HSB
Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 1

Kapitel 2

Lineare Algebra

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Institute of Wateracoustics, Sonar Engineering and Signal Theory
IWSS
Hochschule Bremen

Höhere Mathematik 1

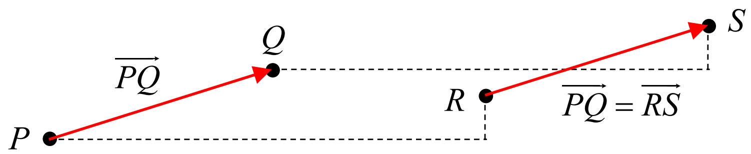
Kapitel 2

Inhaltsverzeichnis

2 Lineare Algebra

2.1 Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Zu je zwei Punkten P und Q des Raumes gibt es genau eine Parallelverschiebung, die P nach Q überführt. Diese Verschiebung wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet und heißt "Vektor von P nach Q". Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ wird durch einen von P nach Q zeigenden Pfeil dargestellt.

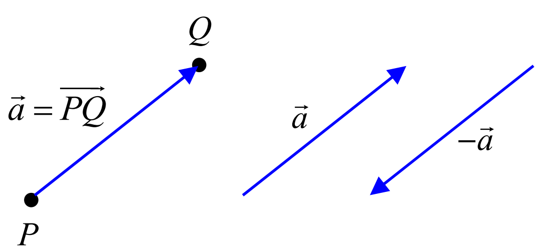


Wird unter $\overrightarrow{PQ}$ ein anderer Punkt R nach S verschoben, so hat offenbar $\overrightarrow{RS}$ dieselbe Wirkung wie $\overrightarrow{PQ}$, d.h.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS}$$

Zwei gleich lange und gleich gerichtete Pfeile im Raum stellen folglich denselben Vektor dar. D.h. ein Vektor kann im Raum frei parallel verschoben werden. Er ist an keinen festen Anfangspunkt gebunden.

Es sei $\overrightarrow{PQ} = \vec{a}$, dann wird der gleich lange, entgegengesetzt gerichtete Vektor mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

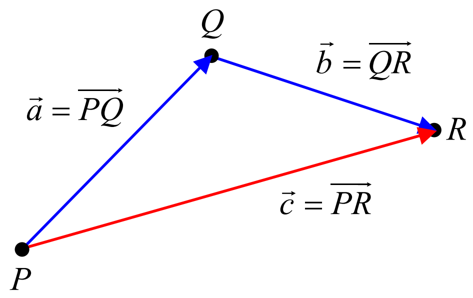


Der Vektor $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$ für jeden Punkt P bezeichnet den Nullvektor (die Verschiebung des Raumes bei der gar nichts bewegt wird).

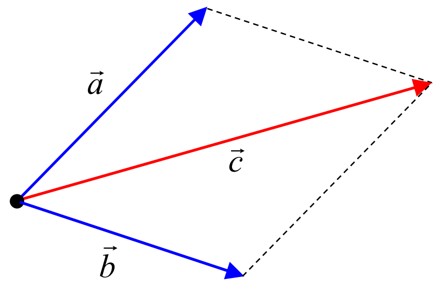
2.1.1 Addition von Vektoren

Zwei nacheinander ausgeführte Parallelverschiebungen $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{QR}$ ergeben insgesamt die Parallelverschiebung $\vec{c} = \overrightarrow{PR}$. Man nennt den Vektor $\vec{c}$ die Summe von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$



a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$



b) Parallelogrammregel

<u>Rechenregeln:</u>

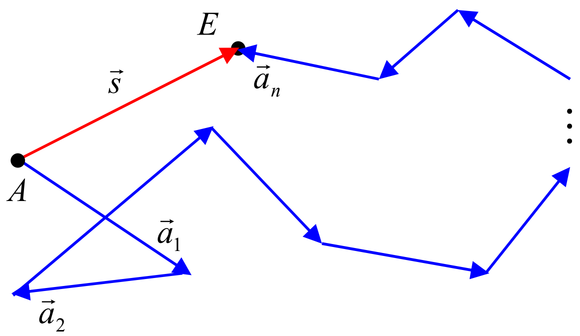
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ Kommutativgesetz

$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ Assoziativgesetz

Die Summe $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$ ist der Vektor $\vec{s}$, der vom Anfangspunkt A bis zum Endpunkt E einer aus $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ gebildeten Vektorkette zeigt.

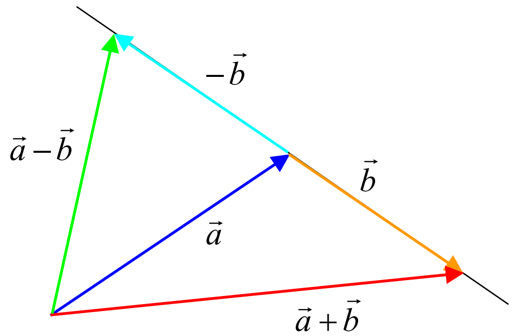
$$\vec{s} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$



Die Differenz von Vektoren ergibt sich aus

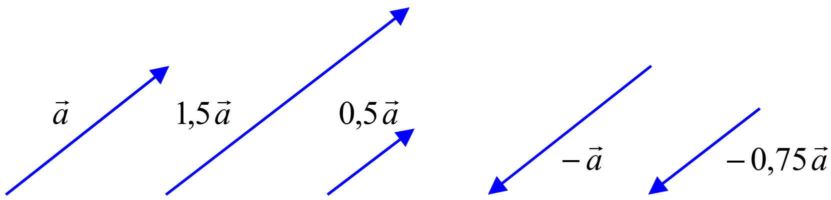
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

Vektordifferenz



2.1.2 Multiplizieren eines Vektors mit einem Skalar (Zahl)

Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ und einem Vektor $\vec{a}$ bezeichnet $\lambda\vec{a}$ den Vektor, der dieselbe $(\lambda > 0)$ oder die entgegengesetzte $(\lambda < 0)$ Richtung wie $\vec{a}$ hat und die $|\lambda|$ - fache Länge von $\vec{a}$ besitzt.



<u>Rechenregeln:</u> $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$ Assoziativgesetz

$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ Distributivgesetz

$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ Distributivgesetz

2.1.3 Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors $\vec{a}$, d.h. für $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ die Länge der Strecke $\overline{PQ}$, nennt man seinen Betrag und schreibt dafür $|\vec{a}|$.

Rechenregeln: $\lambda \in \mathbb{R}$

$|\lambda \vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$ insbesondere $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$

$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$ Dreiecksungleichung

Der Nullvektor hat keine positive Länge, d.h. $\left|\vec{0}\right| = 0.$ Ein Vektor vom Betrag 1 heißt Einheitsvektor. Zu jedem Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gehört in Richtung $\vec{a}$ der Einheitsvektor $\vec{a}_e = \vec{a}/|\vec{a}|$

2.1.4 Vektoren im Koordinatensystem

Wir legen im Raum ein kartesisches Koordinatensystem mit einem Ursprung O fest. In Richtung der positiven x-,y- und z-Achse sind dadurch dann gleichzeitig die Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \quad \text{oder} \quad \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$$

gegeben.

Bezeichnungen

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: kartesische Basis

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: Koordinatensystem

Ortsvektor

Der Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ heißt Ortsvektor des Punktes $A = (a_1, a_2, a_3).$ Er ist eindeutig als Summe

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

darstellbar. Abkürzend schreibt man bei festem Koordinatensystem

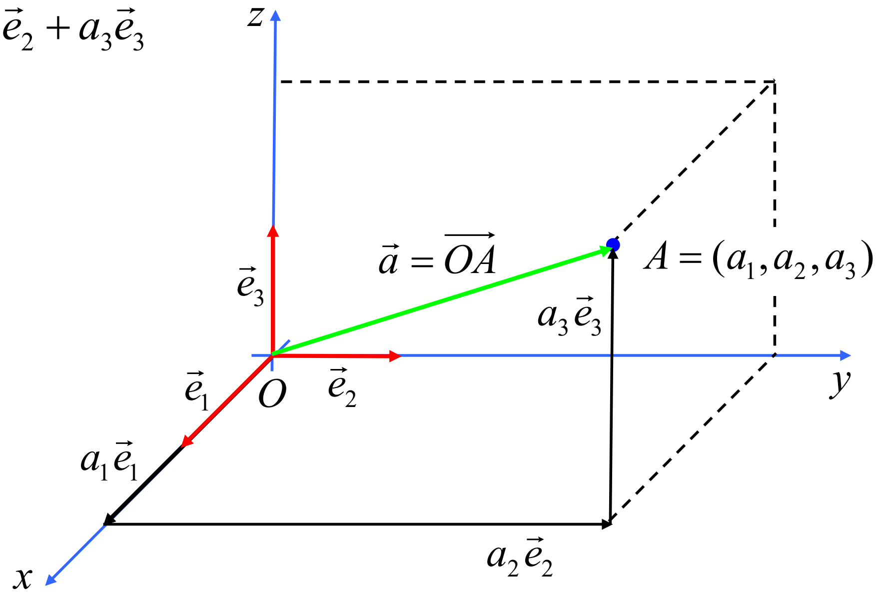
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3.$$

Bezeichnungen

$a_i\vec{e}_i$: Komponenten von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{e}_i$ $(i=1,2,3)$

$a_i \in \mathbb{R}$: Koordinaten des Vektors $\vec{a}$ bzgl. $(O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$



Vektor in allgemeiner Lage

Für $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ mit $P=(p_1,p_2,p_3)$ und $Q=(q_1,q_2,q_3)$ gilt

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} &= q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 + q_3\vec{e}_3 - p_1\vec{e}_1 - p_2\vec{e}_2 - p_3\vec{e}_3 \\ &= (q_1-p_1)\vec{e}_1 + (q_2-p_2)\vec{e}_2 + (q_3-p_3)\vec{e}_3\end{aligned}$$

und in Koordinatendarstellung

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1-p_1 \\ q_2-p_2 \\ q_3-p_3 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad P=(p_1,p_2,p_3),\ Q=(q_1,q_2,q_3).$$

Addition von Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar in Koordinatendarstellung

Aus

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i, \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\vec{e}_i$$

folgt mit

$$\vec{a}+\vec{b}=\sum_{i=1}^{3}(a_i+b_i)\vec{e}_i, \quad \lambda\vec{a}=\sum_{i=1}^{3}(\lambda a_i)\vec{e}_i$$

in Koordinatendarstellung

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}, \quad \lambda\vec{a}=\lambda\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}.$$

<u>Betrag eines in Koordinatendarstellung gegebenen Vektors</u>

Mit dem Satz des Pythagoras folgt

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \quad \text{für} \quad \vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3.$$

<u>Beispiel:</u>

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}0,5\\-1\\6\end{pmatrix}$$

1) $$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0,5\\-1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0,5\\0-1\\-3+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,5\\-1\\3\end{pmatrix}$$

2) $$5\vec{a}=5\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 2\\5\cdot 0\\5\cdot(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\0\\-15\end{pmatrix}$$

3) $$2\vec{a}-3\vec{b}=2\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0,5\\-1\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2-3\cdot 0,5\\2\cdot 0-3\cdot(-1)\\2\cdot(-3)-3\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,5\\3\\-24\end{pmatrix}$$

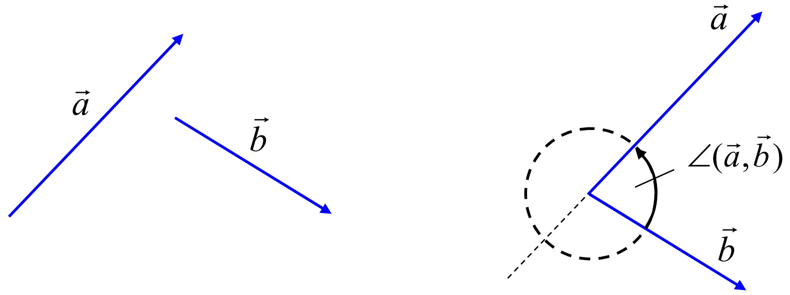
4) $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{0{,}5^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{37{,}25}$

$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{2{,}5^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{16{,}25}$

2.1.5 Winkel zwischen Vektoren

Trägt man zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ von einem Punkt p aus ab, dann bezeichnet man den kleineren der beiden positiv gemessenen Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und schreibt

$$\angle(\vec{a},\vec{b}) \quad \text{mit} \quad 0 \le \angle(\vec{a},\vec{b}) \le \pi.$$



<u>Rechenregeln:</u> $\lambda \in \mathbb{R}$

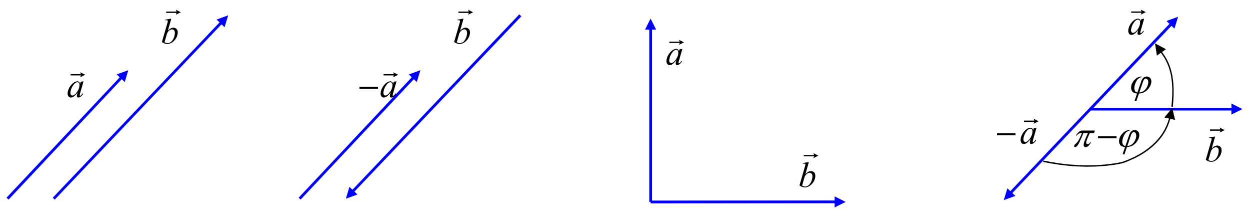
a) $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \angle(\vec{b},\vec{a})$

b) $\angle(\vec{a},\lambda\,\vec{a}) = 0, \quad \lambda > 0$

c) $\angle(\vec{a},\lambda\,\vec{a}) = \pi, \quad \lambda < 0$

d) $\angle(-\vec{a},\vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a},\vec{b})$

<u>Beispiel:</u>



a) $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 0$ b) $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \pi$ c) $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/2$ d) $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \varphi$

$\angle(-\vec{a},\vec{b}) = \pi - \varphi$

Man nennt den Vektor $\vec{a}$ orthogonal (senkrecht) zu $\vec{b}$ und schreibt $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\angle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/2$.

Für den Nullvektor definiert man $\vec{0} \perp \vec{a}$ für alle Vektoren $\vec{a}$, d.h. der Nullvektor ist orthogonal zu jedem beliebigen Vektor.

2.1.6 Skalarprodukt

Definition 2-1: (*Skalarprodukt*)
Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (inneres Produkt) ist definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\angle(\vec{a},\vec{b})\right).$$

(Alternative Schreibweisen für $\vec{a} \cdot \vec{b}$ sind $\vec{a}\vec{b}$ oder $<\vec{a},\vec{b}>$)

Beispiel:
Für die Vektoren einer kartesischen Basis $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ gilt

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 \quad \text{(da Einheitsvektoren)}$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0 \quad \text{(da paarweise orthogonal)}$$

Rechenregeln:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ Kommutativgesetz

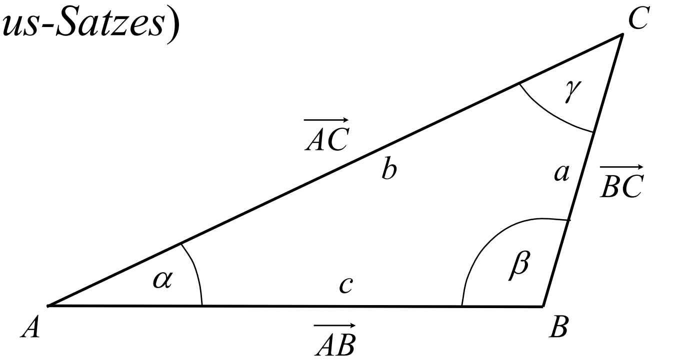
b) $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ Distributivgesetz

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ Orthogonalitätstest

e) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Anwendung: (*Beweis des Kosinus-Satzes*)
Im Dreieck gilt:



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\alpha = \angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

Kosinus-Satz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right|^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \\ &= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\left(\angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

Die Koordinatendarstellung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bzgl. einer kartesischen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, d.h.

