb{Z}$

6) $\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i = \prod_{i=1}^{n} (a_i b_i)$ Kommutativgesetz

7) $\prod_{i=1}^{n} a_i \wedge \forall i$ gilt $a_i = a \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{n} a = a^n$

8) $\prod_{i=1}^{n} (\mu\, a_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu \prod_{i=1}^{n} a_i = \mu^n \prod_{i=1}^{n} a_i$

<u>Bezeichnungen</u>

n – Fakultät:

$$n! := \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n & \text{für } n \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{für } n = 0 \end{cases}$$

Binominalkoeffizient „n über k“:

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{für } n, k \in \mathbb{N}_0 \wedge k \le n \\ 0 & \text{für } n, k \in \mathbb{N}_0 \wedge k > n \end{cases}$$

und es gilt

$$\binom{n}{k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k-1) \cdot (n-k) \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-k-1) \cdot (n-k) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (k-1) \cdot k}$$
$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Ferner ist

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}, \quad \text{denn} \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{n-1} = n$$

und

$$\binom{n}{k} = \left\{ \cdots \underbrace{\left\{ \underbrace{\left\{ \underbrace{\left\{ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \right\}}_{\in \mathbb{N}} \frac{n-2}{3} \right\}}_{\in \mathbb{N}} \frac{n-3}{4} \right\}}_{\in \mathbb{N} \text{ usw.}} \cdots \frac{n-k+1}{k} \right\}.$$

Beispiel:

$$\binom{7}{5} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 21$$

Allgemein gibt *„n über k“* die Anzahl der Möglichkeiten an, ohne Wiederholung aus n Elementen k auszuwählen.

Beispiel:
Beim Lotto sind aus 49 Zahlen 6 anzukreuzen

$$\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 49\cdot 47\cdot 46\cdot 3\cdot 44 \approx 14 \text{ Millionen}$$

Rechenregeln:

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

Beweis: als Übung

Mit Hilfe dieser Eigenschaften kann das Pascalsche Dreieck aufgebaut werden.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

<u>Binomischer Lehrsatz</u>

Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (b+a)^n$$

$$= a^n + na^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

<u>*Beweis:*</u> als Übung mittels vollständiger Induktion

Ungleichungen

Rechenregeln:

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann gilt

1) $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$

2) $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$

3) $0 < a < b \Rightarrow 0 < 1/b < 1/a$

4) $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \{a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2\}$

Beweis:

1) $a + c < b + c < b + d$

2) $(-c) > 0 \Rightarrow a(-c) < b(-c) \Rightarrow bc - ac < 0 \Rightarrow bc < ac$

3) $0 < a < b \Rightarrow \dfrac{1}{a} > 0, \dfrac{1}{b} > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot a < \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{1}{b} \cdot b \Rightarrow \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$

4) "$\Rightarrow$": $0 < a < b \Rightarrow a^2 < ab,\ ab < b^2 \Rightarrow a^2 < b^2$

"$\Leftarrow$": $a > 0, b > 0, a^2 < b^2 \Rightarrow a < b$, denn sonst

wäre $a \geq b \Rightarrow a^2 \geq b^2$ Widerspruch

Bernoulische Ungleichung

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 + x)^n \geq (1 + nx)$$

Beweis:

$n = 1$: $(1 + x) \geq 1 + x$

$n \to n + 1$: $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq \underbrace{(1 + x)}_{\geq 0}(1 + nx)$

$$= 1 + (n + 1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n + 1)x$$

Definition 1-14: (*absoluter Betrag*)
Für alle $a \in \mathbb{R}$ sei

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0 \\ -a & \text{für } a < 0 \end{cases}$$

der absolute Betrag von a.

Eigenschaften:
Es seien, $a, b \in \mathbb{R}$ dann gilt

1) $|a| \geq 0, \quad |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
2) $|a| = \max(a, -a)$
3) $|ab| = |a||b|$
4) $|a/b| = |a| / |b|, \quad b \neq 0$
5) $|a+b| \leq |a| + |b|$ Dreiecksungleichung
6) $\big||a| - |b|\big| \leq |a+b|$

Beweis:

3) $|ab| = \begin{cases} ab & \text{für } ab \geq 0 \\ -ab & \text{für } ab < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
ab \geq 0 &\Rightarrow \{a \geq 0 \wedge b \geq 0\} \vee \{a < 0 \wedge b < 0\} \\
&\Rightarrow \{a = |a| \wedge b = |b|\} \vee \{a = -|a| \wedge b = -|b|\} \\
&\Rightarrow |ab| = ab = |a||b| \\
ab < 0 &\Rightarrow \{a > 0 \wedge b < 0\} \vee \{a < 0 \wedge b > 0\} \\
&\Rightarrow \{a = |a| \wedge b = -|b|\} \vee \{a = -|a| \wedge b = |b|\} \\
&\Rightarrow |ab| = -ab = |a||b|
\end{aligned}$$

4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \left|a \cdot \dfrac{1}{b}\right| = |a| \left|\dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, denn $\left|\dfrac{1}{b}\right| = \left\{\begin{matrix} 1/b & \text{für } b \geq 0 \\ -1/b & \text{für } b < 0 \end{matrix}\right\} = \dfrac{1}{|b|}$

5) für $a+b \geq 0$ gilt mit 2):

$$|a+b| = a+b \leq |a|+|b|$$

für $a+b<0$ gilt mit 2):

$$|a+b| = -(a+b) = (-a)+(-b) \leq |a|+|b|$$

6) $|a| = |a+b-b| = |a+b+(-b)| \leq |a+b|+|b|$

$$|b| = |b+a-a| = |b+a+(-a)| \leq |a+b|+|a|$$

$$\Rightarrow \{|a|-|b| \leq |a+b| \wedge |b|-|a| \leq |a+b|\}$$

$$\Rightarrow \{|a|-|b| \leq |a+b| \wedge -(|a|-|b|) \leq |a+b|\}$$

$$\Rightarrow \big||a|-|b|\big| \leq |a+b|$$

Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a>0$ und $b>0$, dann gilt

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{ab},$$

wobei

$(a+b)/2$ das arithmetische Mittel

und

$\sqrt{ab}$ das geometrische Mittel

bezeichnet.

