Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 1

Kapitel 3

Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 1

Kapitel 3

Inhaltsverzeichnis

3 Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit

3.1 Grundbegriffe

Zunächst einige Definitionen über reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Definition 3-1:

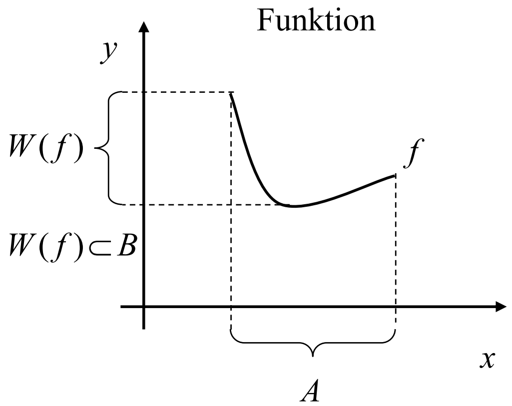
Es seien A und B zwei nicht leere Mengen.

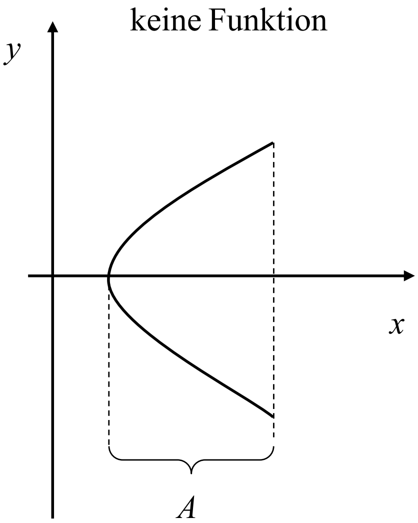
1) $f: A \to B$ heißt Funktion von A nach B, wenn jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zugeordnet wird.

$$f: a \in A \mapsto b \in B$$

$b = f(a)$ heißt Funktionswert an der Stelle a.

$\left\{ \begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix} : \quad a \in A \right\}$ heißt Graph der Funktion f.



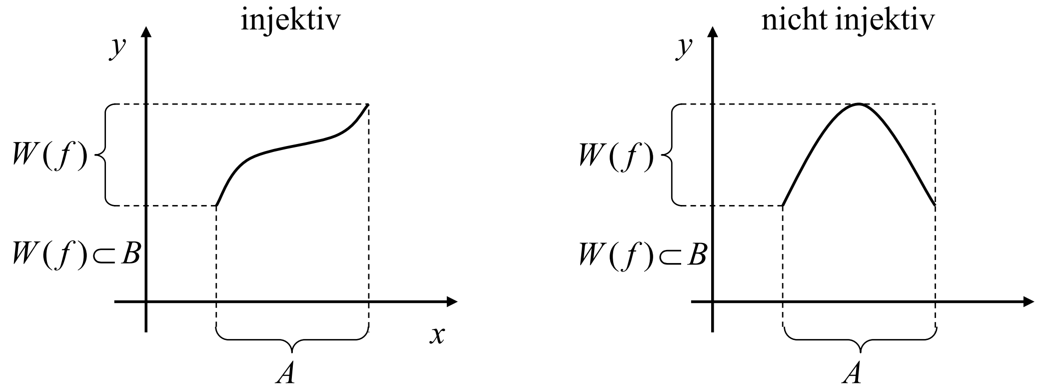


A heißt Definitionsbereich $D(f)$.

$W(f) := f(A) = \left\{ b \in B : \; \exists a \in A \text{ mit } f(a) = b \right\} \subset B$
heißt Wertebereich von f.

2) $f: A \to B$ heißt injektiv (eineindeutig), wenn $\forall a_1, a_2 \in A$ mit

$$f(a_1) = f(a_2) \;\Rightarrow\; a_1 = a_2 \,.$$



3) $f: A \to B$ heißt surjektiv (Abbildung auf), wenn $W(f) = B$ ist.

4) $f: A \to B$ heißt bijektiv (eineindeutig auf bzw. umkehrbar eindeutig), wenn f injektiv und surjektiv ist.

Definition 3-2:

Sind $f: A \to B$ und $g: W(f) \to C$ zwei Funktionen, so heißt

$$h: A \to C$$

mit

$$h(a) = g\big(f(a)\big) \quad \forall a \in A$$

die aus f und g zusammengesetzte Funktion

$$h = g \circ f.$$

Beispiel:

Mit $f(x) = x^3 + 5$ und $g(x) = \sin x$ entsteht

$$g\big(f(x)\big) = \sin(x^3 + 5)$$

Definition 3-3: (*Umkehrfunktion*)
Ist $f : A \to B$ bijektiv, so existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : B \to A$$

mit

$$f^{-1} \circ f = id_A \qquad \left(f^{-1}\left(f(x) \right) = id_A(x) \right)$$

und

$$f \circ f^{-1} = id_B \qquad \left(f\left(f^{-1}(y) \right) = id_B(y) \right),$$

wobei id_A und id_B die Identitätsabbildung auf A bzw. B bezeichnet, d.h.

$$id_A(a) = a \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad id_B(b) = b \quad \forall b \in B.$$

Also gilt

$$f^{-1}\left(f(a) \right) = a \quad \forall a \in A \quad \text{und} \quad f\left(f^{-1}(b) \right) = b \quad \forall b \in B$$

Beispiel:

$$f : [0,\infty) \to [0,\infty) \qquad \left(y = f(x) = x^2 \right)$$
$$x \mapsto x^2$$

f ist bijektiv

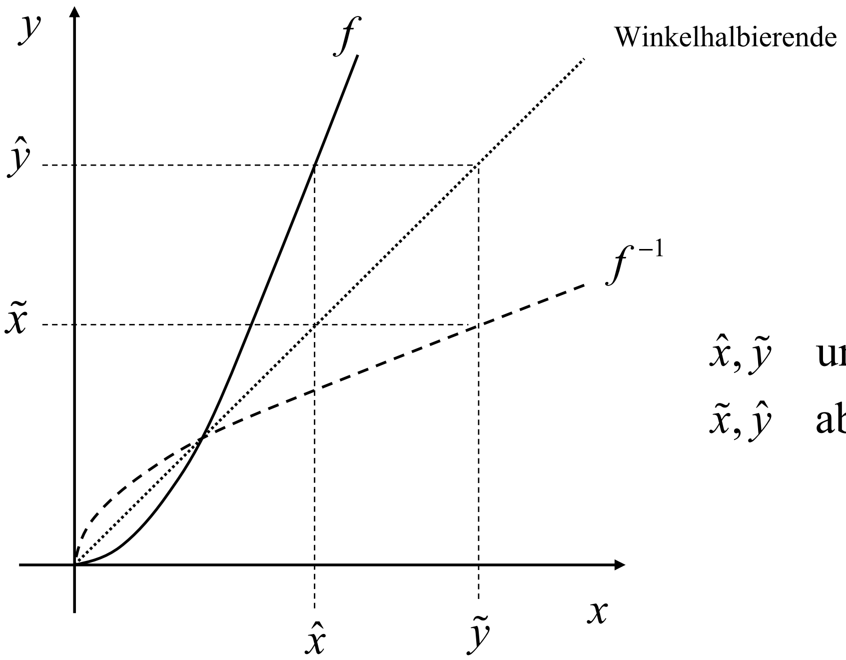
$$f^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty) \qquad \left(x = f^{-1}(y) = \sqrt{y} \right)$$
$$y \mapsto \sqrt{y}$$

Die Rechenvorschrift für die Umkehrfunktion erhält man durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x.

$$y = f(x) = x^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{y},$$

da $x \geq 0$ folgt $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Den Graphen der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.



$\hat{x}, \tilde{y}$ unabhängige Variable

$\tilde{x}, \hat{y}$ abhängige Variable

Definition 3-4:

Eine Funktion $f : A \to B$ heißt auf der Menge $M \subset A$ beschränkt, wenn es eine endliche Konstante K derart gibt, dass

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in M$$

gilt. Dabei wird K eine Schranke von f auf M genannt.

Beispiel:

$y = f(x) = \sin x$

$|\sin x| \leq K = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Definition 3-5:

Eine Funktion $f: A \to B$ heißt auf der Menge $M \subset A$ nach unten bzw. oben beschränkt, wenn es eine endliche Konstante K_u bzw. K_o derart gibt, dass

$$K_u \leq f(x) \quad \forall x \in M$$

bzw.

$$f(x) \leq K_o \quad \forall x \in M$$

gilt. Dabei werden K_u bzw. K_o untere bzw. obere Schranke von f auf M genannt.