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

ermöglicht die einfache Berechnung $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\angle(\vec{a}, \vec{b})$:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \cdot (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$
$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

b) Aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\left(\angle(\vec{a}, \vec{b})\right)$ folgt mit

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \left|\vec{b}\right| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

nach umformen

$$\cos\left(\angle(\vec{a},\vec{b})\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\quad \text{für } \vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}.$$

Die Koordinatendarstellung der Basisvektoren lautet

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Für einen beliebigen Vektor

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

gilt stets

$$\vec{a}\cdot\vec{e}_i=|\vec{a}|\cos\left(\angle(\vec{a},\vec{e}_i)\right)=a_i.$$

Damit erhält man

$$\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{e}_1)\vec{e}_1+(\vec{a}\cdot\vec{e}_2)\vec{e}_2+(\vec{a}\cdot\vec{e}_3)\vec{e}_3.$$

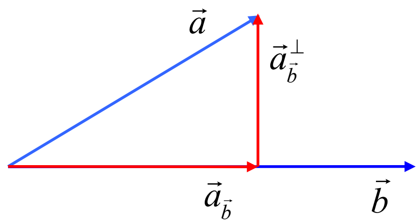
Die Faktoren

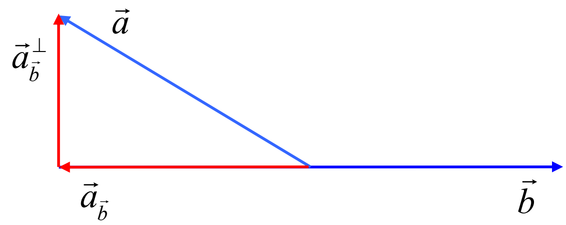
$$\cos\left(\angle(\vec{a},\vec{e}_i)\right)=\frac{a_i}{|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_i|}=\frac{a_i}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

nennt man Richtungskosinus von $\vec{a}$, insbesondere gilt

$$\underbrace{\cos^2\left(\angle(\vec{a},\vec{e}_1)\right)}_{a_1^2/|\vec{a}|^2}+\underbrace{\cos^2\left(\angle(\vec{a},\vec{e}_2)\right)}_{a_2^2/|\vec{a}|^2}+\underbrace{\cos^2\left(\angle(\vec{a},\vec{e}_3)\right)}_{a_3^2/|\vec{a}|^2}=1.$$

Anwendung: Orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$ ($\vec{b}\neq\vec{0}$)





$\vec{a}=\vec{a}_{\vec{b}}+\vec{a}_{\vec{b}}^{\perp}$ mit den Komponenten in Richtung $\vec{b}$: $\quad \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

orthogonal zu $\vec{b}$: $\quad \vec{a}_{\vec{b}}^{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{b}} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$

Beispiel:

1) In jeder kartesischen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ gilt für

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

einfach

$$\begin{aligned}
\vec{a}_{\vec{e}_1} &= a_1\vec{e}_1, & \vec{a}_{\vec{e}_1}^{\perp} &= a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \\
\vec{a}_{\vec{e}_2} &= a_2\vec{e}_2, & \vec{a}_{\vec{e}_2}^{\perp} &= a_1\vec{e}_1 + a_3\vec{e}_3 \\
\vec{a}_{\vec{e}_3} &= a_3\vec{e}_3, & \vec{a}_{\vec{e}_3}^{\perp} &= a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2
\end{aligned}$$

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\vec{b}|^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 = 2$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-1) + 3\cdot 0 + 1\cdot 1 = -1$

$$\Rightarrow \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{-1}{2}\vec{b} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_{\vec{b}}^{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$

2.1.7 Vektorprodukt

Definition 2-2: (*Vektorprodukt*)

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (äußeres Produkt genannt) ist definiert als derjenige Vektor

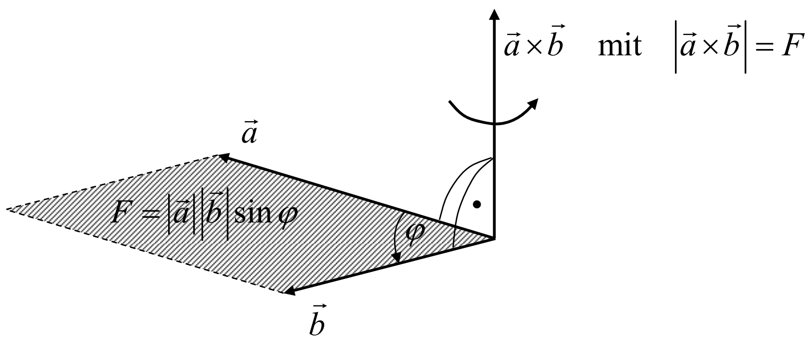
a) der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, d.h.

$$\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}, \ \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b},$$

b) der mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Rechtssystem darstellt, d.h. $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ bilden ein Rechtssystem (Rechtehand- bzw. Rechtsschraubenregel),

c) dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

$$F = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\left(\angle(\vec{a}, \vec{b})\right)$$



Rechtehandregel

$\vec{a} \Rightarrow$ Zeigefinger

$\vec{b} \Rightarrow$ Mittelfinger

$\vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow$ Daumen

Rechtsschraubenregel

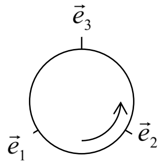
$\vec{a}$ über den kleineren Winkel gemäß einer Rechtsschraube nach $\vec{b}$ drehen.

$\vec{a} \times \vec{b}$ zeigt dann in Richtung der Schraubenbewegung.

Beispiel:

Für die Vektoren einer kartesischen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ gilt

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0} & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0} & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0} \end{array}$$



und falls $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{a} &= -a_3\vec{e}_2 + a_2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{a} &= a_3\vec{e}_1 - a_1\vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \times \vec{a} &= -a_2\vec{e}_1 + a_1\vec{e}_2 \end{aligned}$$

Rechenregeln:

a) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ insbesondere $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

b) $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

c) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Distributivgesetz

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

d) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \vee \vec{a} \parallel \vec{b}$ Parallelitätskriterium

e) $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 \left|\vec{b}\right|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

In einer kartesischen Basis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ergibt sich für

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad \text{und} \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zu

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \\ &= a_1b_1\,(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_1b_2\,(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + a_1b_3\,(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad a_2b_1\,(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + a_2b_2\,(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + a_2b_3\,(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\ &\quad a_3b_1\,(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + a_3b_2\,(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + a_3b_3\,(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\,\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\vec{e}_3 \end{aligned}$$

und in Koordinatendarstellung

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Als Gedächtnisstütze schreibt man das Vektorprodukt in Form einer 3reihigen Determinante, die dann nach der Sarrus-Regel auszuwerten ist, d.h.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Sarrus-Regel

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ - & - & - & & \end{array} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

Allgemeine Determinantenberechnung

$$\det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \vec{e}_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \vec{e}_3$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_3$$

Beispiel: (*Flächeninhalt eines Dreiecks*)
Das Dreieck sei durch die Eckpunkte $A = (1,2,3)$, $B = (-2,0,4)$ und $C = (-1,-1,2)$ gegeben.

$$F = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \times (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \times \left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right|$$

$$F = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|(2+3)\,\vec{e}_1 - (3+2)\,\vec{e}_2 + (9-4)\,\vec{e}_3\right|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5^2+5^2+5^2} = 2{,}5\sqrt{3}$$

2.1.8 Spatprodukt

<u>Definition 2-3:</u> (*Spatprodukt*)

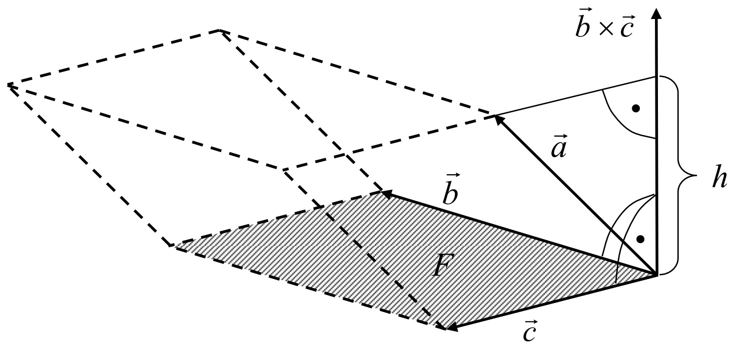
Das Spatprodukt $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ist definiert durch

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

<u>Satz 2-1:</u>

Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Parallelepiped (auch Spat genannt) hat das Volumen

$$V = \left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right| = \left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|$$



<u>Beweis:</u>

Die Grundfläche mit den Kanten $\vec{b}$ und $\vec{c}$ hat den Flächeninhalt

$$F = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|.$$

Die Höhe h des Parallelepipeds bzgl. der Grundfläche ist gegeben durch

$$h = \left|\vec{a}_{\vec{b}\times\vec{c}}\right|,$$

d.h. Komponente von $\vec{a}$ in Richtung des senkrecht auf der Grundfläche stehenden Vektors $\vec{b}\times\vec{c}$. Mit

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

s. orthogonale Zerlegung, auf h angewendet folgt

$$h = \left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^2}\vec{b}\times\vec{c}\right| = \left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right|$$

und schließlich für das Volumen

$$V = F\cdot h = \left|\vec{b}\times\vec{c}\right|\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|}\right| = \left|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\right|.$$

Für $\vec{a},\vec{b}$ und $\vec{c}$ in kartesischen Koordinaten, d.h.

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \sum_{i=1}^{3} c_i\vec{e}_i = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

berechnet sich das Spatprodukt zu

$$\begin{aligned}[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) \\ &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot\big((b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\times(c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3)\big) \\ &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot\big((b_2c_3 - b_3c_2)\vec{e}_1 + (b_3c_1 - b_1c_3)\vec{e}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{e}_3\big) \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= 1\big(0(-2) - (-2)(-1)\big) + 2\big((-2)2 - (-2)(-2)\big) + 3\big((-2)(-1) - 0\cdot 2\big) \\ &= (-2) + (-16) + 6 = -12 \;\Rightarrow\; V_{Spat} = \left|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\right| = \left|-12\right| = 12\end{aligned}$$

Das Spatprodukt ist der Wert einer dreireihigen Determinante, d.h.

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

<u>Sarrus-Regel</u>

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_1 & c_2 \\ - & - & - & & \end{array} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

<u>Allgemeine Determinantenberechnung</u>

$$\det\begin{pmatrix} \overset{+}{a_1} & \overset{-}{a_2} & \overset{+}{a_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \det\begin{pmatrix} \overset{+}{b_2} & \overset{-}{b_3} \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix} - a_2 \det\begin{pmatrix} \overset{+}{b_1} & \overset{-}{b_3} \\ c_1 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det\begin{pmatrix} \overset{+}{b_1} & \overset{-}{b_2} \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

2.2 Lineare Räume

In der Mathematik trifft man häufig auf Mengen, deren Elemente man addieren und mit einem Skalar multiplizieren kann, so z.B. die Menge aller Polynome, die Menge aller auf einem Intervall I definierten Funktionen oder die Menge aller n-dimensionalen Vektoren. Dabei gelten für die Addition und Skalarmultiplikation dieselben Grundregeln wie für das Rechnen mit Vektoren des anschaulichen Raums ($\mathbb{R}^3$). Zur einheitlichen Beschreibung der sich daraus ergebenden Konsequenzen wurde der Begriff des linearen Raums oder Vektorraums eingeführt.

<u>**Definition 2-4:**</u> (*Vektorraum*)

Eine nichtleere Menge V heißt $\mathbb{R}$-Vektorraum (Vektorraum über $\mathbb{R}$ bzw. linearer Raum über $\mathbb{R}$), wenn die folgenden Vektorraum-Axiome gelten.

1) Zwischen den Elementen von V ist eine Addition erklärt mit

   a) Mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ist auch $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$

b) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ Kommutativgesetz

c) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in V$ Assoziativgesetz

d) Es existiert genau ein Nullelement $\mathbf{0} \in V$ mit
$\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in V$

e) Zu jedem $\mathbf{x} \in V$ existiert genau ein negatives Element $-\mathbf{x} \in V$ mit
$\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$

2) Zwischen den Elementen von V und den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist eine Multiplikation erklärt mit

a) Mit $\alpha \in \mathbb{R},\ \mathbf{x} \in V$ ist auch $\alpha\mathbf{x} \in V$

b) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x},\mathbf{y} \in V$ Distributivgesetz

c) $(\alpha+\beta)\,\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x} \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in V$ Distributivgesetz

d) $(\alpha\beta)\,\mathbf{x}=\alpha(\beta\mathbf{x}) \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x} \in V$ Assoziativgesetz

e) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in V$

Die Elemente von V nennt man Vektoren.

Beispiel:
Die Menge aller n-Tupel

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)^T \quad \text{mit} \quad x_i \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad i=1,2,\ldots,n$$

definiert den n-dimensionalen (Euklidschen) Vektorraum $V=\mathbb{R}^n$, wobei die Addition und die Multiplikation mit Skalaren koordinatenweise erklärt sind, d.h.

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}:=(x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)^T,\ \lambda\mathbf{x}:=(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n)^T.$$

Anmerkung:
Mit dem Übergang vom anschaulichen Vektorraum (dem $\mathbb{R}^3$) zum abstrakteren n-dimensionalen Vektorraum (dem $\mathbb{R}^n$) haben wir die Bezeichnungsweise der Vektoren dahingehend geändert, dass Vektoren nicht mehr durch einen Pfeil über dem Kleinbuchstaben, sondern durch nichtkursive, fettgedruckte Kleinbuchstaben gekennzeichnet werden.

Definition 2-5

a) Die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear abhängig, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ gibt, die nicht alle Null sind, so dass gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

b) Die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn sie nicht linear abhängig sind, d.h.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

c) Die Summe

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{x}_k$$

heißt Linearkombination der Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$.

Beispiel:

1) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn $2\mathbf{x}_1 + 1\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$

2) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, denn

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -2\lambda_1 + 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$$

3) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 9\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\lambda_3 = \lambda_1, \lambda_2 = -2\lambda_1$
z.B. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$

Test auf lineare Unabhängigkeit in $\mathbb{R}^3$

Die Vektoren $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3 \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig genau dann, wenn

$$[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = 0.$$

Beweis:

$V_{\text{Spat}} = |[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]|$ = Volumen des von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ aufgespannten Spats muss 0 sein $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$ sind linear abhängig.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}45-48\\42-36\\32-35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix} = -3+12-9 = 0$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sind linear abhängig

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}5\\7\\-3\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-44\\22\\-22\end{pmatrix} = -88+22+44 = -22$$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sind linear unabhängig

4) $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^n$, denn

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + \lambda_n \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ sind linear unabhängig.