Beweis:

Da also $a>0$ und $b>0$ gilt

$$(a+b)/2 \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left((a+b)/2\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 4ab$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Schwarzsche Ungleichung

Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n,$ dann gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\,.$$

Beweis:

Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} 0 \le \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda^2 a_i^2 + 2\lambda\mu a_i b_i + \mu^2 b_i^2) \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\lambda\mu \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \end{aligned}$$

und mit

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \quad \text{und} \quad C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

folgt

$$\lambda^2 A + \mu^2 B + 2\lambda\mu C \ge 0 \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Zu zeigen ist nun

$$|C| \le \sqrt{AB}.$$

Setzen von

$$\lambda = \sqrt{B}, \quad \mu = \begin{cases} -\sqrt{A} & \text{für } C \ge 0 \\ \sqrt{A} & \text{für } C < 0 \end{cases}$$

liefert

$$\mu C = -\sqrt{A}\,|C|$$

und nach Einsetzen schließlich

$$2AB - 2\sqrt{AB}\,|C| \ge 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{AB} \ge |C|.$$

Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ gilt

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Beweis:

$n = 1$: $\quad |a_1| \leq |a_1|$

$$n \to n+1: \quad \left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|$$

Verallgemeinerte Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}.$$

Beispiel:

Es gelte $a_i = a$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{1}{n}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = \frac{1}{n} na = a$$

$$\geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

1.3 Zahlensysteme

Zur numerischen Rechnung werden die positiven reellen Zahlen in Zahlensystemen durch Aneinanderreihen von Ziffern, die bei Brüchen noch durch ein Komma getrennt werden, dargestellt. Die Ziffern sind bei Potenz- (Stellenwert-) Systemen von einer Basis B abgeleitet.

<u>Definition 1-15:</u>

$$a = z_n z_{n-1} \ldots z_1 z_0 \,, z_{-1} z_{-2} \ldots \Leftrightarrow$$
$$a = z_n B^n + z_{n-1} B^{n-1} + \ldots + z_1 B + z_0 B^0 + z_{-1} B^{-1} + z_{-2} B^{-2} \ldots$$

Neben dem

- Dezimalsystem $B = 10, \quad 0 \le z \le 9$

sind für einige Anwendungen, z.B. Computer, das

- Dualsystem $B = 2, \quad 0 \le z \le 1$
- Oktalsystem $B = 8, \quad 0 \le z \le 7$

und

- Sedezimalsystem $B = 16, \quad z \in \{0, 1, \ldots, 9, A, B, \ldots, F\}$

sinnvoll.

<u>Umrechnen von Dual-, Oktal- und Sedezimalzahlen in das Dezimalsystem</u>

<u>Beispiel:</u>

1) $(1001{,}01)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$
$= 8 + 1 + \frac{1}{4} = (9{,}25)_{10}$

2) $(31{,}5)_8 = 3 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 + 5 \cdot 8^{-1} = 24 + 1 + \frac{5}{8} = (25{,}625)_{10}$

3) $(\mathrm{E8BD})_{16} = 14 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 11 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = (59581)_{10}$

Umwandeln von Dezimalzahlen in das Dual-, Oktal- und Sedezimalsystem

Umwandlung ganzer Zahlen

Beispiel:

1) $(5)_{10} \to (x)_2$

$$\begin{aligned} 5:2 &= 2 \quad \text{Rest } 1 \\ 2:2 &= 1 \quad \text{Rest } 0 \\ 1:2 &= 0 \quad \text{Rest } 1 \end{aligned}$$

Schreibt man die Reste von unten nach oben auf, so erhält man $(5)_{10} = (101)_2$

2) $(22)_{10} \to (x)_2$

$$\begin{aligned} 22:2 &= 11 \quad \text{Rest } 0 \\ 11:2 &= 5 \quad \text{Rest } 1 \\ 5:2 &= 2 \quad \text{Rest } 1 \\ 2:2 &= 1 \quad \text{Rest } 0 \\ 1:2 &= 0 \quad \text{Rest } 1 \end{aligned}$$

also gilt $(22)_{10} = (10110)_2$, denn

$$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{(0\cdot 2+1)}_{1}\cdot 2+0\right)}_{2}\cdot 2+1\right)}_{5}\cdot 2+1\right)}_{11}\cdot 2+0 = 22$$

3) $(22)_{10} \to (x)_8$

$$\begin{aligned} 22:8 &= 2 \quad \text{Rest } 6 \\ 2:8 &= 0 \quad \text{Rest } 2 \end{aligned}$$

also gilt $(22)_{10} = (26)_8$

4) $(22)_{10} \rightarrow (x)_{16}$ $\quad 22:16 = 1 \;\text{ Rest }\; 6$

$\quad\quad 1:16 = 0 \;\text{ Rest }\; 1$

also gilt $(22)_{10} = (16)_{16}$

Umwandlung gebrochener Zahlen

Beispiel:

1) $(0,375)_{10} \rightarrow (x)_2$

$$0,375 \cdot 2 = 0 + 0,75$$
$$0,75 \cdot 2 = 1 + 0,5$$
$$0,5 \cdot 2 = 1 + 0,0$$

Schreibt man die ganzzahligen Anteile von oben nach unten auf, so erhält man $(0,375)_{10} = (0,011)_2$, denn

$$\underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{(0/2+1)}_{1}/2+1\right)}_{3/2}/2+0\right)}_{3/4}/2 = \frac{3}{8} = 0,375$$