Beispiel:

1) $y = x^2 - 2x - 1 = (x-1)^2 - 2$

   $(x-1)^2 - 2 \geq K_u = -2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $y = 1 - x^2 - 4x = 5 - (x+2)^2$

   $5 - (x+2)^2 \leq K_o = 5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Definition 3-6: (*Intervalle*)

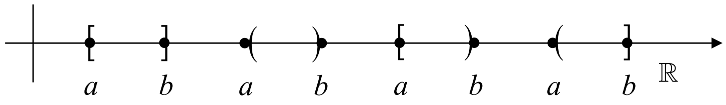
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Menge

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ heißt abgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$ heißt offenes Intervall

$$\left.\begin{array}{l} [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\} \\ (a,b] := \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\} \end{array}\right\} \text{heißt halboffenes Intervall}$$

Beispiel:



Definition 3-7: (*Monoton wachsende und fallende Funktionen*)

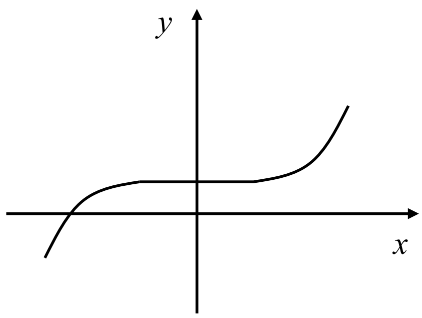
Eine Funktion $f: A \to B$ heiß im Intervall $I \subset A$ monoton wachsend bzw. streng monoton wachsend, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 > x_2$ die Ungleichung

$$f(x_1) \geq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

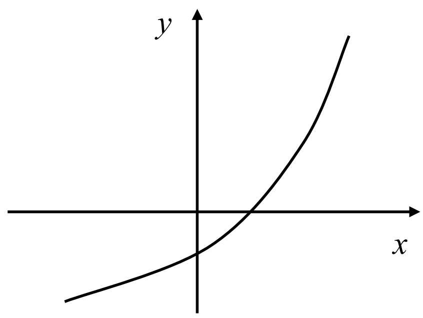
gilt. Entsprechend heißt sie monoton fallend bzw. streng monoton fallend, wenn $\forall x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 > x_2$ die Ungleichung

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{bzw.} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

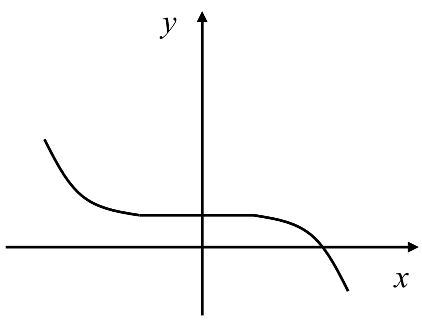
gilt.



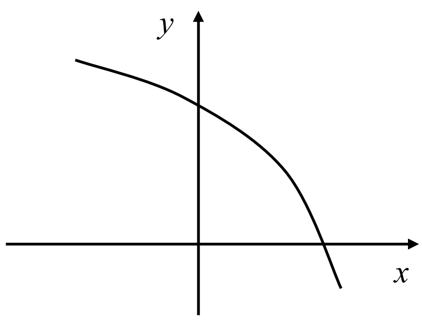
monoton wachsend



streng monoton wachsend



monoton fallend



streng monoton fallend

Beispiel:

1) $f(x) = x^2$

$I = (-\infty, 0]$ streng monoton fallend

$I = [0, \infty)$ streng monoton wachsend

2) $f(x) = \sin x^2$

$I = [-\pi/2, \pi/2]$ streng monoton wachsend

$I = [\pi/2, 3\pi/2]$ streng monoton fallend

3) $f(x) = x^3$

$I = \mathbb{R}$ streng monoton wachsend

Definition 3-8:

Eine Funktion $f: A \to B$ heißt gerade bzw. ungerade, wenn $A \subset \mathbb{R}$ symmetrisch zum Nullpunkt und

$$f(-x) = f(x) \quad \text{bzw.} \quad f(-x) = -f(x)$$

für alle $x \in A \backslash \{0\}$ gilt.

Definition 3-9:

Eine Funktion $f: A \to B$ heißt periodisch mit der Periode $\lambda > 0$, wenn für alle $x \in A$ für die auch $x + \lambda \in A$ ist, gilt

$$f(x + \lambda) = f(x)$$

Dabei wird das kleinste $\lambda > 0$, für das obige Gleichung gilt, primitive Periode genannt.

3.2 Elementare Funktionen

3.2.1 Ganzrationale Funktionen

<u>Definition 3-10:</u>

Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ heißt ganzrationale Funktion (Polynom) vom Grad n, wenn es reelle Zahlen $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gibt, $a_n \neq 0$, so dass

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die a_i heißen Koeffizienten der ganzrationalen Funktion (des Polynoms).

<u>Addition bzw. Subtraktion von Polynomen</u>

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k$$

<u>Multiplikation von Polynomen</u>

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{n} b_l x^l\right) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n} a_k b_l x^{k+l}\right)$$

3.2.1.1 Lineare Funktion

<u>Hauptform:</u>

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 können durch Angabe von zwei Funktionswertepaaren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) berechnet werden.

<u>Voraussetzung:</u>

Für $x = x_1$ ist $y = y_1$, d.h. $y_1 = a_0 + a_1 x_1$

Für $x = x_2$ ist $y = y_2$, d.h. $y_2 = a_0 + a_1 x_2$

Mit

$$y_2 - y_1 = a_0 + a_1 x_2 - a_0 - a_1 x_1 = a_1 (x_2 - x_1)$$

folgt

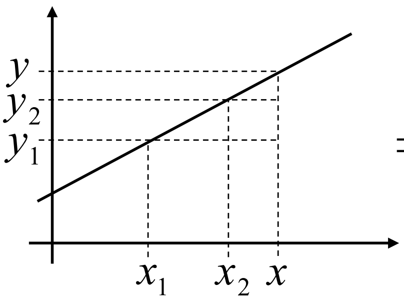
$$a_1 = (y_2 - y_1) \big/ (x_2 - x_1)$$

und nach Einsetzen in $y_1 = a_0 + a_1 x_1$

$$a_0 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = \frac{y_1 x_2 - y_1 x_1 - y_2 x_1 + y_1 x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} .$$

Neben der Hauptform sind noch die

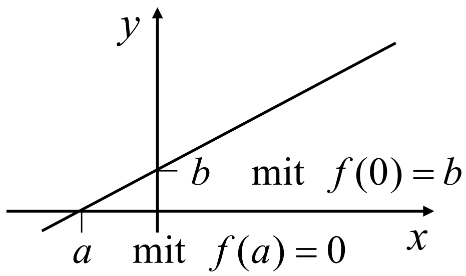
<u>Zweipunktform:</u>



$$\Rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

und die

<u>Achsenabschnittsform:</u>



$$\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

von Bedeutung.

<u>Beispiel:</u>

Für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung gilt für die Geschwindigkeit

$$v = v_0 + at \qquad \left(y = f(x) = a_0 + a_1 x \right)$$

3.2.1.2 Quadratische Funktion

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 sind durch die Angabe von drei Funktionswertepaaren (x_1, y_1), (x_2, y_2) und (x_3, y_3) eindeutig bestimmbar.

<u>Beispiel:</u>

Für Bewegungen mit konstanter Beschleunigung gilt für den Ort

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \qquad \left(y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \right)$$

<u>Nullstellen der quadratischen Funktion</u>

Durch Nullsetzen des Funktionswertes erhält man aus der quadratischen Funktion die quadratische Gleichung

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Division durch a_2 liefert die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad \text{mit} \quad p = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{und} \quad q = \frac{a_0}{a_2}.$$

Durch quadratische Ergänzung

$$\left(x + \frac{p}{2} \right)^2 = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q$$

findet man die bekannten Formeln

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q} = -\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}},$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2} \right)^2 - q} = -\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2} \right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}.$$

Beispiel:

$$x^2 \underbrace{-4}_{p} x + \underbrace{3}_{q} = (x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = +\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3} \Rightarrow x_1 = 3,\, x_2 = 1$$

Aus

$$(x - x_1)\,(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2$$

folgt der Viëtasche Wurzelsatz

$$p = -(x_1 + x_2) = -(3+1) = -4$$

und

$$q = x_1 x_2 = 3 \cdot 1 = 3.$$

3.2.1.3 Polynome dritten und höheren Grades

Berechnung der Funktionswerte

Zur Berechnung eines Funktionswertes mit der Summendarstellung

$$f(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x_0^k$$

benötigt man jetzt $2n-1$ Multiplikationen und n Additionen. Durch sukzessives Ausklammern, d.h.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_3 x^2 + a_2 x + a_1)\,x + a_0 \\ &= ((a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \ldots + a_3 x + a_2)\,x + a_1)\,x + a_0 \end{aligned}$$

erhält man die Horner-Darstellung

$$f(x) = (\ldots(((a_n x + a_{n-1})\,x + a_{n-2})\,x + a_{n-3})\,x + \ldots + a_1)\,x + a_0.$$

Berechnen von Funktionswerten mit Hilfe der Horner-Darstellung von innen nach außen reduziert den Rechenaufwand auf n Multiplikationen und n Additionen. Für das gewöhnliche Rechnen ist es noch zweckmäßig, die Horner-Darstellung in das Horner Schema zu überführen.