Anmerkung:

a) Zwei linear abhängige Vektoren sind kollinear.

b) Zwei linear unabhängige Vektoren spannen eine Ebene auf, d.h. jeder in der Ebene liegende Vektor kann als Linearkombination von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ dargestellt werden.

c) Drei linear abhängige Vektoren heißen komplanar.

Definition 2-6:
Es sei V ein Vektorraum. Ist k die Maximalzahl unabhängiger Vektoren in V, so heißt k die Dimension von V, also

$$\dim V = k$$

und je k linear unabhängige Vektoren aus V bilden eine Basis von V, d.h. sind $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in V$ linear unabhängig, dann ist $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ eine Basis von V und für alle $\mathbf{x} \in V$ existiert ein $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i,$$

d.h. jedes Element aus V lässt sich als Linearkombination der Basiselemente schreiben.

Beispiel:
1) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^n$ (natürliche Basis).
Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i$.

2) $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$

sind linear unabhängig, denn

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

also bilden $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$. $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ sind orthogonale Basis, da $\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = 0$, aber nicht orthonormal, da $\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1 \neq 1$ und $\mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_2 \neq 1$.

Definition 2-7: (*Unterraum*)
Es sei V ein Vektorraum und $W \subset V$. Gilt für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} \in W \quad \text{und} \quad \lambda\mathbf{x} \in W,$$

d.h. W ist abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation, dann heißt W ein linearer Unterraum von V. Ist r die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren aus W, so heißt r die Dimension von W ($\dim W = r$).

Je r linear unabhängige Vektoren des Unterraums W bilden dann eine Basis von W.

Beispiel:

1) Jede Gerade durch O ist ein 1dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$, denn für

$$G = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \quad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{r}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ gilt $\{\mathbf{r}\}$ ist Basis von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G$

$\Rightarrow \ \mathbf{x}_1 = \lambda_1 \mathbf{r}, \ \mathbf{x}_2 = \lambda_2 \mathbf{r}$

$\Rightarrow \ \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\,\mathbf{r} = \lambda_3 \mathbf{r} \in G$

und $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{r} \in G \ \Rightarrow \ \mu \mathbf{x} = (\mu\lambda)\,\mathbf{r} = \lambda_4 \mathbf{r} \in G$

also ist G ein 1dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

2) Jede Ebene durch O ist ein 2dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$, denn

$$E = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{x} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ ist Basis von E.

2.3 Matrizen

Definition 2-8:

Für $a_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ und $m, n \in \mathbb{N}$ heißt ein Zahlenschema der Form

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ Matrix.

Kurzschreibweise: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$

Hierbei heißt

a_{ij} das ij-te Element von $\mathbf{A}$,

$\mathbf{z}_i^T := (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in})$ der i-te Zeilenvektor von $\mathbf{A}$ und

$$\mathbf{s}_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ der } j\text{-te Spaltenvektor von } \mathbf{A}.$$

Beispiel:

$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ist eine quadratische 2×2 Matrix,

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 3×2 Matrix, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3×1 Matrix,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 1×3 Matrix

Jeder Spaltenvektor ist eine $m \times 1$ Matrix, jeder Zeilenvektor eine $1 \times n$ Matrix.

2.3.1 Addition, Subtraktion, Multiplikation mit einem Skalar

Definition 2-9:

Es seien $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zwei $m \times n$ Matrizen und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} := \mathbf{C} = (c_{ij}) \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

die Addition und

$$\lambda \mathbf{A} := \mathbf{D} = (d_{ij}) \quad \text{mit} \quad d_{ij} = \lambda a_{ij}$$

die Skalarmultiplikation.

Beispiel:

1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Zahlenbeispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Zahlenbeispiel:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Zu jeder Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$ bezeichnet man

$$(-1)\,\mathbf{A} = (-a_{ij})$$

mit $-\mathbf{A}$ und erklärt damit die Differenz zweier $m \times n$ Matrizen, d.h.

$$\mathbf{B} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{B} - \mathbf{A}.$$

Definition 2-10:

$$\mathbf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

heißt $m \times n$ Nullmatrix.

Rechenregeln:

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ $\quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$ $\quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

c) $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ $\quad \forall \mathbf{A}$ und $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

d) $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ $\quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

e) $(\lambda\mu)\mathbf{A} = \lambda(\mu\mathbf{A})$ $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

f) $1\,\mathbf{A} = \mathbf{A}$ $\quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

g) $(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}$ $\quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

h) $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B}$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ und $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Anmerkung

Die Menge $V = \mathbb{R}^{m\times n}$, in der eine Addition und eine Skalarmultiplikation gemäß der obigen Rechenregeln erklärt sind, ist ein Vektorraum.

2.3.2 Matrizenmultiplikation

Definition 2-11:

Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix und $\mathbf{B} = (b_{ij})$ eine $n \times p$ Matrix, dann ist

$$\mathbf{AB} := \mathbf{C} = (c_{ij}) \quad \text{mit} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

die Matrix des Produktes von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. Die Ergebnismatrix $\mathbf{C}$ ist dann eine $m \times p$ Matrix.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 2 & 1\cdot 0 + 2\cdot(-1) \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 2 & 3\cdot 0 + 4\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 3 & 1\cdot 2 + 0\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot 2 - 1\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt, dass die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, also im allgemeinen $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ gilt.

Skalarprodukt, dyadisches Produkt

$$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 = 14 \qquad (1\times 1 \text{ Matrix, Skalarprodukt})$$

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad (3\times 3 \text{ Matrix, dyadisches Produkt})$$

$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \mathbf{z}_i^T \mathbf{s}_j$, wobei $\mathbf{z}_i^T$ die i-te Zeile von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{s}_j$ die j-te Spalte von $\mathbf{B}$ bezeichnet, also ist c_{ij} das Skalarprodukt aus dem i-ten Zeilenvektor von $\mathbf{A}$ und dem j-ten Spaltenvektor von $\mathbf{B}$, d.h.

$$\mathbf{C} = (c_{ij}) = \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^T\mathbf{s}_1 & \mathbf{z}_1^T\mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{z}_1^T\mathbf{s}_p \\ \mathbf{z}_2^T\mathbf{s}_1 & \mathbf{z}_2^T\mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{z}_2^T\mathbf{s}_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{z}_m^T\mathbf{s}_1 & \mathbf{z}_m^T\mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{z}_m^T\mathbf{s}_p \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^T \\ \mathbf{z}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{z}_m^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z}_i^T = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}),$$

$$\mathbf{B} = (b_{ij}) = (\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{s}_p), \quad \mathbf{s}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

und

$$c_{ij} = \mathbf{z}_i^T \mathbf{s}_j = (a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Beispiel:

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Rechenschema:
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix} \end{array}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rechenschema:
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Definition 2-12:

$$\mathbf{E}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

heißt $n \times n$ Einheitsmatrix, sie hat die Spaltendarstellung

$$\mathbf{E}_n = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n)$$

mit den Vektoren

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(mit einer 1 an der } i\text{-ten Stelle),}$$

der natürlichen Basis des $\mathbb{R}^n$.

Rechenregeln:

Für alle Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ gilt

a) $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)\mathbf{B} = \mathbf{A}_1\mathbf{B} + \mathbf{A}_2\mathbf{B}$

$\mathbf{A}(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2) = \mathbf{A}\mathbf{B}_1 + \mathbf{A}\mathbf{B}_2$

b) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$

c) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

d) $\mathbf{E}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{E}_n$

$\mathbf{EA} = \mathbf{AE}$ für $m = n$

e) $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ im allgemeinen

2.3.3 Transponierte Matrix

Definition 2-13:

Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine reellwertige $m \times n$ Matrix, dann heißt

$$\mathbf{A}^T := (c_{kl}) \quad \text{mit} \quad c_{kl} = a_{lk} \quad \text{für} \quad l = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n$$

die transponierte Matrix von $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}^T$ ist dann eine $n \times m$ Matrix.

Beispiel:

1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^T = (1 \quad 0 \quad -2)$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

<u>Rechenregeln:</u>

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

b) $(\lambda \mathbf{A})^T = \lambda \mathbf{A}^T$

c) $((\mathbf{A})^T)^T = \mathbf{A}$

d) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

<u>Definition 2-14:</u>

Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine komplexwertige $m \times n$ Matrix, dann heißt

$$\mathbf{A}^H = (\mathbf{A}^T)^* := (c_{kl}) \text{ mit } c_{kl} = a_{lk}^* \text{ für } l = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, n$$

die transponiert konjugierte Matrix von $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}^H$ ist dann eine $n \times m$ Matrix.

<u>Beispiel:</u>

1) $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1-j \\ j2 \\ -2-j3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^H = (1+j \quad -j2 \quad -2+j3)$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-j & 2+j & 3-j2 & 4+j3 \\ 0 & 1-j3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2+j5 & 4-j3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} 1+j & 0 & 0 \\ 2-j & 1+j3 & 0 \\ 3+j2 & 0 & 2-j5 \\ 4-j3 & -2 & 4+j3 \end{pmatrix}$

3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^H = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* & \cdots & a_{m1}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* & \cdots & a_{m2}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}^* & a_{2n}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{pmatrix}$

2.3.4 Inverse Matrix

<u>Definition 2-15:</u>

Es sei $\mathbf{A}$ eine reellwertige $n \times n$ Matrix. Existiert eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{X}$ mit

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E},$$

dann heißt $\mathbf{A}$ reguläre (invertierbare) und $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ die inverse Matrix von $\mathbf{A}$. Existiert keine inverse Matrix, so heißt $\mathbf{A}$ singulär.

<u>Satz 2-2:</u>

Für alle regulären Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

a) $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$,

b) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,

c) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,

d) mit $\mathbf{A}$ ist auch $\mathbf{A}^T$ regulär und es gilt $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$,

e) $\mathbf{A}$ hat n linear unabhängige Spaltenvektoren,

f) $\mathbf{A}$ hat n linear unabhängige Zeilenvektoren.

<u>Beweis:</u>

Mit $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ regulär $\Rightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{A}^T, \mathbf{AB}$ sind regulär (Beweis später mit Determinanten).

a) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{AA}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{AE} \;\Rightarrow\; \mathbf{EX} = \mathbf{X} = \mathbf{AE} = \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$

b) $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{E} \;\Rightarrow (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{AE} = \mathbf{A}$

c) $(\mathbf{AB})\mathbf{X} = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{ABX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{A}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{BX} = \mathbf{A}^{-1}$
$\Rightarrow\; \mathbf{B}^{-1}\mathbf{BX} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \;\Rightarrow\; (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

d) $\mathbf{A}^T\mathbf{X} = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^T\mathbf{X})^T = \mathbf{E}^T = \mathbf{E} \;\Rightarrow\; \mathbf{X}^T(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{X}^T\mathbf{A} = \mathbf{E}$
$\Rightarrow\; \mathbf{X}^T\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{EA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{X}^T = \mathbf{A}^{-1} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} = (\mathbf{A}^{-1})^T \;\Rightarrow\; (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$

e) Seien $\mathbf{s}_i$ $i = 1, \ldots, n$ die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ und
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$, d.h. mit $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1 \;\; \cdots \;\; \lambda_n)^T$ gelte $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{s}_i = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$
$\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{E}\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ linear unabhängig.

f) Da die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ die entsprechenden Spaltenvektoren von $\mathbf{A}^T$ sind und mit $\mathbf{A}$ auch $\mathbf{A}^T$ regulär ist, sind auch die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ linear unabhängig.

Definition 2-16:
Die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ heißt Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ($\operatorname{rang}\mathbf{A}$).

Anmerkung:
Die Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren ist gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren.

Beispiel:

1) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

denn $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \Rightarrow \operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$, $\mathbf{A}$ ist regulär

2) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix},$$

denn $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E} \Rightarrow \operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$, $\mathbf{A}$ ist regulär

3) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}\mathbf{A} = 2 \Rightarrow \mathbf{A} \text{ nicht regulär} \Rightarrow \mathbf{A} \text{ singulär}$$

2.3.5 Symmetrische, schiefsymmetrische, orthogonale Matrizen

Definition 2-17:
Es sei $\mathbf{A}$ eine reellwertige $n \times n$ Matrix.

a) $\mathbf{A}$ heißt symmetrisch genau dann, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$
b) $\mathbf{A}$ heißt schiefsymmetrisch genau dann, wenn $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$
c) $\mathbf{A}$ heißt orthogonal genau dann, wenn $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Beispiel:

1) $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ist symmetrisch}$$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ist schiefsymmetrisch

3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, da $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

Satz 2-3:

Für orthogonale Matrizen gilt:

a) $\mathbf{A}$ ist orthogonal genau dann, wenn die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ ein Orthonormalsystem bilden, d.h. alle Zeilenvektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

b) $\mathbf{A}$ ist orthogonal genau dann, wenn die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ ein Orthonormalsystem bilden, d.h. alle Spaltenvektoren stehen paarweise senkrecht aufeinander und haben die Länge 1.

c) $\mathbf{A}$ ist orthogonal genau dann, wenn $|\mathbf{Ax}| = |\mathbf{x}| \;\; \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, d.h. $\mathbf{A}$ längentreu.

d) $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind orthogonal $\Rightarrow$ $\mathbf{AB}$ ist orthogonal.

Beweis:

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{z}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{z}_n^T \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{A}^T = (\mathbf{z}_1 \;\; \cdots \;\; \mathbf{z}_n)$ mit $\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{z}_i^T = (a_{i1} \;\; \cdots \;\; a_{in}),$

$$(\mathbf{AA}^T)_{ij} = \mathbf{z}_i^T \mathbf{z}_j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{AA}^T = \mathbf{E} \Leftrightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T.$$

b) $\mathbf{A}^T$ ist auch orthogonal, denn $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^T$

$\Rightarrow$ die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ bilden auch ein Orthonormalsystem.

c) "$\Rightarrow$" $|\mathbf{Ax}|^2 = (\mathbf{Ax})^T (\mathbf{Ax}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T \mathbf{Ex} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2.$

"$\Leftarrow$" $|\mathbf{s}_i| = |\mathbf{Ae}_i| = |\mathbf{e}_i| = 1 \Rightarrow$ die Spaltenvektoren haben die Länge 1

$|\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j|^2 = |\mathbf{Ae}_i - \mathbf{Ae}_j|^2 = |\mathbf{A}(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)|^2 = |\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j|^2$

$\Rightarrow (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j)^T (\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_j) = \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i - 2\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_j + \mathbf{s}_j^T \mathbf{s}_j = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i - 2\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_j$

$\Rightarrow \mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_j = \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = 0$ für $i \neq j$, da $\mathbf{s}_i^T \mathbf{s}_i = 1$ und $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_i = 1.$

d) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T.$

Definition 2-18:
Es sei $\mathbf{A}$ eine komplexwertige $n \times n$ Matrix.
a) $\mathbf{A}$ heißt hermitesch genau dann, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$.
b) $\mathbf{A}$ heißt unitär genau dann, wenn $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H$.