2) $(0,1)_{10} \rightarrow (x)_2$

$$0,1 \cdot 2 = 0 + 0,2$$
$$0,2 \cdot 2 = 0 + 0,4$$
$$0,4 \cdot 2 = 0 + 0,8$$
$$0,8 \cdot 2 = 1 + 0,6$$
$$0,6 \cdot 2 = 1 + 0,2$$
$$\vdots$$

also gilt $(0,1)_{10} = (0,0\overline{0011})_2$

3) $(0{,}1)_{10} \rightarrow (x)_8$

$$\begin{aligned} 0{,}1 \cdot 8 &= 0 + 0{,}8 \\ 0{,}8 \cdot 8 &= 6 + 0{,}4 \\ 0{,}4 \cdot 8 &= 3 + 0{,}2 \\ 0{,}2 \cdot 8 &= 1 + 0{,}6 \\ 0{,}6 \cdot 8 &= 4 + 0{,}8 \\ &\vdots \end{aligned}$$

demzufolge gilt $(0{,}1)_{10} \rightarrow (0{,}0\overline{6314})_8$

4) $(0{,}1)_{10} \rightarrow (x)_{16}$

$$\begin{aligned} 0{,}1 \cdot 16 &= 1 + 0{,}6 \\ 0{,}6 \cdot 16 &= 9 + 0{,}6 \\ 0{,}6 \cdot 16 &= 9 + 0{,}6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

somit gilt $(0{,}1)_{10} = (0{,}1\overline{9})_{16}$

Rechnen mit Dualzahlen

Addition: $0+0=0, \quad 0+1=1, \quad 1+0=1, \quad 1+1=10$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Multiplikation: $0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1$

•	0	1
0	0	0
1	0	1

Beispiel:

Addition $(5+22=27)_{10}$

$$\begin{array}{r} 101 \\ +\ 10110 \\ \hline 11011 \end{array}$$

Subtraktion $(22-5=17)_{10}$

$$\begin{array}{r} 10110 \\ -\ \ 101 \\ \hline 10001 \end{array}$$

Multiplikation $(22\cdot 5=110)_{10}$

$$\begin{array}{r} 10110\cdot 101 \\ \hline 101100 \\ 10110 \\ \hline 1101110 \end{array}$$

Division $(22:5=4{,}4)_{10}$

$$\begin{array}{l} 10110:101=100{,}0\overline{1100} \\ \underline{101} \\ \ \ 01000 \\ \ \ \ \ \underline{101} \\ \ \ \ \ \ \ 110 \\ \ \ \ \ \ \ \underline{101} \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 1000 \end{array}$$

Umwandlung zwischen Dual-, Oktal- und Sedezimalsystem

Man wandelt eine Oktal- bzw. Sedezimalzahl in eine Dualzahl um, indem man jede Oktal-/ Sedezimalziffer als drei- bzw. vierstellige Dualzahl schreibt.

Man wandelt eine Dual- in eine Oktal- bzw. Sedezimalzahl um, indem man von rechts nach links Dreier- bzw. Vierergruppen bildet und diese durch entsprechende Oktal- bzw. Sedezimalziffern ersetzt.

Beispiel:

1) $(20)_{10}=(14)_{16}=(0001\,0100)_2=(24)_8$

2) $(100)_{10}=(64)_{16}=(0110\,0100)_2=(144)_8$

3) $(28)_{10}=(11100)_2=(1C)_{16}=(34)_8$

4) $(51)_{10}=(110011)_2=(33)_{16}=(63)_8$

1.4 Komplexe Zahlen

Es ist bekannt, dass das Polynom

$$p(x) = x^2 + 1$$

keine reellen Nullstellen besitzt. Soll dieses Polynom auch Nullstellen haben, so müssen wir den Bereich der reellen Zahlen erweitern. Dazu wird festgelegt, dass die Gleichung

$$x^2 + 1 = 0$$

von der imaginären Einheit j gelöst wird. Es gilt also

$$j^2 = -1$$

so dass $z_1 = j$ und $z_2 = -j$ die Nullstellen von

$$z^2 + 1 = 0 \qquad \begin{pmatrix} z_1^2 + 1 = j^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \\ z_2^2 + 1 = (-j)^2 + 1 = j^2 + 1 = -1 + 1 = 0 \end{pmatrix}$$

sind.

<u>Potenzen von j</u>

$$j^1 = j, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = j \cdot j^2 = -j, \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = 1$$

allgemein gilt:

$$j^{4n+1} = j, \quad j^{4n+2} = -1, \quad j^{4n+3} = -j, \quad j^{4n} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Umformen von $j^2 = -1$ liefert außerdem die Beziehungen

$$\underbrace{j = -\frac{1}{j}}_{\text{spielt in E-Technik eine wichtige Rolle}} \qquad \text{und} \qquad \underbrace{j = \sqrt{-1}}_{\text{wird manchmal als Definition für } j \text{ angegeben}}$$

<u>Definition 1-16:</u> (*Komplexe Zahlen*)
Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

$$z := x + jy \quad \text{komplexe Zahl}$$

mit

$$\mathrm{Re}(z) = x \qquad \text{Realteil von } z$$

und

$$\mathrm{Im}(z) = y \qquad \text{Imaginärteil von } z$$

Die Menge

$$\mathbb{C} = \{x + j\,y:\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen.