Horner-Schema

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
$+$		$c_n\, x_0$	$c_{n-1}\, x_0$	$\dots$	$c_2\, x_0$	$c_1\, x_0$
	$c_n = a_n$	c_{n-1}	c_{n-2}	$\dots$	c_1	$c_0 = f(x_0)$

Beispiel:

$f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 2x^2 + 4, \qquad x_0 = 2$

6	–3	0	0	2	0	4
+	$6 \cdot 2$	$9 \cdot 2$	$18 \cdot 2$	$36 \cdot 2$	$74 \cdot 2$	$148 \cdot 2$
6	9	18	36	74	148	300

Ferner gilt mit den Koeffizienten c_i $(i = 0, ..., n)$ des Horner-Schemas

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= (x - x_0)(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \ldots + c_2 x + c_1) + c_0 , \end{aligned}$$

wobei

$$c_n = a_n, \quad c_{n-1} = c_n x_0 + a_{n-1}, \quad c_{n-2} = c_{n-1} x_0 + a_{n-2}, \ldots$$
$$\ldots, c_1 = c_2 x_0 + a_1, \quad c_0 = c_1 x_0 + a_0 = f(x_0)$$

bzw.

$$a_n = c_n, \quad a_{n-1} = c_{n-1} - c_n x_0, \quad a_{n-2} = c_{n-2} - c_{n-1} x_0, \ldots$$
$$\ldots, a_1 = c_1 - c_2 x_0, \quad a_0 = c_0 - c_1 x_0,$$

Das Horner-Schema beinhaltet somit gleichzeitig die Division durch den Linearfaktor $(x - x_0)$, d.h.

$$\frac{f(x)}{x - x_0} = c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \ldots + c_2 x + c_1 + \frac{c_0}{x - x_0}.$$

Der Term $\dfrac{c_0}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0)}{x - x_0}$ bezeichnet den Divisionsrest. Die Division ist ohne Rest ausführbar, wenn $f(x_0) = 0$ ist.

Beispiel:

Dividieren Sie mittels Horner-Schema

$$f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 2x^2 + 4$$

durch den Linearfaktor $(x - 2)$. Aus obigem Beispiel folgt

$$f(x) = (x-2)(6x^5 + 9x^4 + 18x^3 + 36x^2 + 74x + 148) + 300$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x-2} = 6x^5 + 9x^4 + 18x^3 + 36x^2 + 74x + 148 + \frac{300}{x-2}$$

Polynomnullstellen und Faktorisierung

Als Nullstelle einer Funktion $f: A \to B$ bezeichnet man jede Lösung $f(x) = 0$ in A. Aufgrund von

$$f(x) = (x - x_1)(c_n x^{n-1} + c_{n-1} x^{n-2} + \ldots + c_2 x + c_1) + f(x_1)$$

ist $x_1 \in \mathbb{R}$ genau dann eine Nullstelle des Polynoms, wenn $f(x)$ den Linearfaktor $(x - x_1)$ enthält, d.h. wenn es ein Polynom $g(x)$ gibt mit

$$f(x) = (x - x_1)\, g(x)$$

Analoge Überlegungen bezüglich $g(x)$ führen auf

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\, h(x)$$

usw.

Satz 3-1:

Es seien $x_1, ..., x_m$ die reellen Nullstellen des Polynoms $f(x)$. Dann gilt die Produktdarstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_m)\, q(x) = \prod_{k=1}^{m} (x - x_k)\, q(x)$$

mit $q(x)$ einem Polynom vom Grad $(n - m)$, das in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle besitzt.

Tritt eine Nullstelle x_k in der Zerlegung

- genau einmal auf, so wird x_k einfache,
- m_k-mal auf, so wird x_k m_k-fache

Nullstelle genannt. Die Produktdarstellung kann somit auch in

$$f(x) = (x - x_1)^{m_1}\,(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_r)^{m_r}\, q(x)$$

umgeformt werden, wobei

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m$$

gilt.

Beispiel:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 \quad \text{und} \quad f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

Horner-Schema für $f(x)$ an der Stelle $x = x_1 = 1$

1	2	–3	–4	4
+	1 · 1	3 · 1	0 · 1	–4 · 1
1	3	0	–4	0

liefert

$$f(x) = (x-1)g(x) + f(1) = (x-1)g(x)$$

mit

$$g(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \quad \text{und} \quad g(1) = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 1$$

Horner-Schema für $g(x)$ an der Stelle $x = x_2 = 1$

1	3	0	–4
+	1 · 1	4 · 1	4 · 1
1	4	4	0

liefert

$$g(x) = (x-1)\,h(x) + g(1) = (x-1)\,h(x)$$

mit

$$h(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \;\Rightarrow\; x_{3,4} = -2.$$

Also gilt

$$f(x) = (x-1)^2 (x+2)^2,$$

d.h. $f(x)$ besitzt zwei zweifache Nullstellen bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$.

<u>Anmerkung:</u>
Nullstellen quadratischer Polynome bestimmt man mit den bekannten Formeln. Ähnliche, aber deutlich kompliziertere Formeln existieren auch für Polynome dritten und vierten Grades. Für Polynome deren Grad größer als vier ist existieren keine entsprechenden Formeln.

Satz 3-2: (*Fundamentalsatz der Algebra*)
Es sei

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

mit

$$a_k \in \mathbb{R} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

und

$$a_n \neq 0, \quad \text{d.h.} \quad \operatorname{Grad} f = n$$

dann gilt

$$f \text{ hat genau } n \text{ Nullstellen } z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$$

mit

$$f(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n)\,.$$

Satz 3-3:
Ist $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ Nullstelle von f, so ist auch z^* Nullstelle von f und es gilt

$$f(x) = \left(x^2 - 2\operatorname{Re}(z)x + |z|^2\right) q(x).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0 \\ \Rightarrow (f(z))^* &= (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0)^* \\ &= (a_n z^n)^* + (a_{n-1} z^{n-1})^* + \ldots + (a_2 z^2)^* + (a_1 z)^* + a_0^* \\ &= a_n (z^n)^* + a_{n-1} (z^{n-1})^* + \ldots + a_2 (z^2)^* + a_1 z^* + a_0 \\ &= a_n (z^*)^n + a_{n-1} (z^*)^{n-1} + \ldots + a_2 (z^*)^2 + a_1 z^* + a_0 \\ &= f(z^*) = 0 \end{aligned}$$

Da z und z^* Nullstellen sind, kann der Faktor

$$(x-z)(x-z^*) = x^2-(z+z^*)\,x+zz^* = x^2-(2\operatorname{Re} z)x+|z|^2$$

abgespalten werden.

Somit kann f in $\mathbb{R}$ in lineare (für die reellen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_m$) und in quadratische (für die konjugiert komplexen Nullstellenpaare $z_1, z_1^*, z_2, z_2^*, \ldots, z_l, z_l^*$) Faktoren gemäß

$$f(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_m)(x^2+a_1x+b_1)\cdots(x^2+a_lx+b_l)$$

zerlegt und bei expliziter Berücksichtigung der Vielfachheit reeller und konjugiert komplexer Nullstellen in

$$f(x) = a_n(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_r)^{m_r}(x^2+a_1x+b_1)^{l_1}\cdots(x^2+a_sx+b_s)^{l_s}$$

mit

$$\sum_{i=1}^{r} m_i = m, \quad \sum_{i=1}^{s} l_i = l \quad \text{und} \quad n = m+2l$$

zerlegt werden.

Beispiel:

$$f(x) = x^5+x^3-x^2-1 \quad \text{und} \quad f(1)=0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$$

Horner-Schema für $f(x)$ an der Stelle $x = x_1 = 1$

1	0	1	–1	0	–1
+	1 · 1	1 · 1	2 · 1	1 · 1	1 · 1
1	1	2	1	1	0

$$\Rightarrow\; g(x) = x^4+x^3+2x^2+x+1 \quad \text{und} \quad g(\pm j)=0 \;\Rightarrow\; x_{2,3} = \pm j\,.$$

Polynomdivision, d.h. $g(x)$ durch $(x-j)(x+j)=x^2+1$

$$
\begin{array}{l}
x^4+x^3+2x^2+x+1 : x^2+1 = x^2+x+1 \\
\underline{x^4+0x^3+x^2} \\
\qquad\;\; x^3+x^2+x+1 \\
\qquad\;\; \underline{x^3+0x^2+x} \\
\qquad\qquad\;\; x^2+0+1 \\
\qquad\qquad\;\; \underline{x^2+0+1} \\
\qquad\qquad\qquad\quad\; 0
\end{array}
$$

$$\Rightarrow\; h(x)=x^2+x+1\,.$$

Lösung der quadratischen Gleichung

$$\Rightarrow\; x_{4,5}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{3}{4}}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Die Zerlegung lautet schließlich

$$f(x)=(x-1)\,(x-j)\,(x+j)\left(x-\frac{1}{2}\left(-1+j\sqrt{3}\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}\left(-1-j\sqrt{3}\right)\right)$$

bzw.

$$f(x)=(x-1)\,(x^2+1)\,(x^2+x+1).$$

3.2.2 Gebrochenrationale Funktionen

Definition 3-11:

Der Quotient zweier ganzrationaler Funktionen (Polynome)

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_2x^2+b_1x+b_0}=\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k x^k}{\sum_{l=0}^{m}b_l x^l}$$

heißt gebrochenrationale Funktion, wobei $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.

Die Funktion heißt

- echt gebrochen, wenn $\operatorname{Grad} p = n < \operatorname{Grad} q = m$
- unecht gebrochen, wenn $\operatorname{Grad} p = n \geq \operatorname{Grad} q = m$

Beispiel:

1) $f(x)=\dfrac{4x^2+3x-1}{x^3+x-1}$ echt gebrochen

2) $f(x)=\dfrac{x^3-3x+5}{x-2}$ unecht gebrochen

3) $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+9}{x^2+5}$ unecht gebrochen

Satz 3-4:

Jede unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} \qquad (a_n \neq 0, b_m \neq 0)$$

d.h. $n \geq m$, lässt sich gemäß

$$f(x) = g(x) + r(x)/q(x)$$

in eine

- ganzrationale Funktion (Polynom) $g(x)$ und eine
- echt gebrochenrationale Funktion $r(x)/q(x)$ mit $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$ oder $r(x) = 0$ zerlegen.

Beweis:

Der Beweis kann durch Polynomdivision erbracht werden, siehe nachfolgendes Beispiel.