Beispiel:

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1-j & j5 \\ 1+j & 2 & -1+j \\ -j5 & -1-j & 3 \end{pmatrix}$ ist hermitesch

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \exp(j\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(j\beta) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(j\gamma) \end{pmatrix}$ ist unitär, da $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^H$

Anmerkung:
Die Aussagen von Satz 2-3 können auf unitäre Matrizen entsprechend verallgemeinert werden.

2.4 Lineare Abbildungen

Definition 2-19:
Es seien V, W lineare Räume. Eine Abbildung $\varphi : V \to W$, heißt linear, wenn für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

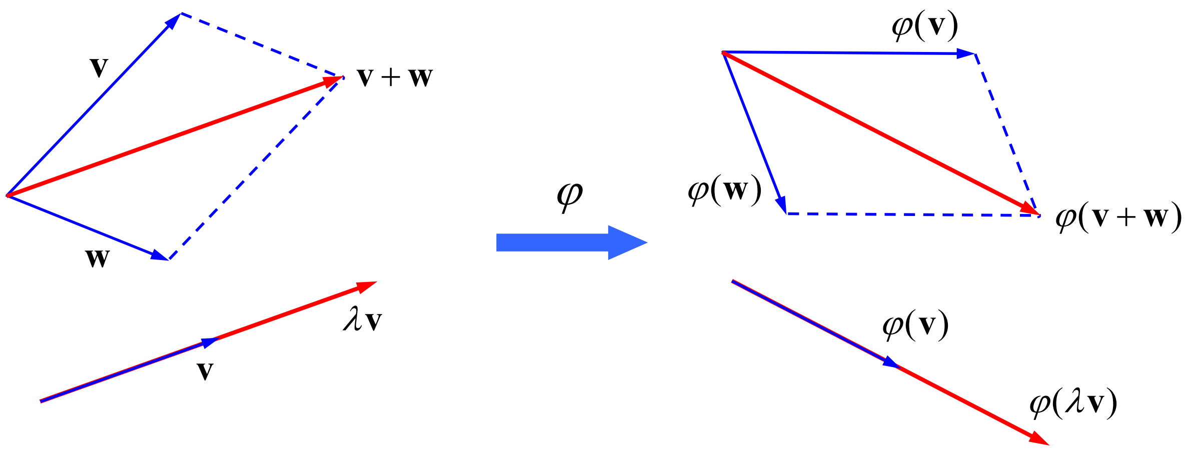
$$\varphi(\lambda \mathbf{v}) = \lambda \varphi(\mathbf{v}), \qquad \text{(Homogenität)}$$

$$\varphi(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \varphi(\mathbf{v}) + \varphi(\mathbf{w}). \qquad \text{(Additivität)}$$

Die Bildmenge $\{\varphi(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} \subset W$ von φ bezeichnet man als Bild φ.
Die Menge $\{\mathbf{v} \in V : \varphi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \in W\}$ heißt Kern der Abbildung von φ und wird mit Kern φ bezeichnet.

Anmerkung:
Eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ bildet den Nullvektor von V auf den Nullvektor von W ab.

Ist $\varphi : V \to W$ linear, dann sind Kern φ bzw. Bild φ nicht nur Teilmengen sondern sogar Unterräume von V bzw. von W.



Beispiel: (Abbildung von $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

1) Drehung um eine Gerade durch O, z.B. x, y oder z-Achse, ist eine lineare Abbildung.
2) Spiegelung an einer Ebene durch O, z.B. xy-, xz- oder yz-Ebene, ist eine lineare Abbildung.
3) Translation $\varphi : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$ mit festem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$ ist keine lineare Abbildung.

Satz 2-4:

Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist bereits dann eindeutig definiert, wenn die Bilder der Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ festgelegt sind, also durch die Angabe der Vektoren

$$\mathbf{a}_i = \varphi(\mathbf{e}_i) \in \mathbb{R}^m \quad \text{für } i = 1, \ldots, n.$$

Für $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$ gilt

$$\mathbf{w} = \varphi(\mathbf{v}) = v_1\varphi(\mathbf{e}_1) + v_2\varphi(\mathbf{e}_2) + \ldots + v_n\varphi(\mathbf{e}_n) = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \ldots + v_n\mathbf{a}_n.$$

Satz 2-5

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine gemäß Satz 2-4 definierte lineare Abbildung und r die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren unter den $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, dann gilt

$$\dim(\text{Bild } \varphi) = r \quad \text{und} \quad \dim(\text{Kern } \varphi) = n - r$$

also

$$\dim(\text{Bild } \varphi) + \dim(\text{Kern } \varphi) = n.$$

Anmerkung:

Jede $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ induziert eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^m$ vermöge

$$\begin{aligned}\mathbf{A}:\ \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m\\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{Ax}\end{aligned}$$

Umgekehrt existiert zu jeder linearen Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine $m \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ mit

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Anmerkung:

Die lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn Kern φ nur aus dem Nullvektor besteht. Sie ist genau dann surjektiv, wenn Bild $\varphi = W$ gilt. Ist φ bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv, dann existiert die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: W \to V$, und diese ist wieder linear.

2.4.1 Konstruktion der zur linearen Abbildung gehörenden Matrix A

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine linear Abbildung.

Gesucht: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($m \times n$ Matrix) mit $\mathbf{Ax} = \varphi(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Die Matrix $\mathbf{A}$ ist eindeutig festgelegt durch die Bilder der Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ des $\mathbb{R}^n$, denn es gilt

$$\mathbf{Ae}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mi} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix},$$

d.h. der i-te Spaltenvektor von $\mathbf{A}$ ist gleich dem Bild von $\mathbf{e}_i$.

Ist $\varphi(\mathbf{e}_i) = \mathbf{s}_i$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$ dann gilt

$$\mathbf{A} = (\mathbf{s}_1 \;\; \mathbf{s}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{s}_n)$$

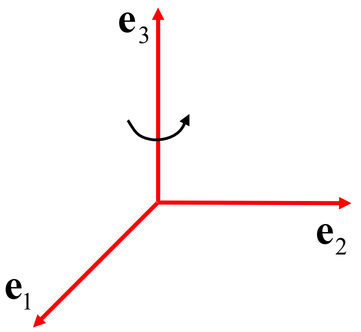
und

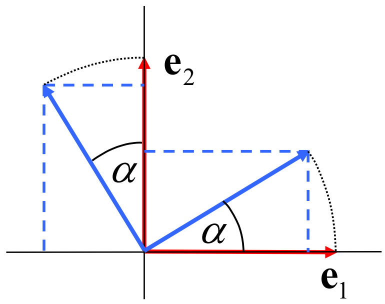
$$\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i \mathbf{e}_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i \right) = \varphi(\mathbf{x}),$$

wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$.

Beispiel:

1) Drehung um die z-Achse um den Winkel α





$$\mathbf{Ae}_3 = \mathbf{e}_3, \;\; \mathbf{Ae}_1 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \mathbf{Ae}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \;\; \Rightarrow \;\; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Drehung um die z-Achse um den Winkel $-\alpha$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) & 0 \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

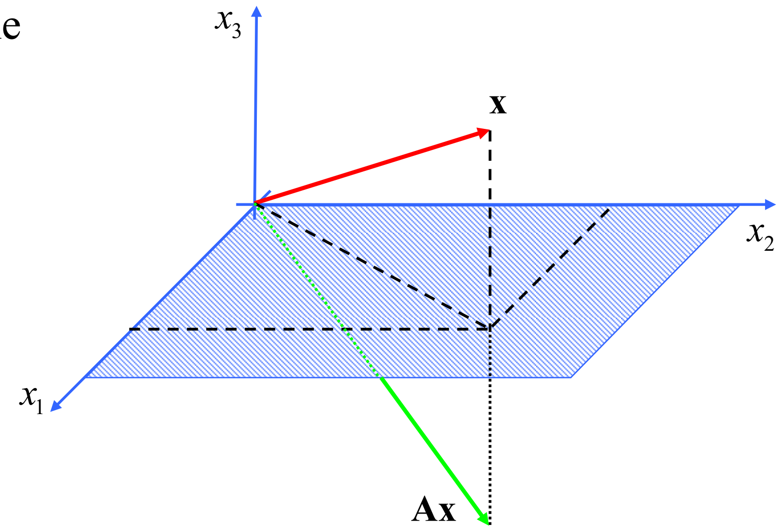
Ferner muss gelten $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, d.h.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{B}$$

3) Spiegelung an der xy-Ebene

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Da die Spiegelung von $\mathbf{Ax}$ wieder $\mathbf{x}$ ergibt, gilt hier $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$



Anmerkung:

Matrizen, die eine Drehung um eine Gerade durch O oder eine Spiegelung an einer Ebene durch O erzeugen, gehören zu den orthogonalen Matrizen. Für diese gilt

$$|\mathbf{Ax}| = |\mathbf{x}| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

2.4.2 Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Gegeben seien k linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$. Gesucht werden k orthonormale Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ die den gleichen Untervektorraum aufspannen wie $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Es muss also gelten

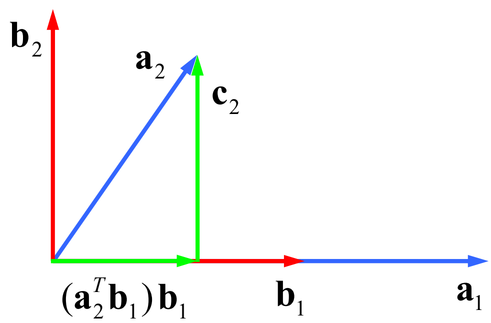
$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Rechenvorschrift:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|},$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{\mathbf{c}_2}{|\mathbf{c}_2|} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2^T \mathbf{b}_1)\mathbf{b}_1,$$

usw.



Allgemein folgt schließlich für $i = 1, \ldots, k$

$$\mathbf{b}_i = \frac{\mathbf{c}_i}{|\mathbf{c}_i|} \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j)\mathbf{b}_j,$$

denn für $r < i$ gilt

$$\mathbf{c}_i^T \mathbf{b}_r = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_r - \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_j)(\mathbf{b}_j^T \mathbf{b}_r) = \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_r - \mathbf{a}_i^T \mathbf{b}_r = 0$$

da $(\mathbf{b}_j^T \mathbf{b}_r) = 0$ für $j \neq r$ und $(\mathbf{b}_j^T \mathbf{b}_r) = 1$ für $j = r$

$\Rightarrow \mathbf{c}_i \perp \mathbf{b}_r$ für $r = 1, 2, \ldots, i-1$

Beispiel:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ linear unabhängig, da } \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$$

$$\mathbf{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{b}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ bilden ein Orthonormalsystem, also ist die Matrix

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

orthogonal.

2.4.3 Koordinatentransformation

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ sei die übliche Basis und $\{\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'\}$ eine andere Basis des $\mathbb{R}^n$, also $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ sind linear unabhängig.

$\mathbf{e}_i'$ lässt sich als Bild von $\mathbf{e}_i$ auffassen:

$$\mathbf{e}_i' = \mathbf{A}\mathbf{e}_i, \text{ mit } \mathbf{e}_i' \text{ in der } i\text{-te Spalte von } \mathbf{A},$$

d.h. $\mathbf{A} = (\mathbf{e}_1' \ \ \mathbf{e}_2' \ \cdots \ \mathbf{e}_n')$ und $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1 \ \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_n)$.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt somit

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \, \mathbf{e}_i',$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ die alten und $x_1', \ldots, x_n'$ die neuen Koordinaten bezeichnet. In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Bilden die neuen Basisvektoren ein Orthonormalsystem, so ist die Matrix $\mathbf{A}$ orthogonal und es gilt:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

<u>**Beispiel:**</u>

1) $\mathbf{e}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e}_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Sei $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3 = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2' + x_3'\mathbf{e}_3'$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems liefert (z.B. über die Inverse)

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & -3 & 3 \\ 7 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 1/3 \\ 1/9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} = \frac{4}{9}\mathbf{e}_1' + \frac{1}{3}\mathbf{e}_2' + \frac{1}{9}\mathbf{e}_3'$$

2) $\mathbf{e}_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3' = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

bilden ein Orthonormalsystem, d.h. $\mathbf{e}_i'^T\mathbf{e}_i' = 1,\ \mathbf{e}_i'^T\mathbf{e}_j' = 0 \quad i \neq j$, damit ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ orthogonal, d.h. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$.

Für $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = x_1'\mathbf{e}_1' + x_2'\mathbf{e}_2' + x_3'\mathbf{e}'$ erhält man schließlich

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{x} = \sqrt{2}\,\mathbf{e}_1' + \mathbf{e}_2'$$

2.5 Lineare Gleichungssysteme

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}$. Gesucht ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}$ mit

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

$\mathbf{A}$ heißt Koeffizientenmatrix,

$\mathbf{b}$ heißt "rechte Seite" und

$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ heißt Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (GLS).

<u>Sonderfall:</u> $m = n$ und $\mathbf{A}$ regulär, $\operatorname{rang}\mathbf{A} = n$

Ist $\mathbf{A}$ eine reguläre $n \times n$ Matrix, so ist das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ eindeutig lösbar mit $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

<u>Bestimmung der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$</u>

Sei $\mathbf{A}$ regulär $\Rightarrow$ es existiert $\mathbf{A}^{-1}$ mit $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$. Mit

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{s}_1 \;\; \mathbf{s}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{s}_n),$$

wobei $\mathbf{s}_i$ den i-ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}^{-1}$ bezeichnet, gilt

$$\mathbf{A}(\mathbf{s}_1 \;\; \mathbf{s}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{s}_n) = (\mathbf{e}_1 \;\; \mathbf{e}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{e}_n)$$

also

$$\mathbf{As}_i = \mathbf{e}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Um die inverse Matrix $\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{s}_1 \;\; \mathbf{s}_2 \;\; \cdots \;\; \mathbf{s}_n)$ zu bestimmen, müssen also n lineare Gleichungssysteme $\mathbf{As}_i = \mathbf{e}_i$ mit gleicher Koeffizientenmatrix, aber unterschiedlichen rechten Seiten $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ gelöst werden.

2.5.1 Gaußsches Eliminationsverfahren

Gegeben sei das lineare GLS $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

und der erweiterten Matrix

$$(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

<u>Satz 2-6:</u> (*Gauß Algorithmus*)

Ein lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ kann durch die Operationen

a) Gleichungen vertauschen, d.h. Zeilen vertauschen

b) zu einer Gleichung das Vielfache einer anderen Gleichung addieren, d.h. zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addieren

c) Unbekannte vertauschen, d.h. Spalten vertauschen

in ein äquivalentes lineares Gleichungssystem mit folgender erweiterter Matrix umgewandelt werden.

$$(\mathbf{C}\,|\,\mathbf{d}) = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1,n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2,n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,n} & d_r \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right)$$

mit $c_{ii} \neq 0$ für $i = 1, 2, \ldots, r$, also $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$.

Hierbei verändern sich die Lösungsmenge und der Rang der Koeffizientenmatrix bzw. erweiterten Matrix nicht. Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist r.

Das lineare Gleichungssystem ist lösbar $\Leftrightarrow d_{r+1} = \ldots = d_m = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$$

In diesem Falle sind $(n-r)$ Unbekannte frei wählbar und die anderen r Unbekannten lassen sich aus den ersten r Gleichungen bestimmen.