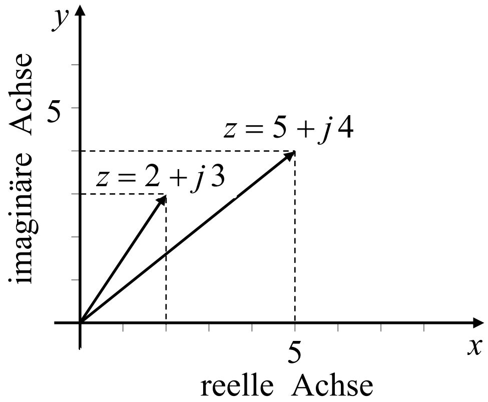
<u>Gaußsche Zahlenebene</u>

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Im}(z) = 0\} \subset \mathbb{C}$$

definiert die reelle und

$$\{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z) = 0\}$$

die imaginäre Achse.



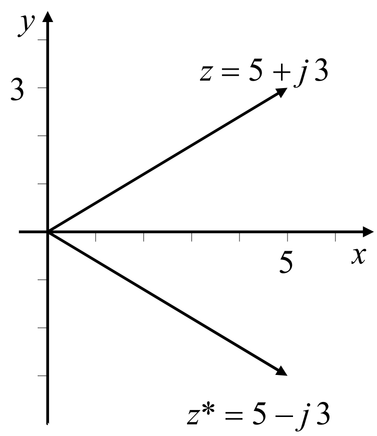
<u>Definition 1-17:</u> (*Gleichheit komplexer Zahlen*)
Zwei komplexe Zahlen gelten als gleich, wenn sowohl die Real- als auch die Imaginärteile übereinstimmen.

$$z_1 = x_1 + j\,y_1 \;\Leftrightarrow\; x_2 + j\,y_2 = z_2 \;\Leftrightarrow\; \{x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2\}$$

<u>Definition 1-18:</u> (*Konjugiert komplexe Zahlen*)
Es sei $z = x + j\,y \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$z^* := x - j\,y \text{ [1)]}$$

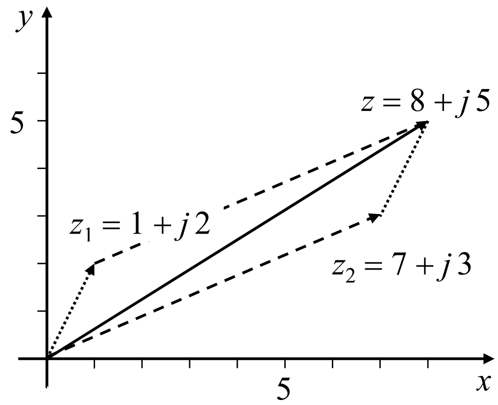
die zu z konjugiert komplexe Zahl.



[1)] In der Mathematik wird die konjugiert komplexe Zahl von z durch $\bar{z}$ symbolisiert.

Definition 1-19: (*Addition komplexer Zahlen*)
Für $z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C}$ sei

$$z = z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + j\,(y_1 + y_2)$$



Beispiel: (*Addition und Subtraktion konjugiert komplexer Zahlen*)
1) Addition

$$z + z^* = (x + jy) + (x - jy) = 2x \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2}(z + z^*) = \mathrm{Re}(z)$$

2) Subtraktion

$$z - z^* = (x + jy) - (x - jy) = 2jy \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2j}(z - z^*) = \mathrm{Im}(z)$$

Definition 1-20: (*Multiplikation komplexer Zahlen*)
Für $z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C}$ sei

$$\begin{aligned} z = z_1 \cdot z_2 &:= (x_1 + jy_1)\cdot(x_2 + jy_2) \\ &= x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2 \\ &= \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\mathrm{Re}\,z = x} + j\,\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\mathrm{Im}\,z = y} = x + jy \end{aligned}$$

Definition 1-21: (*Betrag komplexer Zahlen*)
Es sei $z = x + jy \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$$

der Betrag von z, wobei

$$\sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{(x+jy)\cdot(x-jy)} = \sqrt{(x^2+y^2)+j(-xy+xy)} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ausgenutzt wurde. $|z|$ entspricht der Länge des zugehörigen Vektors.

<u>Definition 1-22:</u> (*Division komplexer Zahlen*)
Für $z_1 = x_1 + jy_1 \in \mathbb{C}$ und $z_2 = x_2 + jy_2 \in \mathbb{C}$ sei

$$z = \frac{z_1}{z_2} := \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1+jy_1)\cdot(x_2-jy_2)}{\underbrace{(x_2+jy_2)}_{z_2}\cdot\underbrace{(x_2-jy_2)}_{z_2^*}}$$

$$= \frac{\left(x_1x_2 - y_1(-y_2)\right) + j\left(x_1(-y_2) + x_2y_1\right)}{x_2^2+y_2^2}$$

$$= \underbrace{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}_{\mathrm{Re}\,z = x} + j\underbrace{\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}}_{\mathrm{Im}\,z = y} = x + jy\,.$$

<u>Beispiel:</u>
Für $z_1 = 3 + j4$ und $z_2 = 1 - j2$ folgt

1) Addition

$$z = z_1 + z_2 = 3 + j4 + 1 - j2 = 4 + j2 = 2(2+j)$$

2) Subtraktion

$$z = z_1 - z_2 = 3 + j4 - 1 + j2 = 2 + j6 = 2(1+j3)$$

3) Multiplikation

$$z = z_1 \cdot z_2 = (3+j4)\cdot(1-j2) = (3+8) + j(4-6) = 11 - j2$$

4) Division

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3+j4}{1-j2} = \frac{(3+j4)\cdot(1+j2)}{(1-j2)\cdot(1+j2)} = \frac{(3-8)+j(6+4)}{1^2+2^2} = -1 + j2$$

Es gelten die folgenden Eigenschaften.