Beispiel:

Man zerlege

1) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 5}{x - 2}$

$$= x^2 + 2x + 1 + \frac{7}{x-2}$$

$$\begin{array}{l}
x^3 + 0x^2 - 3x + 5 : x - 2 = x^2 + 2x + 1 \\
\underline{x^3 - 2x^2} \\
\quad 2x^2 - 3x + 5 \\
\quad \underline{2x^2 - 4x} \\
\qquad\quad x + 5 \\
\qquad\quad \underline{x - 2} \\
\qquad\qquad 7
\end{array}$$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 9}{x^2 + 5}$

$$= 3 + \frac{4x - 6}{x^2 + 5}$$

$$\begin{array}{l}
3x^2 + 4x + 9 : x^2 + 5 = 3 \\
\underline{3x^2 + 0x + 15} \\
\qquad 4x - 6
\end{array}$$

Satz 3-5:

Es sei $f(x) = p(x)/q(x)$ eine gebrochenrationale Funktion. Falls Grad $p \geq$ Grad q (unecht gebrochen) und somit

$$f(x) = g(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

dann ist $h(x)$ genau dann gemeinsamer Teiler von $p(x)$ und $q(x)$, wenn $h(x)$ gemeinsamer Teiler von $q(x)$ und $r(x)$ ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$" Aus $p(x) = h(x)p_0(x)$ und $q(x) = h(x)q_0(x)$ folgt

$$r(x) = p(x) - g(x)q(x) = h(x)\big(p_0(x) - g(x)q_0(x)\big)$$

"$\Leftarrow$" Aus $q(x) = h(x)q_0(x)$ und $r(x) = h(x)r_0(x)$ folgt

$$p(x) = r(x) + g(x)q(x) = h(x)\big(r_0(x) + g(x)q_0(x)\big)$$

Mittels Polynomdivision kann die Bestimmung gemeinsamer Teiler von $p(x)$ und $q(x)$ auf die Bestimmung gemeinsamer Teiler von $q(x)$ und $r(x)$ (Polynome kleineren Grades) reduziert werden.

Euklidischer Algorithmus

1) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)} = g(x) + \dfrac{q_1(x)}{q(x)}$, Grad $q_1 <$ Grad q

2) $\dfrac{q(x)}{q_1(x)} = g_1(x) + \dfrac{q_2(x)}{q_1(x)}$, Grad $q_2 <$ Grad q_1

3) $\dfrac{q_1(x)}{q_2(x)} = g_2(x) + \dfrac{q_3(x)}{q_2(x)}$, Grad $q_3 <$ Grad q_2

$\vdots$

$\dfrac{q_{k-1}(x)}{q_k(x)} = g_k(x)$, $q_{k+1}(x) \equiv 0$

$\Rightarrow$ $q_k(x)$ ist der größte gemeinsame Teiler von $q_{k-1}(x), q_k(x)$ und somit auch von $q_{k-2}(x), q_{k-1}(x)$ und $q_{k-3}(x), q_{k-2}(x)$ usw. bis $q(x), q_1(x)$ und schließlich auch von $p(x), q(x)$.

Beispiel:

Gesucht wird eine gekürzte Bruchdarstellung von

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3}{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18}.$$

Der Euklidische Algorithmus liefert

1) $$\begin{array}{l} x^4 - 2x^3 - 2x^2 - \ 2x - \ 3 : x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 = 1 \\ \underline{x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18} \\ \qquad\quad x^3 + 5x^2 - 17x - 21 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ g(x) = 1, \ q_1(x) = x^3 + 5x^2 - 17x - 21$$

2) $$\begin{array}{l} x^4 - 3x^3 - \ 7x^2 + \ 15x \ + \ 18 \ : \ x^3 + 5x^2 - 17x - 21 = x - 8 \\ \underline{x^4 + 5x^3 - 17x^2 - \ 21x} \\ \quad -8x^3 + 10x^2 + \ 36x + \ 18 \\ \quad \underline{-8x^3 - 40x^2 + 136x + 168} \\ \qquad\qquad 50x^2 - 100x - 150 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{g}_1(\mathrm{x}) = x - 8, \quad q_2(x) = 50\,(x^2 - 2x - 3)$$

3) $$\begin{array}{l} x^3 + 5x^2 - 17x - 21 : 50\,(x^2 - 2x - 3) = (x + 7)/50 \\ \underline{x^3 - 2x^2 - \ 3x} \\ \qquad 7x^2 - 14x - 21 \\ \qquad \underline{7x^2 - 14x - 21} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \ g_2(x) = \frac{1}{50}(x + 7), \ q_3(x) = 0 \ \Rightarrow \ \mathrm{ggT} = q_2(x) = 50\,(x^2 - 2x - 3).$$

Nach Kürzen von $h(x) = x^2 - 2x - 3$

$$
\begin{array}{l}
x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 : x^2 - 2x - 3 = x^2 + 1 \\
\underline{x^4 - 2x^3 - 3x^2} \\
\qquad\qquad x^2 - 2x - 3 \\
\qquad\qquad \underline{x^2 - 2x - 3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 15x + 18 : x^2 - 2x - 3 = x^2 - x - 6 \\
\underline{x^4 - 2x^3 - 3x^2} \\
\quad - x^3 - 4x^2 + 15x + 18 \\
\quad - \underline{x^3 + 2x^2 + 3x} \\
\qquad\quad -6x^2 + 12x + 18 \\
\qquad\quad \underline{-6x^2 + 12x + 18} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

erhält man

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 6} = \frac{x^2 + 1}{(x+2)(x-3)} = \frac{(x-j)(x+j)}{(x+2)(x-3)}.$$

Definitionsbereich $D(f)$

Der Definitionsbereich einer gebrochenrationalen Funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

liegt erst endgültig fest, wenn $p(x)$ und $q(x)$ teilerfremd sind, d.h. keinen gemeinsamen Teiler mehr besitzen.

Es seien $p(x)$ und $q(x)$ teilerfremd, dann besitzen $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen und es gilt

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \quad q(x) \neq 0 \right\}.$$

Nullstellen, Polstellen

Es seien $p(x)$ und $q(x)$ teilerfremd.

- Nullstellen des Zählerpolynoms $p(x)$ sind dann auch Nullstellen der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$.
- Nullstellen des Nennerpolynoms $q(x)$ heißen Polstellen (Singularitäten) der gebrochenrationalen Funktion $f(x) = p(x)/q(x)$.

Eine l-fache Nullstelle des Nennerpolynoms $q(x)$, d.h.

$$q(x) = (x - x_0)^l q_1(x) \quad \text{mit} \quad q_1(x_0) \neq 0$$

heißt l-fache Polstelle oder l-facher Pol.

Der Graph $y = f(x)$ hat in der Nähe von $x = x_0$ näherungsweise die Gestalt

$$y = \frac{p(x_0)}{q_1(x_0)} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^l}$$

Das Verhalten bei großen Beträgen von x ersieht man aus

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

$$= \frac{a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x^1} + \ldots + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}{b_m x^m \left(1 + \frac{b_{m-1}}{b_m x^1} + \ldots + \frac{b_2}{b_m x^{m-2}} + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_0}{b_m x^m}\right)} \approx \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}$$

Beispiel:

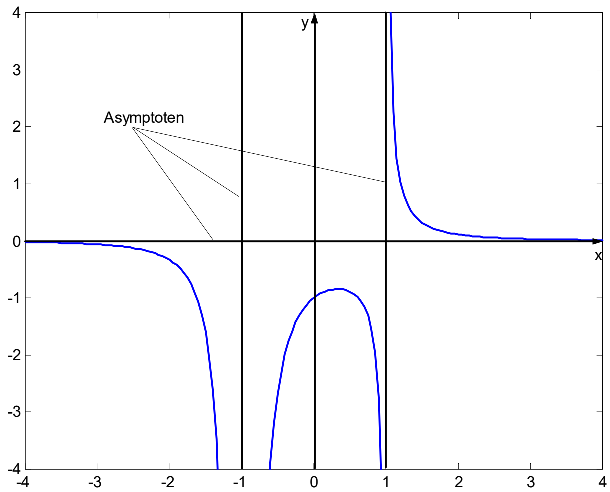
1) $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2(x-1)}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$,
($n < m$, echt gebrochen)

einfacher Pol bei $x = 1$ (allgemein: l-facher Pol mit l ungerade)
$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel an der Polstelle
zweifacher Pol bei $x = -1$ (allgemein: l-facher Pol mit l gerade)

$\Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel an der Polstelle

große Werte von $|x| \Rightarrow f(x) \approx x^{-3} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$

(Asymptote $g(x) \equiv 0$)



2) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{(x+1)(x-1)^2}$ mit $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$,

$(n = m$, unecht gebrochen)

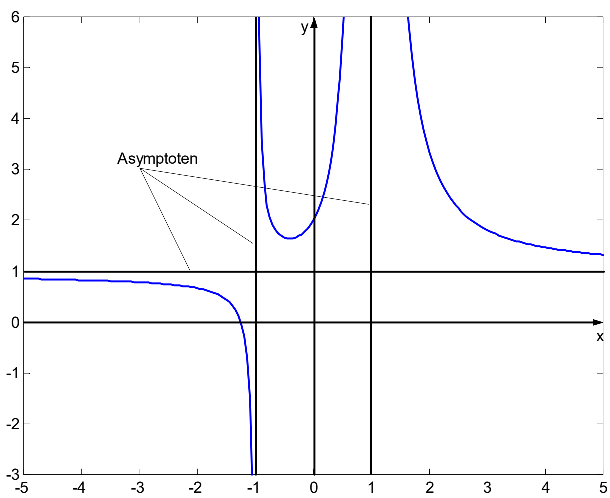
einfacher Pol bei $x = -1 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel an der Polstelle

zweifacher Pol bei $x = 1 \Rightarrow$ kein Vorzeichenwechsel an der Polstelle

große Werte von $|x|$

$\Rightarrow f(x) \approx 1$

(Asymptote $g(x) \equiv 1$)