Beweis:

Die in a) bis c) aufgeführten Operationen verändern nicht die Lösungsmenge L und auch nicht die Ränge der Matrizen, d.h. die Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren. Es sei $a_{11} \neq 0$ (a_{11} heißt Pivotelement). Ist $a_{11} = 0$, so muss vorher ein Zeilentausch oder falls $a_{11} = a_{21} = \ldots = a_{m1} = 0$ ein Spaltentausch durchgeführt werden.

$(i\text{-te Zeile}) - a_{i1}/a_{11} \cdot (1\text{te Zeile}) \quad \text{für } i = 2,3,\ldots,m$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3n} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \tilde{a}_{m3} & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right) = (\tilde{\mathbf{A}} \,|\, \tilde{\mathbf{b}})$$

Nun sei $\tilde{a}_{22} \neq 0$ (a_{22} heißt dann Pivotelement). Ist $\tilde{a}_{22} = 0$, so muss vorher ein Zeilentausch oder falls $\tilde{a}_{22} = \tilde{a}_{32} = \ldots = \tilde{a}_{m2} = 0$ ein Spaltentausch durchgeführt werden.

$(i\text{-te Zeile}) - \tilde{a}_{i2}/\tilde{a}_{22} \cdot (2\text{te Zeile}) \quad \text{für } i = 3,4,\ldots,m$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} & \cdots & \hat{a}_{3n} & \hat{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \hat{a}_{m3} & \cdots & \hat{a}_{mn} & \hat{b}_m \end{array}\right) = (\hat{\mathbf{A}} \,|\, \hat{\mathbf{b}})$$

Fortsetzen dieser Prozedur liefert schließlich die erweiterte Matrix $(\mathbf{C}|\mathbf{d})$ mit $c_{ii} \neq 0$ für $i = 1,2,\ldots,r$. Ist $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = r$ so sind $(n-r)$ Unbekannte, d.h. $x_{r+1},\ldots,x_n$ sofern kein Spaltentausch stattgefunden hat, frei wählbar. Die restlichen Unbekannten können aus den ersten r Gleichungen durch "Rückwärtseinsetzen" bestimmt werden.

$$x_k = \frac{1}{c_{kk}}\left(d_k - \sum_{i=k+1}^{n} c_{ki} x_i\right) \qquad \text{für} \quad k = r, r-1, \ldots 1$$

Anmerkung:
An der Matrix $\mathbf{C}$ erkennt man, dass die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ gleich der Maximalzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ ist, denn die Matrix

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{rr} & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{\mathbf{0}_{(m-r)\times r}} & \multicolumn{3}{c}{\mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)}} \end{array}\right)$$

hat r linear unabhängige Zeilen- und auch r linear unabhängige Spaltenvektoren und somit hat auch die Matrix $\mathbf{A}$ r linear unabhängige Zeilen- und Spaltenvektoren.

Beispiel:

1)
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \end{array}$$

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 7 & 9 & 2 & 8 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 5 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(2te Zeile − 2 · 1te Zeile) (3te Zeile + 2te Zeile)

(3te Zeile − 1te Zeile)

$\Rightarrow$ $\operatorname{rang} \mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}) = 2 \;\Rightarrow\; (4-2) = 2$ Unbekannte frei wählbar,

$\Rightarrow$ $x_3 = \lambda$ und $x_4 = \mu$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $x_2 = \frac{1}{-5}(-5-(-5)\lambda - 0\mu) = 1-\lambda$

$\Rightarrow$ $x_1 = \frac{1}{1}(3-2(1-\lambda)-4\lambda-2\mu) = 1-2\lambda-2\mu$

Lösungsmenge

$$L = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\lambda-2\mu \\ 1-\lambda \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

2)
$$\begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & & & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 3 \end{array}$$

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{(Zeilentausch)}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \overset{\text{(3te Zeile} - \text{1te Zeile)}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\text{(3te Zeile} - \text{2te Zeile)}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ $x_3 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{1}(1-1\cdot 0) = 1, \quad x_1 = \frac{1}{1}(2-0\cdot 1-1\cdot 0) = 2$

Man kann hier auch noch weitere Schritte machen um vorne eine Einheitsmatrix zu erzeugen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$(-0,5 \cdot 3\text{te Zeile}) \quad (1\text{te Zeile} - 3\text{te Zeile})$$
$$(2\text{te Zeile} - 3\text{te Zeile})$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{x} = (2 \quad 1 \quad 0)^T \quad \text{ist eindeutige Lösung} \quad (\operatorname{rang}\mathbf{A} = 3)$$

2.5.2 Geometrische Deutung

Im 2ten Beispiel stellen die 3 Gleichungen 3 Ebenen des $\mathbb{R}^3$ dar. Die Lösungsmenge ist also die von den 3 Ebenen gebildete Schnittmenge. Es ergeben sich drei Möglichkeiten

1) eindeutig lösbar (genau ein Schnittpunkt)
2) mehrdeutig lösbar (Schnittgerade oder Schnittebene)
3) nicht lösbar

Die 3 Normalenvektoren (die Senkrecht auf den Ebenen stehen) sind bei

1) linear unabhängig, d.h. $\operatorname{rang}\mathbf{A} = 3$
2) linear abhängig, d.h. $\operatorname{rang}\mathbf{A} < 3$, und es gilt $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$
3) linear abhängig, d.h. $\operatorname{rang}\mathbf{A} < 3$, und es gilt $\operatorname{rang}\mathbf{A} \neq \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$

2.5.3 Numerische Fehler

Bei der Berechnung der Lösung eines linearen Gleichungssystems können Rechenfehler durch Rundung (Taschenrechner und Computer führen Berechnungen nur mit endlicher Stellenzahl/Genauigkeit aus) entstehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 0,00035\,x_1 &+ x_2 &= 1,2224 \\ x_1 &+ x_2 &= 2,3330 \end{aligned}$$

exakte Lösung

$x_1 = 1,111 \quad x_2 = 1,222$

Rechnung mit fünfstelliger Genauigkeit

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}00035 & 1 & 1{,}2224 \\ 1 & 1 & 2{,}3330 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}00035 & 1 & 1{,}2224 \\ 0 & -2856{,}1 & -3490{,}3 \end{array}\right)$

(2te Zeile $-\frac{1}{0{,}00035}\cdot$1te Zeile)

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{-3490{,}3}{-2856{,}1} = 1{,}2221 \quad x_1 = \frac{1{,}2224 - 1\cdot 1{,}2221}{0{,}00035} = 0{,}85714$$

d.h. ein sehr ungenaues Ergebnis

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2{,}3330 \\ 0{,}00035 & 1 & 1{,}2224 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2{,}3330 \\ 0 & 0{,}99965 & 1{,}2216 \end{array}\right)$

(2te Zeile $-\,0{,}00035\cdot$1te Zeile)

$$\Rightarrow \quad x_2 = \frac{1{,}2216}{0{,}99965} = 1{,}222 \quad x_1 = 2{,}3330 - 1\cdot 1{,}222 = 1{,}111$$

d.h. besseres/genaueres Ergebnis

Allgemein:
Durch Zeilentauschen wählt man das Element als Pivotelement aus, das ab dem Diagonalelement das betraglich größte in der Spalte ist, in der man Nullen erzeugen will.

2.5.4 Schlecht konditionierte Matrix

Trotz optimaler "Pivotstrategie" können bei gewissen linearen Gleichungssystemen große Rechenfehler auftreten.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 1/8\, x_1 &+ 1/9\, x_2 = 1 \\ 1/9\, x_1 &+ 1/10\, x_2 = 1 \end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1/8 & 1/9 & 1 \\ 1/9 & 1/10 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1/8 & 1/9 & 1 \\ 0 & 1/810 & 1/9 \end{array}\right)$

(2te Zeile $-\frac{8}{9}\cdot$1te Zeile)

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ x_2 &= \frac{1/9}{1/810} = \frac{810}{9} = 90 \\ x_1 &= \frac{1}{1/8}\left(1 - \frac{1}{9}\cdot 90\right) = 8\,(-9) = -72 \end{aligned}\right\}\ \text{exakte Lösung}$$

Rechnung mit dreistelliger Genauigkeit

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}125 & 0{,}111 & 1 \\ 0{,}111 & 0{,}100 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \left(2\text{te Zeile} - \frac{0{,}111}{0{,}125}\cdot 1\text{te Zeile}\right)}}{\Leftrightarrow} \left(\begin{array}{cc|c} 0{,}125 & 0{,}111 & 1 \\ 0 & 0{,}00143 & 0{,}112 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow\ x_2 &= \frac{0{,}112}{0{,}00143} = 78{,}3 \\ x_1 &= \frac{1 - 0{,}111\cdot 78{,}3}{0{,}125} = \frac{1 - 8{,}69}{0{,}125} = -63{,}7 \end{aligned}\right\}\ \text{ungenaues Ergebnis}$$

Die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/9 \\ 1/9 & 1/10 \end{pmatrix}$$

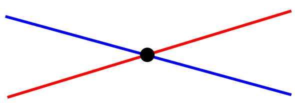
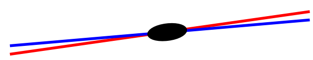
ist in diesem Beispiel schlecht konditioniert. Berechnet man die Determinante von $\mathbf{A}$

$$\det\mathbf{A} = \det\begin{pmatrix} 1/8 & 1/9 \\ 1/9 & 1/10 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{80} - \frac{1}{81} \approx 1{,}5\cdot 10^{-4}$$

so sieht man, dass dieser Wert sehr klein ist. Wäre $\det\mathbf{A} = 0$, so wäre das lineare GLS nicht lösbar und die Matrix $\mathbf{A}$ singulär.

Hier ist also die Matrix $\mathbf{A}$ "fast singulär". In solchen Fällen muss die Rechnung mit möglichst hoher Rechengenauigkeit/Stellenzahl durchgeführt werden.

Die beiden Gleichungen bedeuten 2 Geraden im $\mathbb{R}^2$

$\mathbf{A}$ gut konditioniert:  $\mathbf{A}$ schlecht konditioniert: 

2.5.5 Berechnung der inversen Matrix

Voraussetzung: $\mathbf{A}$ regulär, also $\mathbf{AX} = \mathbf{E}$

Gesucht: $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$

Man muss n lineare Gleichungssysteme lösen, d.h.

$$\mathbf{As}_i = \mathbf{e}_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, n \text{ und } \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n).$$

Schreibt man sofort alle rechten Seiten $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ zusammen auf, so erhält man die erweiterte Matrix $(\mathbf{A}|\mathbf{E})$.

Führt man nun Gauß-Schritte so lange aus, bis man $(\mathbf{E}|\mathbf{X})$ erhält, so gilt

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}.$$

<u>Beispiel:</u>

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = ?$$

erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

(2te Zeile $-\frac{3}{2}\cdot$1te Zeile) (2$\cdot$2te Zeile)
(3te Zeile $-$ 1te Zeile)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

(1te Zeile $-$ 2$\cdot$3te Zeile) (1te Zeile $-$ 3$\cdot$2te Zeile))

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 12 & -6 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

($\frac{1}{2}\cdot$1te Zeile)

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5.6 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Folgerungen aus dem Satz zum Gauß-Algorithmus

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lösbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}\mathbf{A} = \operatorname{rang}(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Ist $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix ($n \times n$ Matrix), dann gilt

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rang}\mathbf{A} = n$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ regulär $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$ existiert.

Definition 2-20:

Es sei $\mathbf{A}$ eine reelle $m \times n$ Matrix und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ heißt lineares homogenes Gleichungssystem.

b) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ heißt lineares inhomogenes Gleichungssystem.

Satz 2-7:

a) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ist Lösung (triviale Lösung) des linearen homogenen Gleichungssystems.

b) Die Lösungsmenge L_h des linearen homogenen Gleichungssystems ist ein linearer Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit $\dim L_h = n - r$, falls $\operatorname{rang}\mathbf{A} = r$.

c) Die allgemeine Lösung des linearen inhomogenen Gleichungssystems lässt sich darstellen durch die allgemeine Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems plus eine partikuläre Lösung des linearen inhomogenen Gleichungssystems, d.h.

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p \quad \text{mit} \quad \mathbf{Ax}_h = \mathbf{0},\ \mathbf{Ax}_p = \mathbf{b}.$$

Hierbei ist $\mathbf{x}_h$ die allgemeine Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems und $\mathbf{x}_p$ eine partikuläre Lösung des linearen inhomogenen Gleichungssystems.

$$L_{inh} = \{\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p\}$$

Beweis:

a) klar

b) Mit $\mathbf{Ax}_1 = \mathbf{0}$ und $\mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0}$ gilt auch $\mathbf{A(x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 + \mathbf{Ax}_2 = \mathbf{0},$ mit $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ gilt auch $\mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$.

Da $\operatorname{rang}\mathbf{A} = r \Rightarrow (n-r)$ Unbekannte sind frei wählbar.

Seien $x_{r+1}, \ldots, x_n$ frei wählbar mit $x_{r+1} = \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}$, dann ist die allgemeine Lösung des linearen homogenen Gleichungssystems

$$L_h = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-r} \end{pmatrix} : \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n-r \right\}$$

und die Vektoren

$$\begin{pmatrix} \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T, \ldots, \begin{pmatrix} \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$$

bilden eine Basis von L_h. Das sind $(n-r)$ linear unabhängige Vektoren $\Rightarrow \dim L_h = n - r$.

c) Sei $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p \Rightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{Ax}_h + \mathbf{Ax}_p = \mathbf{0} + \mathbf{b}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{x}$ ist Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Sei umgekehrt $\mathbf{x}$ Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ und $\mathbf{x}_p$ partikuläre Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} - \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_h \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$.

Beispiel:

homogenes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{(Zeilentausch)}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\text{(3te Zeile} - \text{1te Zeile)}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{(3te Zeile} - \text{2te Zeile)}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ rang } \mathbf{A} = 2, \quad x_3 = \lambda, \quad x_2 = -\lambda, \quad x_1 = -\lambda$$

$$L_h = \left\{ \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ Gerade durch } O, \quad \dim L_h = 3 - 2 = 1$$

inhomogenes Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & & & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array} \Rightarrow x_p = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist partikuläre Lösung}$$

$$L_{inh} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\} \text{ d.h. Gerade durch } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ in Richtung } \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.6 Determinanten

Motivation:
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

also die Koeffizientenmatrix **A** und rechte Seite **b**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Durch Umformen erhalten wir

$$a_{11}x_1 = b_1 - a_{12}x_2$$
$$a_{21}x_1 = b_2 - a_{22}x_2$$
$$a_{12}x_2 = b_1 - a_{11}x_1$$
$$a_{22}x_2 = b_2 - a_{21}x_1$$

$$a_{22}\cdot 1\text{te Zeile} - a_{12}\cdot 2\text{te Zeile} \;\Rightarrow\; (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_1 = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}$$
$$a_{11}\cdot 4\text{te Zeile} - a_{21}\cdot 3\text{te Zeile} \;\Rightarrow\; (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, x_2 = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}$$

Also ist das Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Definition 2-21:

Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

eine 2×2 Matrix, dann heißt

$$\det \mathbf{A} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

die Determinante von $\mathbf{A}$.

Satz 2-8:

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, dann ist das lineare Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar, wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$. In diesem Fall ist

$$x_1 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad x_2 = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}$$

die eindeutige Lösung.