Satz 1-1:

Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

1) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

2) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

3) $(z_1 / z_2)^* = z_1^* / z_2^*$ mit $z_2 \neq 0$

4) $(z^*)^* = z$

5) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + z^*)$

6) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2j}(z - z^*)$

7) $z \cdot z^* = |z|^2$

8) $1/z = z^* / (z \cdot z^*) = z^* / |z|^2$

9) $|z^*| = |z|$

10) $|z| \geq 0$

11) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

12) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

13) $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$ mit $z_2 \neq 0$

14) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung

Beweis:

1) $(z_1+z_2)^* = (x_1+jy_1+x_2+jy_2)^* = \big((x_1+x_2)+j(y_1+y_2)\big)^*$

$$= (x_1+x_2)-j(y_1+y_2) = (x_1-jy_1)+(x_2-jy_2) = z_1^*+z_2^*$$

2) $(z_1\cdot z_2)^* = \big((x_1+jy_1)\cdot(x_2+jy_2)\big)^* = \big((x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)\big)^*$

$$= (x_1x_2-y_1y_2)-j(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$= (x_1-jy_1)\cdot(x_2-jy_2) = z_1^*\cdot z_2^*$$

3) $(z_1/z_2)^* = \big((x_1+jy_1)/(x_2+jy_2)\big)^* = \big((x_1+jy_1)\cdot(x_2-jy_2)/|z_2|^2\big)^*$

$$= (x_1+jy_1)^*\cdot(x_2-jy_2)^*/|z_2|^2$$

$$= \big(x_1-jy_1\big)\cdot(x_2+jy_2)/|z_2|^2 = z_1^*\cdot z_2/(z_2\cdot z_2^*) = z_1^*/z_2^*$$

4) $(z^*)^* = (x-jy)^* = x+jy = z$

5) $\frac{1}{2}(z+z^*) = \frac{1}{2}\big((x+jy)+(x-jy)\big) = x = \mathrm{Re}(z)$

6) $\frac{1}{2j}(z-z^*) = \frac{1}{2j}\big((x+jy)-(x-jy)\big) = y = \mathrm{Im}(z)$

7) $z\cdot z^* = (x+jy)\cdot(x-jy)$

$$= (x^2+y^2)+j(-xy+xy) = x^2+y^2 = |z|^2$$

8) $1/z = 1/(x+jy) = (x-jy)/\big((x+jy)\cdot(x-jy)\big) = z^*/|z|^2$

9) $|z^*| = |x-jy| = |x+j(-y)| = \sqrt{x^2+(-y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

10) $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0$

11) $|z| = 0 \Leftrightarrow \{x=0 \wedge y=0\} \Leftrightarrow z=0$

12) $|z_1\cdot z_2| = \big|(x_1+jy_1)\cdot(x_2+jy_2)\big| = \big|(x_1x_2-y_1y_2)+j(x_1y_2+x_2y_1)\big|$

$$= \sqrt{(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_1^2y_2^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2}$$
$$= \sqrt{x_1^2x_2^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2}$$
$$= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)\cdot(x_2^2 + y_2^2)} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = |z_1|\cdot|z_2|$$

13) $|z_1/z_2| = |z_1z_2^*/(z_2z_2^*)| = |z_1z_2^*/|z_2|^2| = |z_1z_2^*|/|z_2|^2$
$$= |z_1|\cdot|z_2^*|/|z_2|^2 = |z_1|\cdot|z_2|/|z_2|^2 = |z_1|/|z_2|$$

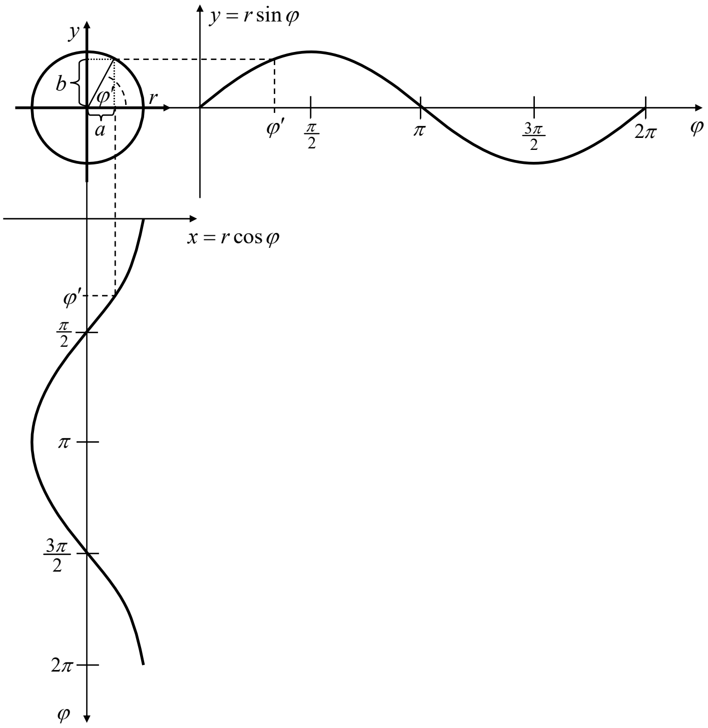
14) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2| \;\Rightarrow\; |z_1 + z_2|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\cdot(z_1 + z_2)^* = (z_1 + z_2)\cdot(z_1^* + z_2^*)$$
$$= z_1z_1^* + z_2z_2^* + z_1z_2^* + z_1^*z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1z_2^*)$$
$$\left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2|$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\cdot|z_2^*| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1z_2^*|,$$

da $2\,\mathrm{Re}(z_1z_2^*) \le 2|z_1z_2^*|$ folgt die Richtigkeit der Behauptung.