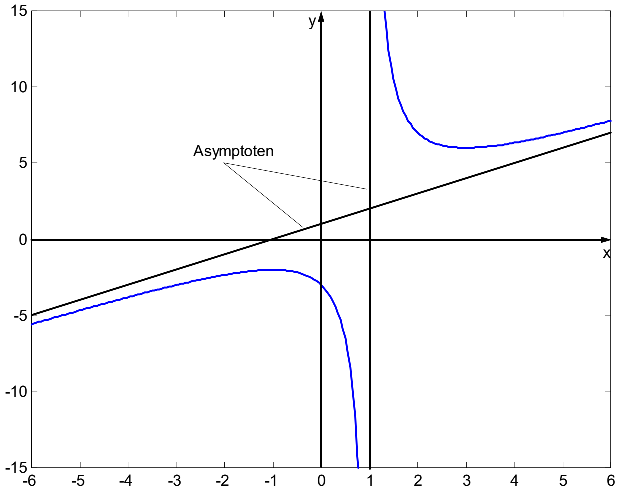
3) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ mit $D(f)=\mathbb{R}\backslash\{1\}$, ($n>m$, unecht gebrochen)

einfacher Pol bei $x=1 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel an der Polstelle

große Werte von $|x| \Rightarrow f(x)\approx x$

Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{l} x^2+0x+3 : x-1 = x+1 \quad +4/(x-1) \\ \underline{x^2-\ x} \\ x+3 \\ \underline{x-1} \\ 4 \end{array}$$



mit

$$f(x)=g(x)+r(x)/q(x)$$
$$=x+1+4/(x-1)$$

(Asymptote $g(x)=x+1$)

Partialbruchzerlegung

Eine wichtige Anwendung für die Zerlegung eines Polynoms ist die Partialbruchzerlegung einer gebrochen rationalen Funktion. Es sei

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)},$$

wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit $\operatorname{Grad} p < \operatorname{Grad} q$ (echt gebrochen) bezeichnet. Für den Fall $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q$ (unecht gebrochen) muss vorher eine Polynomdivision durchgeführt werden. Das Nennerpolynom $q(x)$ sei in $\mathbb{R}$ wie folgt zerlegbar:

$$q(x)=(x-x_1)^{m_1}\cdots(x-x_r)^{m_r}(x^2+a_1x+b_1)^{l_1}\cdots(x^2+a_sx+b_s)^{l_s}$$

mit den reellen Nullstellen $x_1,x_2,\ldots,x_r$ und den konjugiert komplexen Nullstellenpaaren $z_1,z_1^*,z_2,z_2^*,\ldots,z_s,z_s^*$.

Es existieren nun eindeutige Zahlen $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-x_1)} + \ldots + \frac{A_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}} + \ldots$$
$$+ \frac{A_{r,1}}{(x-x_r)} + \ldots + \frac{A_{r,m_r}}{(x-x_r)^{m_r}}$$
$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)} + \ldots + \frac{B_{1,l_1}x + C_{1,l_1}}{(x^2 + a_1 x + b_1)^{l_1}} + \ldots$$
$$+ \frac{B_{s,1}x + C_{s,1}}{(x^2 + a_s x + b_s)} + \ldots + \frac{B_{s,l_s}x + C_{s,l_s}}{(x^2 + a_s x + b_s)^{l_s}}$$

Beweis:
Fasst man die Brüche auf der rechten Seite wieder zusammen, so erhält man den gleichen Nenner wie auf der linken Seite $(q(x))$. Also müssen die Zähler auf beiden Seiten auch gleich sein. Durch Koeffizientenvergleich erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}. Dieses Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

Zur Berechnung der Zahlen A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} sind die folgenden Schritte durchzuführen.

1) Rechte Seite zusammenfassen (auf Hauptnenner bringen)
2) Zahlen nach Potenz von x sortieren
3) Koeffizientenvergleich des Zählerpolynoms mit $p(x)$ durchführen
4) Lineares Gleichungssystem lösen

Beispiel:

1) $$\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+2}$$

$$=\frac{A_1(x+2)+A_2(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(A_1+A_2)x+2A_1-A_2}{(x-1)(x+2)}$$

Koeffizientenvergleich

$$A_1+A_2=2,\quad 2A_1-A_2=1 \Rightarrow\; A_1+A_2+2A_1-A_2=3$$

$$\Rightarrow\; A_1=1,\quad A_2=1$$

liefert die Partialbruchzerlegung

$$\frac{2x+1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{(x+2)}$$

2) $$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\; 1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)=(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)$$

Koeffizientenvergleich

$$A+B=0,\quad C-B=0,\quad A-C=1$$

$$\Rightarrow\; B=-A,\quad C=B=-A,\quad A=1+C=1-A$$

$$\Rightarrow\; A=\frac{1}{2},\quad B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2}$$

liefert die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}\right)$$

Bei einfachen Nullstellen kann man auch die folgende Methode anwenden.

1) $$\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x+2}$$

Multiplikation mit $(x-1)$ liefert

$$\frac{2x+1}{x+2}=A_1+A_2\frac{x-1}{x+2}$$

nach Einsetzen von $x=1$ erhält man

$$\frac{3}{3}=A_1+0 \;\Rightarrow\; A_1=1$$

Multiplikation mit $(x+2)$ liefert

$$\frac{2x+1}{x-1}=A_1\frac{x+2}{x-1}+A_2$$

nach Einsetzen von $x=-2$ erhält man

$$\frac{-3}{-3}=0+A_2 \;\Rightarrow\; A_2=1$$

2) $$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow\; A=\left.\frac{1}{x^2+1}\right|_{x=1} \;\Rightarrow\; A=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\; (Bx+C)\big|_{x=j}=\left.\frac{1}{x-1}\right|_{x=j} \;\Rightarrow\; Bj+C=\frac{1}{j-1}=\frac{-1-j}{2}$$

$$\Rightarrow\; B=-\frac{1}{2},\quad C=-\frac{1}{2}$$

Anmerkung:
Bei mehrfachen Nullstellen können die beiden Verfahren auch kombiniert werden, d.h. die zur jeweils höchsten Nennerpotenz gehörenden Zählerkoeffizienten können mit der zweiten Methode die restlichen durch Koeffizientenvergleich entsprechend der ersten Methode bestimmt werden.

3.2.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

3.2.3.1 *e*-Funktion

Definition 3-12:
Die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^x = \exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

heißt *e*-Funktion (Exponentialfunktion)[1].

Eigenschaften der *e*-Funktion

Funktionalgleichung: $e^x\, e^y = e^{x+y}$

[1] Die Exponentialfunktion kann auch durch die Potenzreihe $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$ definiert werden. Mit Hilfe des Cauchy-Produkts kann man dann auch die Funktionalgleichung beweisen.

Positivität: $e^0 = 1, \quad e^{-x} = 1/e^x, \quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, denn

$e^{-x+x} = e^0 = e^{-x}\, e^x = 1$, da

$e^x > 1 \quad \forall x > 0 \;\Rightarrow\; e^x = 1/e^{-x} > 0 \quad \forall x < 0$

Monotonie: e^x ist streng monoton wachsend, d.h.

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; e^{x_1} < e^{x_2}$, denn

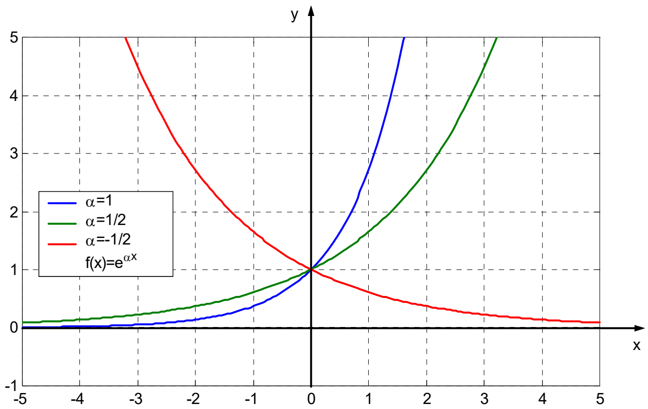
$e^{x_2} = e^{x_2 - x_1 + x_1} = e^{x_2 - x_1} e^{x_1} > e^{x_1}$, da

$e^{x_2 - x_1} > 1$ wegen $x_2 - x_1 > 0$

Da e^x streng monoton $\Rightarrow$ e^x ist injektiv.

Da $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$ und $e^x = 1/e^{-x} \to 0$ für $x \to -\infty$ und e^x stetig auf $\mathbb{R}$ (Erklärung später) $\Rightarrow$ $W(f) = (0, \infty)$ für $f(x) = e^x$ und somit ist $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bijektiv

Graph der *e*-Funktion



Da $f(x) = e^x$ bijektiv ist, existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

mit

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \forall y \in (0, \infty).$$

3.2.3.2 *ln*-Funktion

<u>Definition 3-13:</u>

Die Umkehrfunktion der *e*-Funktion heißt *ln*-Funktion (natürlicher Logarithmus) mit

$$\ln x := f^{-1}(x),$$

d.h.