Verallgemeinerung auf $n > 2$

Definition 2-22:

Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine quadratische $n \times n$ Matrix. Ferner sei

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

die $(n-1)\times(n-1)$ Matrix, die sich aus $\mathbf{A}$ durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte ergibt. Dann heißt

$$\det \mathbf{A} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}$$

die Determinante der Matrix $\mathbf{A}$.

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + 4\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1+2-4=-1$$

Definition 2-23:

Eine Matrix $\mathbf{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt obere bzw. untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{ik} = 0$ für $i > k$ bzw. $i < k$ gilt.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix untere Dreiecksmatrix

Satz 2-9:

Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_1 \quad \mathbf{s}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{s}_n),$$

wobei $\mathbf{s}_i$ den i-ten Spaltenvektor von $\mathbf{A}$ bezeichnet, dann gilt

a) $\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \lambda\mathbf{s}_i \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = \lambda \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_i \;\cdots\; \mathbf{s}_n)$
Ein gemeinsamer Faktor einer Spalte kann vor die Determinante gezogen werden.

b) $\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{t}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_n) + \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{t}_2 \;\cdots\; \mathbf{s}_n)$

c) $\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_i \;\cdots\; \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = -\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_i \;\cdots\; \mathbf{s}_n)$
Bei Spaltentausch kehrt sich das Vorzeichen um.

d) $\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = 0$
Bei zwei gleichen Spalten ist $\det \mathbf{A} = 0$.

e) $\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_i + \lambda\mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_i \;\cdots\; \mathbf{s}_n) \quad (j \neq i)$
Der Wert von $\det \mathbf{A}$ ändert sich nicht, wenn zu einer Spalte das Vielfache einer anderen Spalte addiert wird.

f) $\mathbf{A}$ obere bzw. untere Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ $\det \mathbf{A} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \cdots a_{nn}$

g) $\det \mathbf{E} = 1$

<u>*Beweis*</u>:
a), b), c) mittels Induktion
Beispielhaft wird der Beweis für $n = 2$ durchgeführt.

a) $\det\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} \\ \lambda a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda a_{11}a_{22} - \lambda a_{12}a_{21} = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

b) $\det\begin{pmatrix} b_{11}+b_{12} & a_{12} \\ b_{21}+b_{22} & a_{22} \end{pmatrix} = (b_{11}+b_{12})a_{22} - (b_{21}+b_{22})a_{12} = b_{11}a_{22} - b_{21}a_{12} +$

$b_{12}a_{22} - b_{22}a_{12} = \det\begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$

c) $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$

d) $\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = -\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s}_n)$
nach c) durch vertauschen von $\mathbf{s}$ und $\mathbf{s}$
$\Rightarrow \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s} \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = 0$

e) $\det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_i + \lambda \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_i \;\cdots\; \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_n) +$

$+\lambda \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_n) = \det(\mathbf{s}_1 \;\cdots\; \mathbf{s}_i \;\cdots\; \mathbf{s}_j \;\cdots\; \mathbf{s}_n)$

nach d), da die 2te Determinante zwei gleiche Spalten enthält

f) Induktionsbeweis

$n = 1: \quad \det \mathbf{A} = \det(a_{11}) = a_{11}$

$n \to n+1:$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} = a_{n+1,n+1} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{n+1,n+1} a_{n,n} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n-1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \ldots = a_{n+1,n+1} a_{nn} \cdots a_{22} a_{11}$$

g) $\det \mathbf{E} = \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1 \quad$ nach f)

Anmerkung:

Im obigen Satz besagen a) und b), dass $\det \mathbf{A}$ bzgl. jeder Spalte linear, d.h. eine Multilinearform, ist.

Satz 2-10:

Es seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ zwei $n \times n$ Matrizen, dann gilt

a) $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$,

b) $\det(\mathbf{A}^T) = \det \mathbf{A}$,

c) $\det \mathbf{A}^{-1} = 1/\det \mathbf{A}$.

Beweis:

a), b) mittels Induktion

Beispielhaft wird der Beweis für $n = 2$ durchgeführt. Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

a) $$\begin{aligned} \det(\mathbf{AB}) &= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg) \\ &= aecf + aedh + bgcf + bgdh - afce - afdg - bhce - bhdg \\ &= adeh + bcfg - adfg - bceh = (ad-bc)(eh-fg) = \det\mathbf{A}\det\mathbf{B} \end{aligned}$$

b) $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \det\mathbf{A}^T = ad - bc = \det\mathbf{A}$

c) $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) = \det\mathbf{A}\,\det\mathbf{A}^{-1} = \det\mathbf{E} = 1 \;\Rightarrow\; \det\mathbf{A}^{-1} = 1/\det\mathbf{A}$

Folgerung:

Alle Regeln des letzten Satzes gelten auch für die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$, denn $\det\mathbf{A}^T = \det\mathbf{A}$ und die Zeilenvektoren von $\mathbf{A}$ sind die Spaltenvektoren von $\mathbf{A}^T$. ($\det\mathbf{A}$ ist also auch linear bzgl. aller Zeilenvektoren)

Bei der Berechnung einer Determinante kann nach jeder Zeile oder Spalte entwickelt werden.

Entwicklung nach der *i*-ten Zeile:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\mathbf{A}_{ij}$$

Entwicklung nach der *j*-ten Spalte:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\det\mathbf{A}_{ij}$$

Dabei ist die durch $(-1)^{i+j}$ induzierte und im folgenden veranschaulichte Vorzeichenregel zu beachten

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & + \end{pmatrix}$$

Beispiel:

1) $$\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}=1\det\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}-0\det\begin{pmatrix}2&4\\2&3\end{pmatrix}+1\det\begin{pmatrix}2&4\\1&1\end{pmatrix}=1-2=-1$$

(Entwicklung nach der 1ten Spalte)

$$\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}=-0\det\begin{pmatrix}2&4\\2&3\end{pmatrix}+1\det\begin{pmatrix}1&4\\1&3\end{pmatrix}-1\det\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=-1$$

(Entwicklung nach der 2ten Zeile)

2) $$\det\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&1&0&1\\1&2&2&3\\1&0&0&2\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}=2\left\{1\det\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+1\det\begin{pmatrix}2&4\\1&1\end{pmatrix}\right\}=0$$

(Entwicklung nach der 3ten Spalte)

3) $$\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}=1\det\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}=-1$$ (3te Zeile − 1te Zeile)

4) $$\det\begin{pmatrix}1&4&4\\0&2&1\\1&4&3\end{pmatrix}=2\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}=-2$$ (Faktor 2 aus 2ter Spalte vorgezogen)

5) $$\det\begin{pmatrix}1&2&4\\1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}=1$$ (2 Zeilen vertauscht)

6) $$\det\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&1\\1&2&4\end{pmatrix}=0$$ (2 gleiche Zeilen)

Folgerung:
Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix $\Rightarrow$ $\det \mathbf{A} = \pm 1$, denn $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{E}$ $\Rightarrow$ $\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{E} = 1$ $\Rightarrow$ $\det \mathbf{A} \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2 = 1$ $\Rightarrow$ $\det \mathbf{A} = \pm 1$.

Anmerkung:
Man erhält $\det \mathbf{A} = 1$ bei einer reinen Drehung, $\det \mathbf{A} = -1$ bei einer Dreh-Spiegelung.

Folgerung:
Für

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array}\right) \text{ gilt } \det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \det \mathbf{D},$$

wobei $\mathbf{B}$ eine $r \times r$ Matrix, $\mathbf{D}$ eine $s \times s$ Matrix und $\mathbf{C}$ eine $r \times s$ Matrix bezeichnet, denn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{EB} + \mathbf{C0} & \mathbf{E0} + \mathbf{CE} \\ \hline \mathbf{0B} + \mathbf{D0} & \mathbf{00} + \mathbf{DE} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} = \det \mathbf{D} \det \mathbf{B}.$$

Beispiel:

$$\det \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \left\{ \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} = -2$$

Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Satz 2-11: (*Cramer-Regel*)
Es sei $\mathbf{A} = (\mathbf{s}_1\ \ \mathbf{s}_2\ \ \cdots\ \ \mathbf{s}_n)$ eine $n \times n$ Matrix, dann gilt:
Das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ist eindeutig lösbar

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ regulär

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$ existiert

$\Leftrightarrow$ $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$ sind linear unabhängig

$\Leftrightarrow$ $\det \mathbf{A} \neq 0$.

In diesem Falle ist $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ die eindeutige Lösung. Diese Lösung kann mit Hilfe der Cramer-Regel wie folgt berechnet werden.

$$x_i = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \det\left(\mathbf{s}_1\ \ \cdots\ \ \mathbf{s}_{i-1}\ \ \mathbf{b}\ \ \mathbf{s}_{i+1}\ \ \cdots\ \ \mathbf{s}_n\right) \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

Beweis:
Aus vorangegangenen Sätzen ist bereits bekannt:

GLS eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ regulär
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}^{-1}$ existiert
$\Leftrightarrow$ $\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_n$ sind linear unabhängig.

Ist nun $\mathbf{A}$ regulär $\Rightarrow$ $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}$ $\Rightarrow$ $\det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} = 1$ $\Rightarrow$ $\det \mathbf{A} \neq 0$.
Umgekehrt ist $\det \mathbf{A} \neq 0$, $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$

$\Rightarrow$ $x_1\mathbf{s}_1 + x_2\mathbf{s}_2 + \ldots + x_n\mathbf{s}_n = \mathbf{b}$

$$\Rightarrow \det(\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{b},\ldots,\mathbf{s}_n) = \det(\mathbf{s}_1,\ldots,x_1\mathbf{s}_1 + \ldots + x_n\mathbf{s}_n,\ldots,\mathbf{s}_n)$$
$$= x_1 \det(\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n) + \ldots + x_i \det(\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_i,\ldots,\mathbf{s}_n) + \ldots +$$
$$x_n \det(\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{s}_n,\ldots,\mathbf{s}_n) = x_i \det \mathbf{A}$$

$\Rightarrow$ $x_i = \det(\mathbf{s}_1,\ldots,\mathbf{b},\ldots,\mathbf{s}_n)/\det \mathbf{A}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ eindeutig lösbar.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -15 + 4 + 6 = -5 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x_3 = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}$$

$\Rightarrow\ \mathbf{x} = (-1/5 \quad 0 \quad 2/5)^T$ ist eindeutige Lösung.

Berechnung der inversen Matrix mit Hilfe der Cramer-Regel:

Satz 2-12:

Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

eine reguläre $n \times n$ Matrix und

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

die zu berechnende inverse Matrix von $\mathbf{A}$, dann gilt

$$b_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ji}$$

mit

$$\mathbf{A}_{ji}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j-1,1} & \cdots & a_{j-1,i-1} & a_{j-1,i+1} & \cdots & a_{j-1,n} \\ a_{j+1,1} & \cdots & a_{j+1,i-1} & a_{j+1,i+1} & \cdots & a_{j+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

wobei sich $\mathbf{A}_{ji}$ aus $\mathbf{A}$ durch Streichung der j-ten Zeile und der i-ten Spalte ergibt.

Beweis:
$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}=(\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n) \Leftrightarrow (\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n)\,\mathbf{s}_j=\mathbf{e}_j,\ j=1,\ldots,n$, wobei $\mathbf{t}_1,...,\mathbf{t}_n$ die Spalten von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{s}_j$ die j-te Spalte von $\mathbf{A}^{-1}$ bezeichnet. Nach der Cramer-Regel gilt

$$(\mathbf{s}_j)_i = b_{ij} = \det(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{e}_j,\ldots,\mathbf{t}_n)/\det\mathbf{A}$$

mit $\mathbf{e}_j$ in der i-te Spalte. Entwickeln nach der i-ten Spalte liefert

$$b_{ij}=(-1)^{i+j}\det\mathbf{A}_{ji}/\det\mathbf{A}.$$

Beispiel:

1) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det\mathbf{A}=ad-bc\neq 0$ also $\mathbf{A}$ regulär

$$\Rightarrow\ \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\det\mathbf{A}=-5$ (s. vorheriges Beispiel)

$b_{11}=-\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=1$	$b_{12}=\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=-\frac{2}{5}$	$b_{13}=-\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=-\frac{6}{5}$
$b_{21}=\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=1$	$b_{22}=-\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=-1$	$b_{23}=\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=-1$
$b_{31}=-\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=-1$	$b_{32}=\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{4}{5}$	$b_{33}=-\frac{1}{5}\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\frac{7}{5}$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -6 \\ 5 & -5 & -5 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

Aus den Sätzen 2-10 und 2-11 folgt: Mit $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind auch $\mathbf{AB}, \mathbf{A}^T$ und $\mathbf{A}^{-1}$ regulär.

Ferner gilt $\operatorname{rang}\mathbf{A} = r$ genau dann, wenn die größte von Null verschiedene Unterderterminante von $\mathbf{A}$, die Determinante einer $r \times r$ Untermatrix ist.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \ \det\mathbf{A} = 0, \ \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \ \Rightarrow \ \operatorname{rang}\mathbf{A} = 2$$

2.7 Eigenwerte und Eigenvektoren

Im folgenden führen wir Eigenwerte und Eigenvektoren quadratischer Matrizen ein. Dabei ist es zweckmäßig sofort von komplexen Zahlen als Skalare sowie Vektoren und Matrizen mit komplexen Einträgen auszugehen.

Definition 2-24:

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Existiert ein Vektor $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ mit $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ und ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z}$$

so heißt λ Eigenwert und $\mathbf{z}$ (der zu λ zugehörige) Eigenvektor von $\mathbf{A}$.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ besitzt EW } \lambda = -2 \text{ und EV } \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ denn } \mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z}.$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ sind Eigenwert und zugehöriger Eigenvektor von $\mathbf{A}$ genau dann, wenn für $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ gilt

$$\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{Az} - \lambda\mathbf{z} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{z} = \mathbf{0} \;\Leftrightarrow\; \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0,$$

wobei

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$$

ein Polynom in λ vom $\operatorname{grad} p(\lambda) = n$ ist. Das Polynom $p(\lambda)$ nennt man charakteristisches Polynom von $\mathbf{A}$.

<u>Satz 2-13:</u>

a) Genau die $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ ist, sind Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $\mathbf{A}$, so sind alle nichttrivialen Lösungen des homogenen linearen Gleichungssystems $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{z} = \mathbf{0}$ zugehörige Eigenvektoren von $\mathbf{A}$.

c) Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{z} = \mathbf{0}$ ist der zu λ gehörende Eigenraum. Die Dimension der Lösungsmenge ist die Dimension des Eigenraums.

d) Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (reell), $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ zugehöriger Eigenvektor von $\mathbf{A}$, dann ist auch λ^* Eigenwert und $\mathbf{z}^*$ zugehöriger Eigenvektor von $\mathbf{A}$.