<u>Definition der Kreisfunktionen</u> (trigonometrische Funktionen)

Graph der Sinus- und Kosinusfunktion



<u>Es gilt:</u>

$r^2 = a^2 + b^2$ (Pythagoras)

r = Hypotenuse

a = Ankathete

b = Gegenkathete

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{b}{r} = \sin\varphi$$
$$\frac{a}{b} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\varphi$$
$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$$

Eigenschaften

1) $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ ungerade Funktion

2) $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ gerade Funktion

3)
$$\left.\begin{aligned} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\varphi \\ \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\varphi \end{aligned}\right\} \cos\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin\varphi$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\varphi \\ \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cos\varphi \end{aligned}\right\} \sin\left(\varphi \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\varphi$$

4)
$$\left.\begin{aligned} \sin(\varphi + 2k\pi) &= \sin\varphi \\ \cos(\varphi + 2k\pi) &= \cos\varphi \end{aligned}\right\} \text{für } k \in \mathbb{Z}$$
Periodizität

5) $(\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ Pythagoras

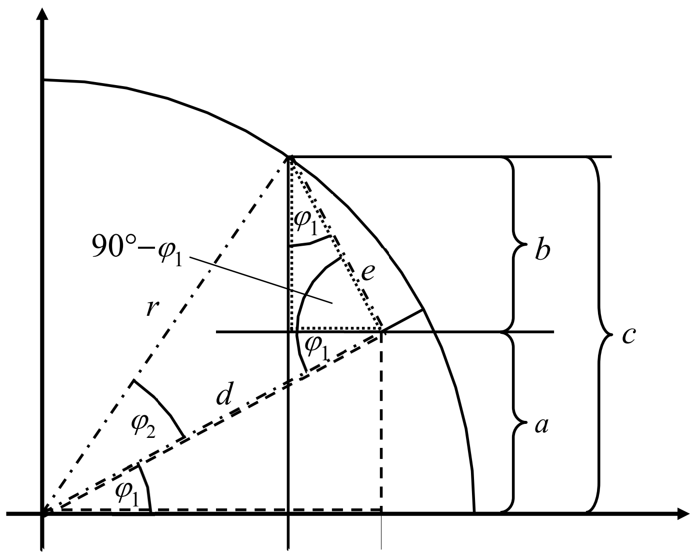
Winkel		Winkelfunktionen			
[rad]	[deg]	sin	cos	tan	cot
0	0	0	1	0	-
$\pi/6$	30°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\pi/4$	45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	1
$\pi/3$	60°	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$\pi/2$	90°	1	0	-	0

Additionstheoreme

Es gelten

1) $\sin(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \pm \sin\varphi_2 \cos\varphi_1$

2) $\cos(\varphi_1 \pm \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \mp \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$



Beweis:

1) $$\frac{c}{r} = \frac{a+b}{r} = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{a}{d} = \sin\varphi_1, \quad \frac{d}{r} = \cos\varphi_2 \;\Rightarrow\; \frac{a}{r} = \frac{a}{d}\cdot\frac{d}{r} = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2$$

$$\frac{b}{e} = \cos\varphi_1, \quad \frac{e}{r} = \sin\varphi_2 \;\Rightarrow\; \frac{b}{r} = \frac{e}{r}\cdot\frac{b}{e} = \sin\varphi_2 \cos\varphi_1$$

$$\Rightarrow\; \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r} = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1$$

bzw.

$$\begin{aligned}\sin(\varphi_1 - \varphi_2) &= \sin\big(\varphi_1 + (-\varphi_2)\big)\\ &= \sin\varphi_1 \cos(-\varphi_2) + \sin(-\varphi_2)\cos\varphi_1\\ &= \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cos\varphi_1\end{aligned}$$

2) $$\cos(\varphi_1+\varphi_2) = \sin\left(\varphi_1+\varphi_2+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)+\varphi_2\right)$$

$$= \sin\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

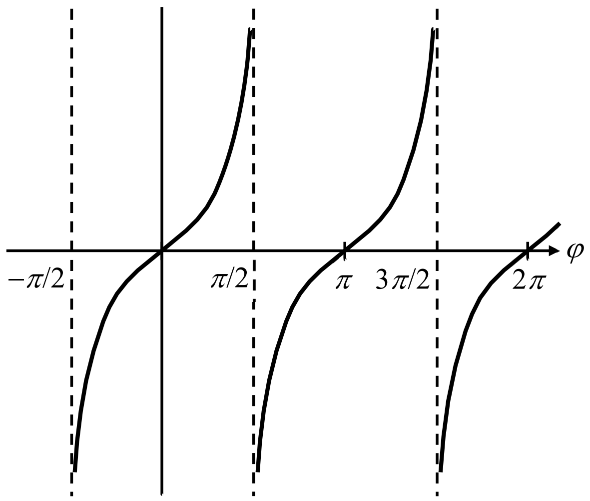
bzw.

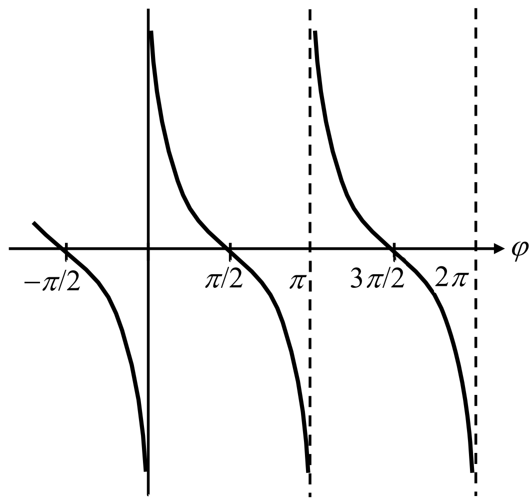
$$\cos(\varphi_1-\varphi_2) = \cos\big(\varphi_1+(-\varphi_2)\big)$$

$$= \cos\varphi_1\cos(-\varphi_2) - \sin(-\varphi_2)\sin\varphi_1$$

$$= \cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2$$

Graphen der Tangens- und Kotangensfunktion





$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\cot\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$$