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

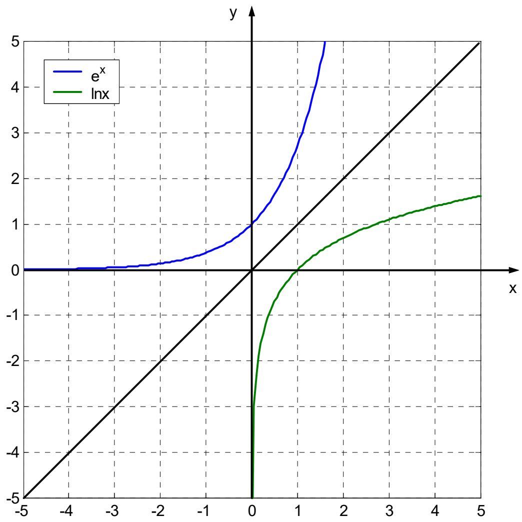
und $$y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x.$$

Insbesondere gilt

$$\ln(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

und $$e^{\ln x} = x \qquad \forall x > 0.$$

<u>Graph der *ln*-Funktion</u>



<u>Eigenschaften der *ln*-Funktion</u>

1) $\ln(xy) = \ln x + \ln y \qquad \forall x, y > 0$

2) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \qquad \forall x > 0$

3) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \qquad \forall x, y > 0$

4) $\ln 1 = 0$ (einzige Nullstelle)

5) $\ln x$ ist streng monoton wachsend

6) $\ln(x^y) = y \ln x \qquad \forall x > 0,\ y \in \mathbb{R}$

Beweis:

1) Es sei $a = \ln x,\ b = \ln y$

$$\Rightarrow e^a = x, \quad e^b = y \Rightarrow e^a\ e^b = e^{a+b} = xy$$

$$\Rightarrow \ln(e^{a+b}) \ = \ln(xy) \Rightarrow a + b = \ln(xy) \Rightarrow \ln x + \ln y = \ln(xy)$$

2) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x = \ln\left(\frac{1}{x}\cdot x\right) = \ln 1 = 0 \ \left(\text{siehe 4)}\right) \ \Rightarrow \ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$

3) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y$

4) $\ln 1 = 0$, da $e^0 = 1$ (Umkehrfunktion)

5) e-Funktion streng monoton wachsend $\Rightarrow$ *ln*-Funktion streng monoton wachsend (siehe nachfolgenden Hilfssatz)

6) siehe im folgenden Kapitel den entsprechenden Beweis der allgemeinen Logarithmusfunktion

Hilfssatz:

Es sei $f : I_1 \subset \mathbb{R} \to I_2 \subset \mathbb{R}$ bijektiv und streng monoton wachsend bzw. fallend

$$f^{-1} : I_2 \to I_1$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend bzw. fallend.

Beweis:

Annahme: Für ein $y_1 < y_2$ gelte $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$

$$\Rightarrow \ f\left(f^{-1}(y_1)\right) \geq f\left(f^{-1}(y_2)\right), \text{ da } f \text{ streng monoton wachsend}$$

$$\Rightarrow \ y_1 \geq y_2 \quad \text{Widerspruch}$$

3.2.3.3 Allgemeine Exponential- und Logarithmusfunktion

Definition 3-14:

Es sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ fest gewählte Basis. Dann heißt die Funktion

$$f(x) = a^x := e^{x \ln a}$$

mit $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ Exponentialfunktion zur Basis a.

Die Umkehrfunktion

$$\log_a x := f^{-1}(x)$$

mit $f^{-1}: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ heißt Logarithmusfunktion zur Basis a.

Es gilt

$$a^{\log_a x} = x \quad \forall x > 0$$

und

$$\log_a(a^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnungen

$\log_e x = \ln x$	(natürlicher Logarithmus)
$\log_{10} x = \lg x$	(Briggscher / dekadischer Logarithmus)
$\log_2 x = \mathrm{lb}\, x$ oder $\mathrm{ld}\, x$	(binärer / dualer Logarithmus)

Eigenschaften der allgemeinen Exponential- und Logarithmusfunktion

1) $a^{x+y} = a^x a^y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2) $(a^x)^y = a^{xy} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad \forall x, y > 0$

4) $\log_a(x^y) = y \log_a x \qquad \forall x > 0, \ \forall y \in \mathbb{R}$

5) $a^0 = 1, \quad \log_a 1 = 0$

6) $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a} \qquad \forall x, a > 0, \ a \neq 1$

Beweis:

6) $a^{\log_a x} = x$ und $a^{\overbrace{\log_a x}^{y}} = e^{\overbrace{\log_a x}^{y} \ln a}$ (s. Def. von $a^y = e^{y \ln a}$)

$\Rightarrow e^{\log_a x \ln a} = x \Rightarrow \ln(e^{\log_a x \ln a}) = \ln x$

$\Rightarrow \log_a x \ln a = \ln x \Rightarrow \log_a x = \ln x / \ln a$

5) $a^0 = e^{0 \ln a} = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$

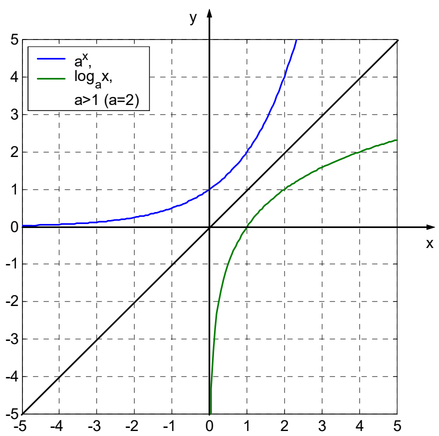
4) Zuerst zeigen wir $\ln(x^y) = \ln(e^{y \ln x}) = y \ln x$
Hieraus folgt $\log_a(x^y) = \ln(x^y) / \ln a = y \ln x / \ln a = y \log_a(x)$

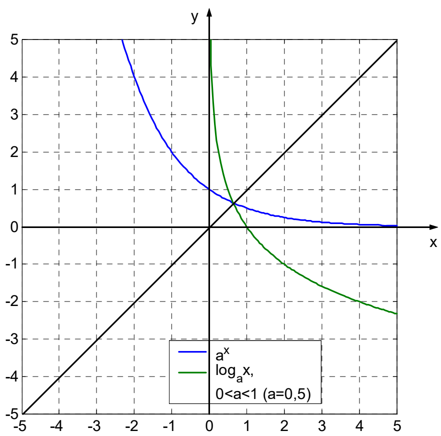
3) $\log_a(xy) = \ln(xy)/\ln a = \ln x/\ln a + \ln y/\ln a = \log_a x + \log_a y$

2) $(a^x)^y = e^{y \ln(a^x)} = e^{x y \ln a} = a^{x y}$

1) $a^{x+y} = e^{(x+y)\ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{x \ln a} e^{y \ln a} = a^x a^y$

Graphen von a^x und $\log_a x$





Weitere Eigenschaften

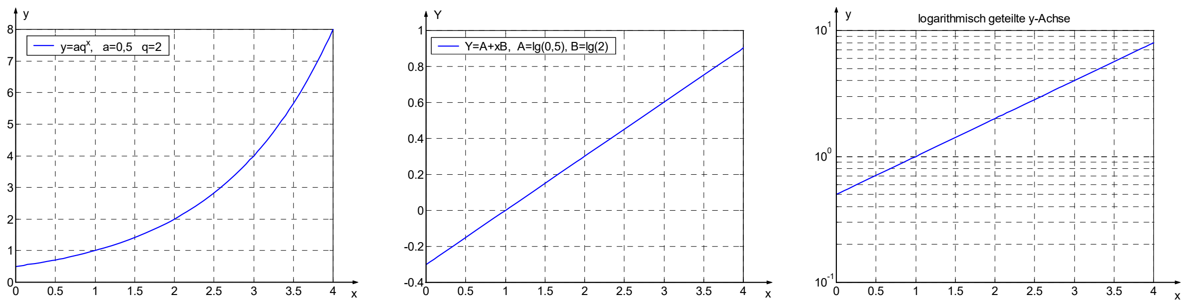
a^x	streng monoton wachsend	$a > 1$
a^x	streng monoton fallend	$0 < a < 1$
$\log_a x$	streng monoton wachsend	$a > 1$
$\log_a x$	streng monoton fallend	$0 < a < 1$

Logarithmische Darstellungen

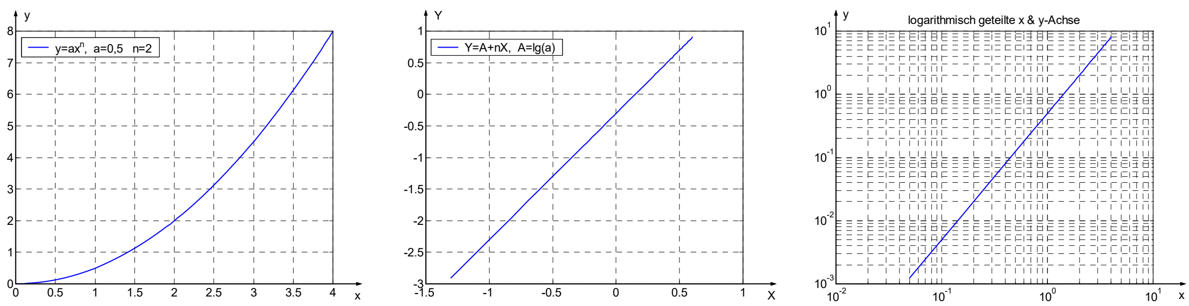
1) $y = aq^x \;\Rightarrow\; \underbrace{\log y}_{Y} = \underbrace{\log a}_{A} + x\underbrace{\log q}_{B} \;\Rightarrow\; Y = A + xB$ (Gerade)