<u>Beweis:</u>

zu d) $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^*\mathbf{z}^* = \lambda^*\mathbf{z}^* \;\Rightarrow\; \mathbf{Az}^* = \lambda^*\mathbf{z}^*$, da $\mathbf{A}$ reell

<u>Beispiel:</u>

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = 0$$

$\Rightarrow\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm j$ sind (einfache) Eigenwerte von $\mathbf{A}$

Berechnung der Eigenvektoren

zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus liefert

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow\ z_3 = 0,\ z_2 = 0,\ z_1 = \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \neq 0 \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_1 = 1$$

Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$

$$E_{\lambda_1=1} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} :\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

zu $\lambda_2 = j$:

$$\begin{pmatrix} 1-j & 0 & 0 \\ 0 & -j & -1 \\ 0 & 1 & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus liefert

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1-j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow\ z_3 = \beta \in \mathbb{C},\ z_2 = j\beta,\ z_1 = 0$$

$$\Rightarrow \beta \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \beta \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \text{ sind Eigenvektoren zu } \lambda_2 = j$$

Eigenraum zu $\lambda_2 = j$

$$E_{\lambda_2 = j} = \left\{ \beta \begin{pmatrix} 0 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

zu $\lambda_3 = -j$:

$$\Rightarrow \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma \in \mathbb{C} \backslash \{0\} \text{ sind Eigenvektoren zu } \lambda_3 = -j$$

Eigenraum zu $\lambda_3 = -j$

$$E_{\lambda_3 = -j} = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -j \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; \gamma \in \mathbb{C} \right\}$$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Berechnung der Eigenwerte</u>

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1+\lambda & -(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$= -(1+\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(1+\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) = 0$$

$\Rightarrow \; \lambda_1 = -1$ zweifacher Eigenwert, $\lambda_2 = 2$ einfacher Eigenwert

<u>Berechnung der Eigenvektoren</u>

zu $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus liefert

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow z_2 = \alpha,\ z_3 = \beta,\ z_1 = -\alpha - \beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$$

sind Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$

Eigenraum zu $\lambda_1 = -1$

$$E_{\lambda_1 = -1} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} :\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

ist Eigenraum zu $\lambda_1 = -1$ mit $\dim E_{\lambda_1 = -1} = 2$

zu $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow z_1 = \gamma, z_2 = \gamma, z_3 = \gamma, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \gamma \neq 0 \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_2 = 2$$

Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$

$$E_{\lambda_2=2} = \left\{ \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$ ist Eigenraum zu $\lambda_2 = 2$ mit $\dim E_{\lambda_2=2} = 1$

In diesem Fall gilt:

$$E_{\lambda_1=-1} \perp E_{\lambda_2=2}, \quad \text{denn} \quad \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$$

Im folgenden werden einige Eigenschaften von Matrizen und deren Eigenwerten und Eigenvektoren zusammengestellt.

<u>Satz 2-14:</u>

$\mathbf{A}$ habe den Eigenwert λ mit dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{z}$. Dann gilt

a) $\mathbf{A}^n$ hat den Eigenwert λ^n und den gleichen Eigenvektor $\mathbf{z}$,

b) $\alpha\mathbf{A}$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ hat den Eigenwert $\alpha\lambda$ und den gleichen Eigenvektor $\mathbf{z}$,

c) $(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$ hat den Eigenwert $(\lambda - \alpha)$ und den gleichen Eigenvektor $\mathbf{z}$,

d) Falls $\mathbf{A}$ regulär hat $\mathbf{A}^{-1}$ den Eigenwert λ^{-1} und den gleichen Eigenvektor $\mathbf{z}$,

e) $\mathbf{A}$ ist regulär genau dann, wenn alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ ungleich null.

<u>Beweis:</u>

a) $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^2\mathbf{z} = \lambda\mathbf{Az} = \lambda^2\mathbf{z} \;\Rightarrow\;$ (per Induktion) $\mathbf{A}^n\mathbf{z} = \lambda^n\mathbf{z}$.

b) $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \alpha\mathbf{Az} = (\alpha\lambda)\mathbf{z}$.

c) $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{Az} - \alpha\mathbf{Ez} = \lambda\mathbf{z} - \alpha\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; (\mathbf{A} - \alpha\mathbf{E})\mathbf{z} = (\lambda - \alpha)\mathbf{z}$.

d) $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^{-1}\mathbf{z} = \lambda^{-1}\mathbf{z}$.

e) $\mathbf{A}$ regulär $\Leftrightarrow\; \det\mathbf{A} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) \neq 0$ für $\lambda = 0$.

Definition 2-25:

Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass gilt

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}.$$

Satz 2-15:

$\mathbf{A}$ habe den Eigenwert λ mit dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{z}$. Dann hat die zu $\mathbf{A}$ ähnliche Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ den gleichen Eigenwert λ mit dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z}$.

Beweis:

$$\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z} \;\Rightarrow\; \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Az} = \lambda\,\mathbf{C}^{-1}\mathbf{z} \;\Rightarrow\; (\text{mit } \mathbf{z} = \mathbf{Cw}) \quad \mathbf{C}^{-1}\mathbf{ACw} = \lambda\mathbf{w}.$$

Anmerkung:

Die Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C}$ besitzen gleiche charakteristische Polynome und folglich die gleichen Eigenwerte, denn

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} - \lambda\mathbf{E}) &= \det(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} - \lambda\mathbf{C}^{-1}\mathbf{CE}) = \det(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{C}) \\ &= \det\mathbf{C}^{-1}\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\det\mathbf{C} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}).\end{aligned}$$

Satz 2-16:

Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix $\mathbf{A}$ sind die Elemente der Hauptdiagonalen von $\mathbf{A}$.

Beweis:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$$

$\Rightarrow\; a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sind die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.

Anmerkung:

Man kann zeigen (Satz von Schur), dass jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ einer Dreiecksmatrix ähnlich ist.

Satz 2-17:

Es seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ nicht notwendig verschiedene Eigenwerte von $\mathbf{A} = (a_{ik}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt

$$\mathrm{Sp}\,\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

und

$$\det \mathbf{A} = \lambda_1\,\lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

Anmerkung:

Die Summe der Diagonalelemente einer Matrix $\mathbf{A}$ heißt Spur der Matrix, d.h. $\mathrm{Sp}\,\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

Für die Spur des Produkts zweier Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kann man zeigen, dass $\mathrm{Sp}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Sp}(\mathbf{BA})$ gilt.

Satz 2-18:

Sei $\mathbf{A}$ eine $n \times n$ Matrix.

a) $\mathbf{A}$ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

b) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

c) $\mathbf{A}$ habe n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$. Sei $\mathbf{C} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n)$, dann gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\mathrm{n} \end{pmatrix}$$

und man bezeichnet $\mathbf{A}$ als diagonalähnlich oder diagonalisierbar.

d) Falls $\mathbf{A}$ mehrfache Eigenwerte besitzt gilt Aussage c) nur dann, wenn für alle mehrfachen Eigenwerte die Dimension des Eigenraums gleich der Vielfachheit des zugehörigen Eigenwertes ist. In diesem Fall müssen in $\mathbf{C}$ entsprechend der jeweiligen Eigenraumdimension viele linear unabhängige Eigenvektoren stehen.

e) Jede reelle symmetrische bzw. komplexe hermitesche Matrix $\mathbf{A}$ ist diagonalähnlich oder diagonalisierbar.

f) Ist $\mathbf{A}$ reell symmetrisch bzw. komplex hermitesch so sind alle Eigenwerte reell und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander. Also kann man die Matrix $\mathbf{C}$ orthogonal bzw. unitär wählen mit

$$\mathbf{D} = \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}^H\mathbf{A}\mathbf{C}$$

g) Ist $\mathbf{A}$ orthogonal bzw. unitär, so haben alle Eigenwerte den Betrag eins.

Beweis:

a) $\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E})$ ist ein Polynom vom grad $n \Rightarrow$ höchstens n verschiedene Nullstellen.

b) Aus $\alpha_1\mathbf{z}_1 + \alpha_2\mathbf{z}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{z}_n = \mathbf{0}$ folgt durch Multiplikation mit $\mathbf{A}$ von links $\lambda_1\alpha_1\mathbf{z}_1 + \lambda_2\alpha_2\mathbf{z}_2 + \ldots + \lambda_n\alpha_n\mathbf{z}_n = \mathbf{0}$.

Beide Gleichungen liefern

$$\lambda_1(\alpha_1\mathbf{z}_1 + \alpha_2\mathbf{z}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{z}_n) - \lambda_1\alpha_1\mathbf{z}_1 - \lambda_2\alpha_2\mathbf{z}_2 - \ldots - \lambda_n\alpha_n\mathbf{z}_n$$
$$= (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2\mathbf{z}_2 + \ldots + (\lambda_1 - \lambda_n)\alpha_n\mathbf{z}_n = \mathbf{0}.$$

Analog erhält man aus $(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_2\mathbf{z}_2 + \ldots + (\lambda_1 - \lambda_n)\alpha_n\mathbf{z}_n = \mathbf{0}$

$$\lambda_2((\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2\mathbf{z}_2+\ldots+(\lambda_1-\lambda_n)\alpha_n\mathbf{z}_n)-\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)\alpha_2\mathbf{z}_2-\ldots-\lambda_n(\lambda_1-\lambda_n)\alpha_n\mathbf{z}_n=$$
$$(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)\alpha_3\mathbf{z}_3 + \ldots + (\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)\alpha_n\mathbf{z}_n = \mathbf{0}.$$

Durch Wiederholen gelangt man schließlich zu

$$(\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_2 - \lambda_n)\ \ldots\ (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\alpha_n\mathbf{z}_n = \mathbf{0}$$

woraus $\alpha_n = 0$ folgt. Dies liefert rückwärts eingesetzt

$$\alpha_{n-1} = \alpha_{n-2} = \ldots = \alpha_1 = 0.$$

c) $\mathbf{A}$ habe n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mit den zugehörigen Eigenvektoren $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$. Nach b) sind die Eigenvektoren linear unabhängig und somit die Matrix $\mathbf{C} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n)$ regulär. Da $\mathbf{A}\mathbf{s}_i = \lambda_i\mathbf{s}_i$ für $i = 1, \ldots, n \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{A}$ diagonalisierbar.

d) Ist λ ein k-facher Eigenwert und gilt $\dim E_\lambda = k \Rightarrow$ man kann k linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k$ zum Eigenwert λ wählen $\Rightarrow$ $\mathbf{C}$ regulär und es gilt $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

e) Ist $\mathbf{A}$ reell symmetrisch bzw. komplex hermitesch und ist λ ein k-facher Eigenwert $\Rightarrow$ $\dim E_\lambda = k$ (Beweis s. Literatur).

f) Aus $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z}$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$ und damit $\mathbf{z}^H\mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{z}^H\mathbf{A}^H\mathbf{z} = (\mathbf{z}^H\mathbf{A}\mathbf{z})^H$ folgt $\lambda\mathbf{z}^H\mathbf{z} = (\lambda\mathbf{z}^H\mathbf{z})^H = \lambda^*\mathbf{z}^H\mathbf{z} \Rightarrow \lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}$.

Sind λ_1, λ_2 Eigenwerte von $\mathbf{A}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{C}^n$ die zugehörigen Eigenvektoren dann liefert $\mathbf{z}_1^H\mathbf{A}\mathbf{z}_2 = (\mathbf{A}^H\mathbf{z}_1)^H\mathbf{z}_2 = (\mathbf{A}\mathbf{z}_1)^H\mathbf{z}_2$ schließlich $\lambda_1\mathbf{z}_1^H\mathbf{z}_2 = \lambda_2\mathbf{z}_1^H\mathbf{z}_2 \Rightarrow \mathbf{z}_1^H\mathbf{z}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{z}_1 \perp \mathbf{z}_2$.

Ist λ k-facher Eigenwert von $\mathbf{A}$, so kann man eine orthonormale Basis des zughörigen Eigenraums wählen, d.h. $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k$ mit $\mathbf{z}_i \perp \mathbf{z}_j$ für $i \neq j$ und $|\mathbf{z}_i| = 1$ für $i = 1, \ldots, k$ $\Rightarrow$ $\mathbf{C}$ ist orthogonal und es gilt $\mathbf{D} = \mathbf{C}^H\mathbf{A}\mathbf{C}$.

g) $\mathbf{A}$ orthogonal bzw. unitär $\Rightarrow$ $|\mathbf{Az}| = |\mathbf{z}|$ $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ $\Rightarrow$ $|\mathbf{Az}| = |\lambda\mathbf{z}| = |\mathbf{z}|$ $\Rightarrow$ $|\lambda| = 1$.

Beispiel:

1) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & 6-\lambda & -2 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(6-\lambda)(2-\lambda) + 2(-4 + (6-\lambda))$$

$$= (2-\lambda)((3-\lambda)(6-\lambda) + 2)$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-5)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4,\ \lambda_3 = 5$ sind einfache Eigenwerte

Berechnung der Eigenvektoren

zu $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_1 = 2$$

zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_2 = 4$$

zu $\lambda_3 = 5$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{z}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_3 = 5$$

also gilt

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 6 & -6 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Berechnung der Eigenwerte</u> (s. Beispiel 2 auf S. 132)

$\lambda_1 = -1$ zweifacher Eigenwert, $\lambda_2 = 2$ einfacher Eigenwert

<u>Berechnung der Eigenvektoren</u> (s. Beispiel 2 auf S. 132)

zu $\lambda_1 = -1$: $\quad (-\alpha - \beta, \alpha, \beta)^T$ mit $(\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$

zu $\lambda_2 = 2$: $\quad \gamma(1,1,1)^T$ mit $\gamma \neq 0$

Nun wählen wir zwei orthogonale Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$

mit $(\alpha, \beta)^T = (-1, 0)^T \Rightarrow (1, -1, 0)^T$

für den zweiten Eigenvektor muss gelten

$(1, -1, 0)(-\alpha - \beta, \alpha, \beta)^T = -2\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \beta = -2\alpha$

mit $\alpha = 1 \Rightarrow (1, 1, -2)^T$

normieren liefert mit

$$\mathbf{z}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T \;, \quad \mathbf{z}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^T$$

eine orthonormale Basis des Eigenraums zu $\lambda_1 = -1$.

Der normierte Eigenvektor zu $\lambda_2 = 2$ lautet

$$\mathbf{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T.$$

Er steht gemäß Satz 2-18 senkrecht auf dem Eigenraum zu $\lambda_1 = -1$.

Somit gilt

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \; \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T \;\Rightarrow\; \mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Berechnung der Eigenwerte</u>

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$\Rightarrow\; \lambda_1 = 1$ zweifacher Eigenwert, $\lambda_2 = 2$ einfacher Eigenwert

<u>Berechnung der Eigenvektoren</u>

zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \alpha \neq 0 \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_1 = 1$$

$\Rightarrow\; \dim E_{\lambda_1 = 1} = 1 < 2 =$ Vielfachheit des Eigenwerts

$\Rightarrow\; \mathbf{A}$ ist nicht diagonalisierbar

Berechnung höherer Potenzen diagonalisierbarer Matrizen

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonalisierbar, d.h. es existiert eine reguläre Matrix $\mathbf{C}$ mit $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$.

$$\Rightarrow\ \mathbf{AC} = \mathbf{CD}\ \Rightarrow\ \mathbf{A} = \mathbf{CDC}^{-1}\ \Rightarrow\ \mathbf{A}^2 = \mathbf{CDC}^{-1}\mathbf{CDC}^{-1} = \mathbf{CD}^2\mathbf{C}^{-1}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{A}^k = \mathbf{CD}^k\mathbf{C}^{-1}\ \text{(mittels Induktion)}$$

$\mathbf{A}^k$ lässt sich nun einfach berechnen, denn für eine Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_\mathrm{n} \end{pmatrix}$$

ergibt sich deren k-te Potenz zu

$$\mathbf{D}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Beispiel: (s. Beispiel 2 auf Seite 2-146)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix},\ \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T$$

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{CD}^k\mathbf{C}^T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^k\sqrt{3} & -(-1)^k\sqrt{3} & 0 \\ (-1)^k & (-1)^k & -2(-1)^k \\ 2^k\sqrt{2} & 2^k\sqrt{2} & 2^k\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} \\ -2(-1)^k + 2^{k+1} & 4(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} \\ -2(-1)^k + 2^{k+1} & -2(-1)^k + 2^{k+1} & 4(-1)^k + 2^{k+1} \end{pmatrix}$$

2.8 Quadratische Formen, quadratische Polynome

Definition 2-26:

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, so heißt

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

eine quadratische Form.