Umkehrfunktionen

$y = \cos x$	und deren Umkehrfunktion	$y = \arccos x$
$\mathbb{R} \to [-1, 1]$		$[-1, 1] \to [0, \pi]$
$y = \sin x$	und deren Umkehrfunktion	$y = \arcsin x$
$\mathbb{R} \to [-1, 1]$		$[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$
$y = \tan x$	und deren Umkehrfunktion	$y = \arctan x$
$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$
$y = \cot x$	und deren Umkehrfunktion	$y = \operatorname{arccot} x$
$\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$		$\mathbb{R} \to (0, \pi)$

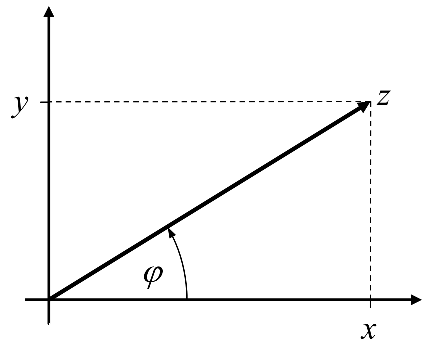
Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Für $z = x + jy \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$ gilt die trigonometrische Darstellung

$$z = x + jy = r\cos\varphi + jr\sin\varphi = r(\cos\varphi + j\sin\varphi)$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



und

$$\varphi = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{für } x > 0 \\ \pi/2 & \text{für } y \geq 0 \wedge x = 0 \\ -\pi/2 & \text{für } y < 0 \wedge x = 0 \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

die hier ohne Beweis angegeben wird, erhält man die exponentielle Darstellung komplexer Zahlen gemäß

$$z = r\,e^{j\varphi}$$

und es gilt

$$e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = e^{j(\varphi_1+\varphi_2)},$$

denn

$$\begin{aligned} e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} &= (\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \\ &= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + j(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1) \\ &= \cos(\varphi_1+\varphi_2) + j\sin(\varphi_1+\varphi_2) \\ &= e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

<u>Satz 1-2:</u>

Für $z = r\,e^{j\varphi}, z_1 = r_1\,e^{j\varphi_1}, z_2 = r_2\,e^{j\varphi_2} \in \mathbb{C}$ gilt

1) $z^* = r e^{-j\varphi}$

2) $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$

3) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} e^{-j\varphi}$

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$

5) $z^n = r^n\, e^{jn\varphi}$

6) $z^{-n} = \dfrac{1}{r^n} e^{-jn\varphi}$

Beweis:

1) $$z^* = r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi)^* = r\,(\cos\varphi - j\sin\varphi)$$
$$= r\big(\cos(-\varphi) + j\sin(-\varphi)\big) = r\,e^{-j\varphi}$$

2) $$z_1 z_2 = r_1\,e^{j\varphi_1}\,r_2\,e^{j\varphi_2} = r_1\,r_2\,e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

3) $$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{r^2}\,r\,e^{-j\varphi} = \frac{1}{r}\,e^{-j\varphi}$$

4) $$\frac{z_1}{z_2} = z_1\,\frac{1}{z_2} = r_1\,e^{j\varphi_1}\,\frac{1}{r_2}\,e^{-j\varphi_2} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

5) $n=1$: $\quad z = r\,e^{j\varphi}$

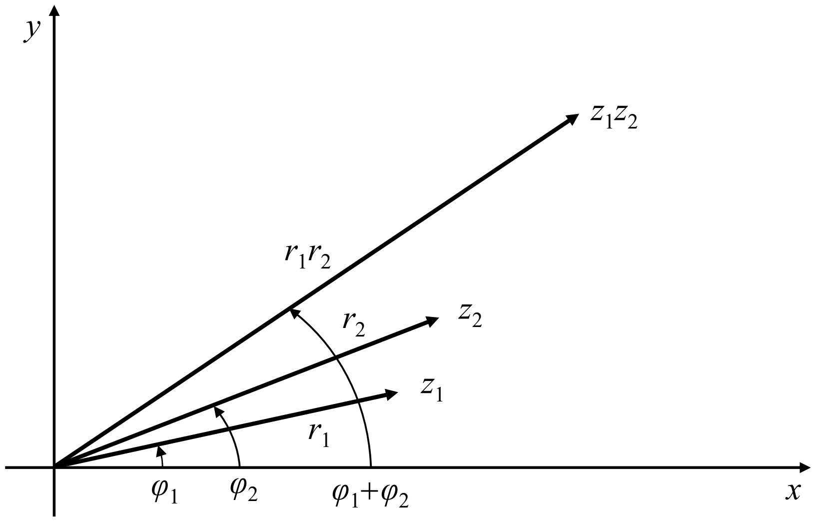
$n \to n+1$: $\quad z^{n+1} = z\,z^n = r\,e^{j\varphi}\,r^n\,e^{jn\varphi} = r^{n+1}\,e^{j(n+1)\varphi}$

6) $$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n\,e^{jn\varphi}}\cdot\frac{e^{-jn\varphi}}{e^{-jn\varphi}} = \frac{1}{r^n}\,e^{-jn\varphi}$$

Formel von Moivre

$$(e^{j\varphi})^n = e^{jn\varphi} = \cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi) = (\cos\varphi + j\sin\varphi)^n$$

Darstellung der Multiplikation



Wurzeln komplexer Zahlen

Es sei $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Frage: Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $z^n = a$, d.h. welche z sind Nullstellen des Polynoms $z^n - a = 0$?