2) $y = ax^n \;\Rightarrow\; \underbrace{\log y}_{Y} = \underbrace{\log a}_{A} + n\underbrace{\log x}_{X} \;\Rightarrow\; Y = A + nX$ (Gerade)

zu 1)



zu 2)



3.2.4 Trigonometrische Funktionen

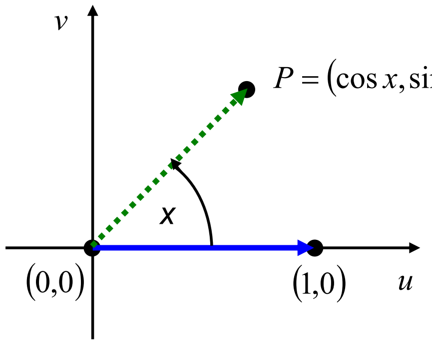
3.2.4.1 sin- und cos-Funktion

Definition 3-15:

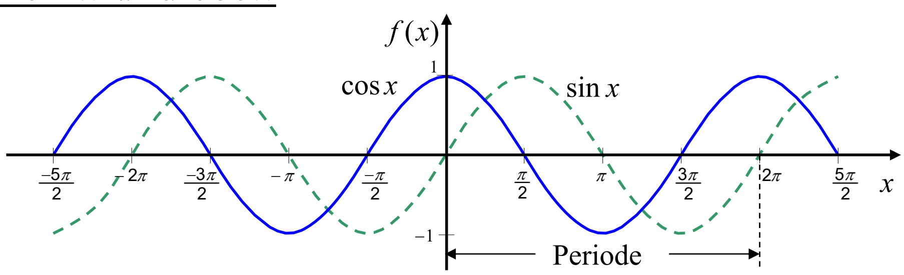
Wird im kartesischen Koordinatensystem (u, v) der von $(0,0)$ nach $(1,0)$ weisende Zeiger um den Winkel $x \in \mathbb{R}$ gedreht (gegen den Uhrzeiger-sinn $x \geq 0$; sonst im Uhrzeigersinn), dann fällt die Zeigerspitze auf einen Punkt P, dessen Koordinaten mit $u = \cos x$ und $v = \sin x$ bezeichnet werden. Die so definierten Funktionen heißen

Kosinusfunktion: $x \mapsto \cos x$

Sinusfunktion: $x \mapsto \sin x$



Graph von $\sin x$ und $\cos x$



Es gilt $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \text{gerade Funktion}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \text{ungerade Funktion}$$

aus der Euler-Formel

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x$$

folgt

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{jx}) \quad \text{und} \quad \sin x = \operatorname{Im}(e^{jx})$$

bzw.

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx}) \quad \text{und} \quad \sin x = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx}),$$

denn

$$e^{-jx} = e^{j(-x)} = \cos(-x) + j\sin(-x) = \cos x - j\sin x = (e^{jx})^*$$

und

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + z^*) \quad \text{sowie} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2j}(z - z^*).$$

Außerdem ergibt sich aus

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x \quad \text{und} \quad (e^{jx})^n = e^{jnx}$$

die Beziehungen

$$(\cos x + j\sin x)^n = \cos(nx) + j\sin(nx)$$

und

$$z^n = \left(|z| e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n \, e^{jn\varphi}$$

Weitere Eigenschaften der sin- und cos-Funktion

1) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

2) $\left.\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned}\right\}$ Additionstheoreme

3) $|\sin x| \le 1, \quad |\cos x| \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$

d.h. cos- und sin-Funktion sind um $\pi/2$ phasenverschoben

5) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R},$

d.h. cos- und sin-Funktion sind 2π-periodisch

6) $\sin(k\pi) = 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$

d.h. Nullstellen der cos- und sin-Funktion

7) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k, \quad \cos(k\pi)=(-1)^k \quad \forall k\in\mathbb{Z},$

d.h. Extremstellen der cos- und sin-Funktion

8) $\sin(2x)=2\sin x\cos x, \quad \cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1,$

9) $\sin^2 x=\frac{1}{2}\big(1-\cos(2x)\big), \quad \cos^2 x=\frac{1}{2}\big(1+\cos(2x)\big),$

Beweis:

1) $$\sin^2 x+\cos^2 x=\frac{1}{4}(e^{jx}+e^{-jx})^2+\frac{1}{4j^2}(e^{jx}-e^{-jx})^2$$
$$=\frac{1}{4}(e^{j2x}+2+e^{-j2x}-e^{j2x}+2-e^{-j2x})=1$$

2) $$\sin(x+y)=\mathrm{Im}(e^{j(x+y)})=\mathrm{Im}(e^{jx}e^{jy})$$
$$=\mathrm{Im}\big((\cos x+j\sin x)(\cos y+j\sin y)\big)$$
$$=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\cos(x+y)=\mathrm{Re}(e^{j(x+y)})=\mathrm{Re}(e^{jx}e^{jy})$$
$$=\mathrm{Re}\big((\cos x+j\sin x)(\cos y+j\sin y)\big)$$
$$=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

3) $|\sin x|\le 1$ und $|\cos x|\le 1,$ da $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

4) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin x\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

5) $\sin(x+\pi)=\sin\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$

$\sin(x+2\pi)=\sin\big((x+\pi)+\pi\big)=-\sin\big(x+\pi\big)=\sin x$

$\cos(x+\pi)=\cos\left(\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$

$\cos(x+2\pi)=\cos\big((x+\pi)+\pi\big)=-\cos(x+\pi)=\cos x$

6) $\sin 0=0$ (folgt aus Definition)

$$\left.\begin{array}{l}\sin\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\sin 0=0\\ \sin(-\pi)=-\sin\pi=0\end{array}\right\}\Rightarrow \sin(k\pi)=0,\quad \forall k\in\mathbb{Z},$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-\sin(k\pi)=0$

7) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \;\Rightarrow\; \sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)=1$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\pi=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)=-1$

$\Rightarrow\; \sin\left(\frac{\pi}{2}+l\pi\right)=(-1)^l,\quad \cos(k\pi)=\sin\left(k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^k$

8) $\sin(2x) = \operatorname{Im}(e^{j2x}) = \operatorname{Im}\left((e^{jx})^2\right) = \operatorname{Im}\left((\cos x + j\sin x)^2\right)$

$$= \operatorname{Im}(\cos^2 x - \sin^2 x + j2\sin x\cos x) = 2\sin x\cos x$$

$$\cos(2x) = \operatorname{Re}(e^{j2x}) = \operatorname{Re}\left((e^{jx})^2\right) = \operatorname{Re}\left((\cos x + j\sin x)^2\right)$$

$$= \operatorname{Re}(\cos^2 x - \sin^2 x + j2\sin x\cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$= \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$$

9) $\sin^2 x = \frac{1}{4j^2}(e^{jx} - e^{-jx})^2 = -\frac{1}{4}(e^{j2x} - 2 + e^{-j2x})$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(e^{j2x} + e^{-j2x}) = \frac{1}{2}\left(1-\cos(2x)\right)$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{jx} + e^{-jx})^2 = \frac{1}{4}(e^{j2x} + 2 + e^{-j2x})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{j2x} + e^{-j2x}) = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right)$$

Allgemein kann man

1) $\sin(nx)$ und $\cos(nx)$ durch eine Summe von Produkten von $\sin^k x$ und $\cos^k x$

2) $\sin^n x$ und $\cos^n x$ durch eine Summe von $\sin(kx)$ und $\cos(kx)$

ausdrücken.

Beispiel:

1) $\sin(3x) = \operatorname{Im}\left(\cos(3x) + j\sin(3x)\right) = \operatorname{Im}\left((\cos x + j\sin x)^3\right)$

$$= \operatorname{Im}(\cos^3 x + j3\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - j\sin^3 x)$$

$$= 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x = 3(1-\sin^2 x)\sin x - \sin^3 x$$

$$= 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos(3x) = \mathrm{Re}\big(\cos(3x) + j\sin(3x)\big) = \mathrm{Re}\Big((\cos x + j\sin x)^3\Big)\sqrt{a^2+b^2}$$
$$= \mathrm{Re}(\cos^3 x + j3\cos^2 x \sin x - 3\cos x \sin^2 x - j\sin^3 x)$$
$$= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x = \cos^3 x - 3\cos x(1-\cos^2 x)$$
$$= 4\cos^3 x - 3\cos x$$

2) $$\sin^3 x = \frac{1}{8j^3}(e^{jx} - e^{-jx})^3 = -\frac{1}{8j}(e^{j3x} - 3e^{jx} + 3e^{-jx} - e^{-j3x})$$
$$= -\frac{1}{8j}\Big((e^{j3x} - e^{-j3x}) - 3(e^{jx} - e^{-jx})\Big) = \frac{1}{4}\big(3\sin x - \sin(3x)\big)$$
$$\cos^3 x = \frac{1}{8}(e^{jx} + e^{-jx})^3 = \frac{1}{8}(e^{j3x} + 3e^{jx} + 3e^{-jx} + e^{-j3x})$$
$$= \frac{1}{8}\Big((e^{j3x} + e^{-j3x}) + 3(e^{jx} + e^{-jx})\Big) = \frac{1}{4}\big(\cos(3x) + 3\cos x\big)$$