Ausgeschrieben lautet die quadratische Form

$$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)x_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Beispiel:

1) $q(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1x_2$

2) $q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$

Definition 2-27:

Es sei $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ eine quadratische Form.

a) $q(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{A}$ heißt positiv definit genau dann, wenn $q(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

b) $q(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{A}$ heißt negativ definit genau dann, wenn $q(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$.

c) $q(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{A}$ heißt indefinit genau dann, wenn $q(\mathbf{x})$ positive und negative Werte annimmt.

d) $q(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{A}$ heißt positiv semidefinit genau dann, wenn $q(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

e) $q(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{A}$ heißt negativ semidefinit genau dann, wenn $q(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Es sei $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ eine quadratische Form. Dann gilt

a) $q(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind > 0,

b) $q(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind < 0,

c) $q(\mathbf{x})$ nimmt positive und negative Werte an $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$ hat positive und negative Eigenwerte,

d) $q(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind ≥ 0,

e) $q(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind ≤ 0.

Beweis:

Da $\mathbf{A}$ symmetrisch, existiert eine orthogonale Matrix $\mathbf{C}$ mit $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T$ $\Rightarrow$ $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{x} = \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i^2$ mit $\mathbf{u} = \mathbf{C}^T\mathbf{x}$.

Also gilt $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, da wegen $|\mathbf{u}| = |\mathbf{C}^T\mathbf{x}| = |\mathbf{x}|$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ auch $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ folgt. Alle anderen Äquivalenzen ergeben sich analog.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (\mathrm{Sp}\mathbf{A})\lambda + \det\mathbf{A}$$

Seien λ_1, λ_2 die Eigenwerte von $\mathbf{A}$, so gilt

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

und damit

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Sp}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22},\ \lambda_1\lambda_2 = \det\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Das vorherige Beispiel motiviert den folgenden Satz.

Satz 2-20:

Für eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt

$\mathbf{A}$ positiv definit $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 > 0$ und $\lambda_2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $a_{11} > 0$ und $\det\mathbf{A} > 0$,

$\mathbf{A}$ negativ definit $\Leftrightarrow$ $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$ $\Leftrightarrow$ $a_{11} < 0$ und $\det\mathbf{A} > 0$,

$\mathbf{A}$ indefinit $\Leftrightarrow$ λ_1, λ_2 haben verschiedene Vorzeichen $\Leftrightarrow$ $\det\mathbf{A} < 0$.

Beweis:

$\det\mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \lambda_1\lambda_2, \quad \mathrm{Sp}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2,$

$\det\mathbf{A} > 0 \;\Rightarrow\; a_{11}a_{22} > a_{12}^2 \geq 0 \;\Rightarrow\; a_{11}, a_{22}$ besitzen gleiche Vorzeichen.

Sei $a_{11} > 0 \;\Rightarrow\; a_{22} > 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 + \lambda_2 > 0,$ da $\det\mathbf{A} = \lambda_1\lambda_2 > 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$

Ist umgekehrt $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \;\Rightarrow\; \det\mathbf{A} > 0 \;\Rightarrow\; a_{11}, a_{22}$ besitzen gleiche Vorzeichen $\Rightarrow\; a_{11} > 0$ (da $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$).

Die beiden anderen Fälle können analog bewiesen werden.

Beispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; a_{11} = 1 > 0, \ \det\mathbf{A} = 3/4 > 0$$

$\Rightarrow\; \mathbf{A}$ ist positiv definit $\Rightarrow\; \mathbf{A}$ hat nur positive Eigenwerte

$\Rightarrow\; \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$

Satz 2-21:

Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Ferner seien

$$D_i = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$

der führende Hauptminor der Ordnung i,

$$\Delta_i = \det\begin{pmatrix} a_{l_1,l_1} & a_{l_1,l_2} & \dots & a_{l_1,l_i} \\ a_{l_2,l_1} & a_{l_2,l_2} & \dots & a_{l_2,l_i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l_i,l_1} & a_{l_i,l_2} & \dots & a_{l_i,l_i} \end{pmatrix}, \ 1 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_i \leq n$$

einer der (n über i) Hauptminoren der Ordnung i und λ_i $(i = 1, \dots, n)$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$. Dann gilt

$\mathbf{A}$ ist positiv definit $\Leftrightarrow D_i > 0$ für $i = 1,2,...,n$

$\Leftrightarrow \lambda_i > 0$ für $i = 1,2,...,n$

$\mathbf{A}$ ist negativ definit $\Leftrightarrow (-1)^i D_i > 0$ für $i = 1,2,...,n$

$\Leftrightarrow \lambda_i < 0$ für $i = 1,2,...,n$

$\Leftrightarrow -\mathbf{A}$ ist positiv definit

$\mathbf{A}$ ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow \Delta_n = 0$ und alle $\Delta_i \geq 0$ für $i = 1,2,...,n-1$

$\Leftrightarrow \lambda_i \geq 0$ für $i = 1,2,...,n$, wobei mindestens ein $\lambda_i = 0$ ist

$\mathbf{A}$ ist negativ semidefinit $\Leftrightarrow \Delta_n = 0$ und alle $(-1)^i \Delta_i \geq 0$ für $i = 1,2,...,n-1$

$\Leftrightarrow \lambda_i \leq 0$ für $i = 1,2,...,n$, wobei mindestens ein $\lambda_i = 0$ ist

$\Leftrightarrow -\mathbf{A}$ ist positiv semidefinit

$\mathbf{A}$ ist indefinit $\Leftrightarrow D_i$ haben andere Vorzeichen als oben

$\Leftrightarrow$ es existieren $\lambda_i > 0$ und $\lambda_i < 0$

Satz 2-22:

Es sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Ferner sei λ_1 der größte Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ und λ_n der kleinste Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit dem zugehörigen Eigenvektor $\mathbf{x}_n$, dann gilt

$$\max_{|\mathbf{x}|=1}(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda_1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_1 = \arg\max_{|\mathbf{x}|=1}(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x})$$

und

$$\min_{|\mathbf{x}|=1}(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda_n \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}_n = \arg\min_{|\mathbf{x}|=1}(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}).$$

Beweis:

Da $\mathbf{A}$ symmetrisch, existiert eine orthogonale Matrix $\mathbf{C}$ mit $\mathbf{C}^T\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{D}$ $\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T \Rightarrow \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{x} = (\mathbf{C}^T\mathbf{x})^T\mathbf{D}(\mathbf{C}^T\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u}$ mit $\mathbf{u} = \mathbf{C}^T\mathbf{x}$ und es gilt $\lambda_n\mathbf{u}^T\mathbf{u} \leq \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u} \leq \lambda_1\mathbf{u}^T\mathbf{u} \Rightarrow \lambda_n \leq \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \lambda_1$ da $|\mathbf{x}| = |\mathbf{u}| = 1$.

Ist $\mathbf{x}_1$ Eigenvektor zu λ_1 mit $|\mathbf{x}_1| = 1$, so gilt $\mathbf{x}_1^T\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_1 = \lambda_1$. Also gilt $\max(\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda_1$ (analog für Minimum).

Beispiel:

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \max_{x_1^2 + x_2^2 = 1} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \frac{3}{2} \text{ und } \min_{x_1^2 + x_2^2 = 1} (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) = \frac{1}{2}.$$

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 3/2$ sind $(\alpha, \alpha)^T$, $(\alpha \neq 0)$ und mit Betrag 1

$\mathbf{x}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. An dieser Stelle wird das Maximum angenommen.

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1/2$ sind $(\alpha, -\alpha)^T$, $(\alpha \neq 0)$ und mit Betrag 1

$\mathbf{x}_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. An dieser Stelle wird das Minimum angenommen.

Anmerkung:

Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine hermitesche Matrix und $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, so nennt man

$$q(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^H \mathbf{A}\mathbf{z} \in \mathbb{R}$$

ebenfalls eine quadratische Form.

Definition 2-28:

Eine Funktion der Form

$$p(\mathbf{x}) = c + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$$

mit $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt quadratisches Polynom in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Beispiel:

$$5x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2^2 - 18x_1 - 12x_2 + 15 = c + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

mit $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \end{pmatrix}$, $c = 15$.

Eigenwerte von **A**:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)-4 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-6) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6 \text{ sind die Eigenwerte von } \mathbf{A}$$

Eigenvektoren von **A**:

zu $\lambda_1 = 1$:

$$\left.\begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_1 = 1$$

zu $\lambda_2 = 6$:

$$\left.\begin{matrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_2 = 6$$

Normieren der Eigenvektoren liefert die orthogonale Transformationsmatrix

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^T = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix $\mathbf{C}$ erzeugt eine Drehung um $-\alpha$ mit $\cos\alpha = 1/\sqrt{5}$ und $\sin\alpha = 2/\sqrt{5}$, also $\alpha = 63{,}4°$.

$$c + \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = c + \mathbf{b}^T\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{D}\mathbf{C}^T\mathbf{x} = 0$$

$$\Rightarrow \ c + (\mathbf{C}^T\mathbf{b})^T\mathbf{u} + \mathbf{u}^T\mathbf{D}\mathbf{u} = 0 \ \text{ mit } \ \mathbf{u} = \mathbf{C}^T\mathbf{x}$$

(durch die Transformation $\mathbf{u} = \mathbf{C}^T\mathbf{x}$ wird eine Hauptachsentransformation durchgeführt, damit die neuen Koordinatenachsen parallel zu den Achsen des Kegelschnitts verlaufen)

$$15+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-18\\ -12\end{pmatrix}\right)^T\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}=0$$

$$15+\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}6\\ -48\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}u_1\\ 6u_2\end{pmatrix}=0$$

$$u_1^2+6u_2^2+\frac{6}{\sqrt{5}}u_1-\frac{48}{\sqrt{5}}u_2+15=0$$

quadratische Ergänzung liefert

$$\left(u_1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+6\left(u_2-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{5}+\frac{96}{5}-15=6$$

$$\frac{(u_1+3/\sqrt{5})^2}{\sqrt{6}^2}+\frac{(u_2-4/\sqrt{5})^2}{1^2}=\begin{pmatrix}u_1+3/\sqrt{5}\\ u_2-4/\sqrt{5}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\sqrt{6} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1+3/\sqrt{5}\\ u_2-4/\sqrt{5}\end{pmatrix}=1$$

$\Rightarrow$ Ellipse mit Mittelpunkt $(-3/\sqrt{5}, 4/\sqrt{5})$ und Halbachsen $\sqrt{6}$ und 1.

Anmerkung:

Eine quadratische Form geht durch Translation des Koordinatensystems wie folgt in ein quadratisches Polynom über.

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) &= (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^T(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{A}\mathbf{x}_0)\\ &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}-\underbrace{2\mathbf{x}_0^T\mathbf{A}}_{-\mathbf{b}^T}\mathbf{x}+\underbrace{\mathbf{x}_0^T\mathbf{A}\mathbf{x}_0}_{c}=\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}^T\mathbf{x}+c=p(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Ein quadratisches Polynom kann umgekehrt nicht immer durch Koordinatentransformation in eine quadratische Form übergeführt werden.

Aufgabe 2-1: Gegeben seien

$$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2, \quad \vec{b} = -2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2, \quad \vec{c} = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_3 .$$

Schreiben Sie die Vektoren

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ \vec{a}+\vec{b}, \ \vec{b}-\vec{c}, \ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}, \ \vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$$

als Spaltenvektoren und berechnen Sie deren Betrag.

Aufgabe 2-2: Bestimmen sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\quad \vec{b} = -2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$

b) $\vec{a} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\quad \vec{b} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

c) $\vec{a} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3$

Aufgabe 2-3: Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

a) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$

c) $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

d) $(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

e) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

f) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ Spatprodukt

Aufgabe 2-4: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind durch $|\vec{a}| = 15$, $|\vec{b}| = 10$, $\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{a}) = 0,6$, $\cos\angle(\vec{e}_2,\vec{a}) = 0,8$, $\cos\angle(\vec{e}_1,\vec{b}) = 0,4$ und $\cos\angle(\vec{e}_2,\vec{b}) = 0,6$ gegeben. Berechnen Sie

a) Die Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$

b) Die Richtungswinkel $\angle(\vec{e}_i,\vec{a})$ und $\angle(\vec{e}_i,\vec{b})$

c) Das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$

d) Den Winkel $\angle(\vec{a},\vec{b})$

e) Die Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$

Aufgabe 2-5: Berechnen Sie für die Vektoren

$$\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{c} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$$

a) die orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$

b) den Ausdruck $\left((\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\right)\cdot\vec{c}$.

Aufgabe 2-6: Untersuchen Sie die folgenden Vektortripel auf lineare Abhängigkeit. Im Falle linearer Abhängigkeit bestimme man $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ so, dass $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$ gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2-7: Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a} = 5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3, \quad \vec{b} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3, \quad \vec{c} = \vec{e}_1 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$$

linear unabhängig sind und stellen Sie den Vektor

$$\vec{d} = 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$$

als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Aufgabe 2-8: Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie – falls möglich – $\mathbf{AC}$, $\mathbf{C}^T\mathbf{A}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{D}^T\mathbf{ABD}$, $\mathbf{D}^T\mathbf{C}^T\mathbf{AD}$ und $\mathbf{D}^T\mathbf{B}^T + (\mathbf{A}^T\mathbf{D})^T$.

Aufgabe 2-9: Bestimmen Sie die Lösungsmengen der Gleichungssysteme

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$

mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix an.

Aufgabe 2-10: Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$, $\det(3\mathbf{A}^T)$, $\det(\mathbf{A}^3)$ und $\operatorname{rang}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$.

Aufgabe 2-11: Gegeben sei mit $a, b \in \mathbb{R}$ die $n \times n$ Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \cdots & a & a \\ a & a+b & a & \cdots & a & a \\ a & a & a+b & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a+b & a \\ a & a & a & \cdots & a & a+b \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

Aufgabe 2-12: Berechnen Sie mit Hilfe

a) des Gauß-Algorithmus die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) der Cramer-Regel die Inverse der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2-13: Bestimmen Sie von den folgenden Matrizen jeweils die Eigenwerte und ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -10 & -10 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2-14: Gegeben seien die symmetrischen Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, g) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie mit Hilfe der führenden Hauptminoren welche der obigen Matrizen positiv definit sind.

Aufgabe 2-15: Welche der folgenden quadratischen Formen $q(x_1, x_2, x_3)$ sind positiv definit?

a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, b) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, c) $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

d) $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3$, e) $3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2$.