Mit $a = r\,e^{j\varphi}$ und $z = p\,e^{j\vartheta}$ folgt

$$z^n = p^n\,e^{jn\vartheta} = r\,e^{j\varphi}$$

$$\Rightarrow\ p^n = r \text{ und } n\vartheta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow\ p = \sqrt[n]{r} \text{ und } \vartheta = (\varphi + 2k\pi)/n.$$

Also sind

$$z_k = \sqrt[n]{r}\,e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad \text{mit } k = 0,1,\ldots,n-1.$$

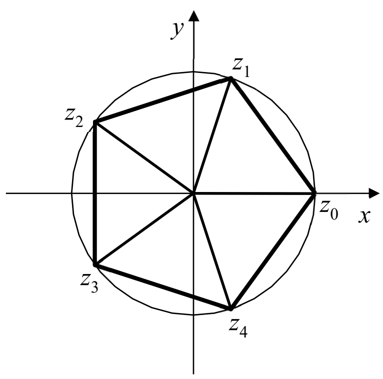
Lösungen (Wurzeln) der Gleichung $z^n = a = r\,e^{j\varphi}$. Alle anderen k führen zu gleichen Werten, denn

$$z_n = z_0,\ z_{n+1} = z_1 \text{ usw.}$$

Diese n Wurzeln von a bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks auf dem Kreis mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$.

Beispiel:

1) $z^5 = 1$, d.h. $a = 1 = 1e^{j0}$ und $n = 5$,



$$\Rightarrow\ z_k = \sqrt[5]{1}\,e^{j\frac{0+2k\pi}{5}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + j\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$$

und für $k = 0,1,\ldots,4$ gilt

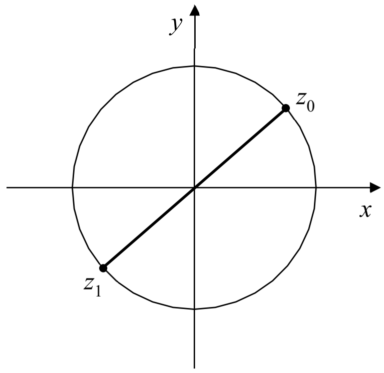
$$z_0 = 1,\ z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right),\ z_2 = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + j\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + j\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right),\ z_4 = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + j\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right).$$

2) $z^2 = j$, d.h. $a = j = 1e^{j\pi/2}$ und $n = 2$,

$$\Rightarrow\; z_k = \sqrt[2]{1}\, e^{j\frac{\pi/2+2k\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

und für $k = 0,1$ gilt



$$z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + j\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j).$$

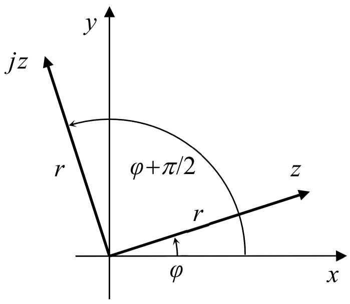
Beispiel:

Multiplikation einer komplexen Zahl mit j bedeutet geometrisch eine Drehung des Zeigers um $+90°$.

$$z = r\,e^{j\varphi},$$

$$j = 1e^{j\pi/2}$$

$$\Rightarrow\; j\cdot z = r\,e^{j(\varphi+\pi/2)}$$



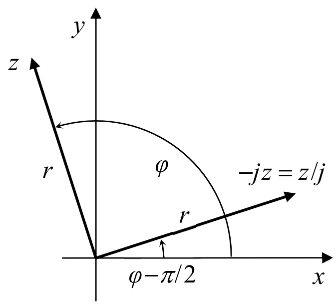
Beispiel:

Multiplikation (Division) einer komplexen Zahl mit $-j$ (durch j) bedeutet geometrisch eine Drehung um $-90°$.

$$z = r\,e^{j\varphi},$$

$$-j = 1e^{-j\pi/2} = 1/j$$

$$\Rightarrow\; -j\cdot z = r\,e^{j(\varphi-\pi/2)}$$



Aufgabe 1-1: Beweisen Sie

a) $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ (Ungleichung für geo- und arithmetisches Mittel)

b) $\left(a_1 b_1 + a_2 b_2\right)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$ (Schwarzsche Ungleichung)

Aufgabe 1-2: Beweisen Sie durch vollständige Induktion

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^k} = 2 - \dfrac{n+2}{2^n}$

Aufgabe 1-3:

Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $x(x^2 + 3x - 1) > 3$

b) $\dfrac{2x}{x+4} < x$

Aufgabe 1-4:

Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $|x-3| \leq |2x+1|$

b) $|x+1| + |x-2| < 4$

Aufgabe 1-5: Man berechne $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $z_1 : z_2$, $z_1^* \cdot z_2 z$, $|z_1|$ und $|z_2|$

a) $z_1 = 1 + j\sqrt{3}$ $\quad z_2 = 1 - j$

b) $z_1 = 2 + j3$ $\quad z_2 = 3 - j5$

c) $z_1 = 4 - j5$ $\quad z_2 = 4 + j5$

d) $z_1 = j$ $\quad z_2 = -2 - j4$

Aufgabe 1-6: Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $z = x + jy$.

a) $z = e^{j3\pi}$

b) $z = e^{-j\pi/3}$

c) $z = e^{j11\pi/6}$

d) $z = e^{j(3\pi/2+2n\pi)},\ n \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 1-7: Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der exponentiellen Form dar.

a) $z = j2$

b) $z = -1 - j$

c) $z = 3 - j\sqrt{3}$

Aufgabe 1-8: Man berechne Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument von

a) $z = \left(\dfrac{2-j}{1-\left(\left(1+j\right)^2\right)^*}\right)^9, \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

b) $z = \left(\dfrac{1+j}{1-j}\right)^{99}$

c) $z = \left(\dfrac{1}{2}\left(1 + j\sqrt{3}\right)\right)^n$

Aufgabe 1-9: Ermitteln Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen

a) $z^3 = 3 - j\sqrt{3}$

b) $z^4 = 81$

Aufgabe 1- 10: In welchen Bereichen der Gaußschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen z, für die die folgenden Beziehungen erfüllt sind.

a) $|z| < 1 \wedge |z-1| < 1$

b) $z \cdot z^* = 1$

c) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}$

d) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 1$