<u>Weitere Identitäten</u>

1) $$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big)$$

2) $$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$$

3) $$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\big(\sin(x-y) + \sin(x+y)\big)$$

<u>Beweis:</u>

1) $$\cos(x-y) + \cos(x+y)$$
$$= (\cos x \cos y + \sin x \sin y) + (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2\cos x \cos y$$

2) $$\cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$= (\cos x \cos y + \sin x \sin y) - (\cos x \cos y - \sin x \sin y) = 2\sin x \sin y$$

3) $$\sin(x-y) + \sin(x+y)$$
$$= (\sin x \cos y - \cos x \sin y) + (\sin x \cos y + \cos x \sin y) = 2\sin x \cos y$$

Allgemeine sin-Schwingung

$$f(t) = A\sin(\omega t + \varphi),$$

wobei

A :	Amplitude
ω :	Kreisfrequenz mit $\omega = 2\pi f$ und f = Frequenz
t :	Zeit
φ :	Nullphase
$\omega t + \varphi$:	(momentane) Phase

und

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \quad : \quad \text{Periode, d.h. } \omega(t+T) + \varphi = \omega t + \varphi + 2\pi$$

$$t_k = -\frac{\varphi}{\omega} + \frac{k\pi}{\omega} : \quad \text{Nullstellen } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel:

Überlagerung zweier gleichfrequenter sin-Schwingungen

$$\begin{aligned} f(t) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \ = A\sin(\omega t + \varphi) \\ &= \operatorname{Im}(A_1 e^{j(\omega t + \varphi_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \varphi_2)}) = \operatorname{Im}\Big((A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2})\, e^{j\omega t}\Big) \\ &= \operatorname{Im}(A e^{j\varphi} e^{j\omega t}) = A \operatorname{Im}(e^{j(\omega t + \varphi)}) = A\sin(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned} Ae^{j\varphi} &= A_1 e^{j\varphi_1} + A_2 e^{j\varphi_2} \\ &= A_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1) + A_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2) \\ &= (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2) + j(A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

folgt

$$A = \sqrt{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2}$$

und

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}\right) & \text{für } A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{für } A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = 0 \\ & \text{und } A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{für } A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 = 0 \\ & \text{und } A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 < 0 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}\right) & \text{für } A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 < 0 \end{cases}$$

3.2.4.2 tan- und cot-Funktion

Definition 3-16:

Die durch

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{falls} \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{falls} \quad x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

definierten Funktionen heißen tan- bzw. cot-Funktion.

Definitionsbereich

$$D(\tan) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D(\cot) = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

Eigenschaften der tan- und cot-Funktion

1) $\left.\begin{array}{l}\tan(x+\pi)=\tan x\\ \cot(x+\pi)=\cot x\end{array}\right\}\ \pi-\text{periodisch}$

2) $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cot x,$

$\cot\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\tan x$

3) $\left.\begin{array}{l}\tan(-x)=-\tan x\\ \cot(-x)=-\cot x\end{array}\right\}$ ungerade Funktionen

4) $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},$

$\cot(x+y)=\dfrac{\cot x\cot y-1}{\cot x+\cot y}$

Beweis:

1) $\tan(x+\pi)=\dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\dfrac{-\sin x}{-\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\tan x$

$\cot(x+\pi)=\dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)}=\dfrac{-\cos x}{-\sin x}=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

2) $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\sin(x+\pi/2)}{\cos(x+\pi/2)}=\dfrac{\cos x}{-\sin x}=-\dfrac{\cos x}{\sin x}=-\cot x$

$\cot\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\cos(x+\pi/2)}{\sin(x+\pi/2)}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$

3) $\tan(-x)=\dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$

$\cot(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)}=\dfrac{\cos x}{-\sin x}=-\dfrac{\cos x}{\sin x}=-\cot x$

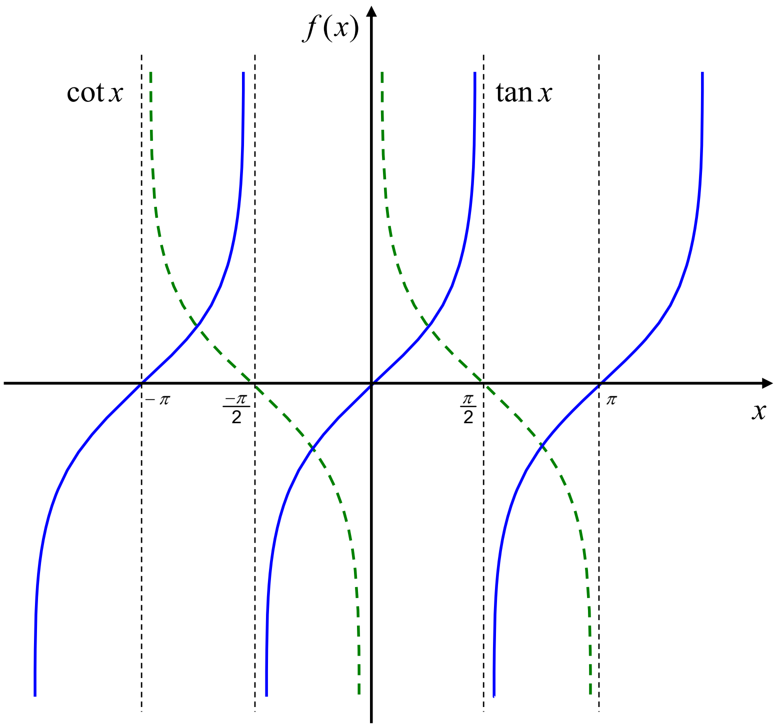
4) $\tan(x+y) = \dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \dfrac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$

$$= \frac{\dfrac{\sin x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\cos x \cos y}}{1 - \dfrac{\sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \cos x \sin y}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} - 1}{\dfrac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} + \dfrac{\cos x \sin y}{\sin x \sin y}} = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$$

Graphen der tan- und cot-Funktion



3.2.4.3 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen

Da die trigonometrischen Funktionen nicht bijektiv sind, existieren die Umkehrfunktionen nicht global. Man muss sich also auf Intervalle beschränken, auf denen die Funktionen streng monoton sind.

Es ist üblich, die folgenden Intervalle zu wählen.

$$\cos: \ [0,\pi] \to [-1,1]$$

$$\sin: \ [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$$

$$\tan: \ (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}$$

$$\cot: \ (0,\pi) \to \mathbb{R}$$

Definition 3-17:

Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen gemäß

$$\arccos: \ [-1,1] \to [0,\pi]$$

$$\arcsin: \ [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$$

$$\arctan: \ \mathbb{R} \to (-\pi/2,\pi/2)$$

$$\operatorname{arccot}: \ \mathbb{R} \to (0,\pi)$$

bezeichnet man als Hauptwert (Hauptzweig) der jeweiligen arccos-, arcsin-, arctan- und arccot-Funktion.

Anmerkung:

Ist $z = x + jy = |z|\,e^{j\varphi} \in \mathbb{C}$, so gilt für $x \neq 0$

$$y/x = \tan\varphi \;\Rightarrow\; \varphi \;= \arctan(y/x)$$

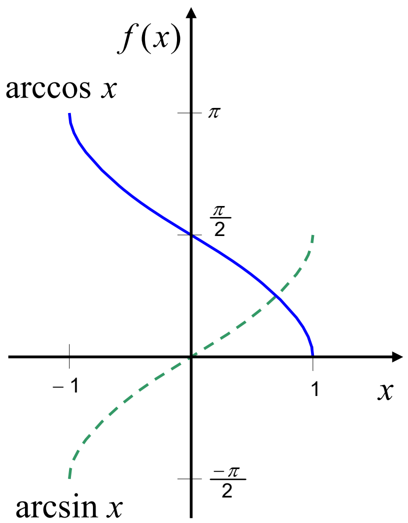
Da der $\arctan x \in (-\pi/2, \pi/2)$, erhält man nur Winkel im I. und IV. Quadranten. Für den Fall, dass z im II. oder III. Quadranten liegt, muss der tan-Ast/Zweig zwischen $\pi/2$ und $3\pi/2$ umgekehrt werden. Aus $\tan(x+\pi) = \tan x$ folgt

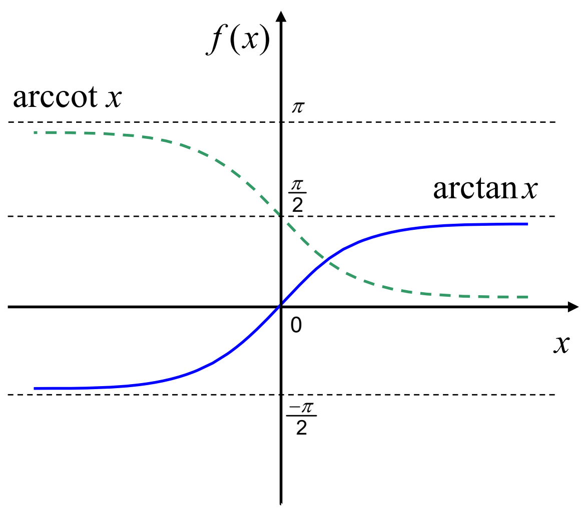
$$\varphi = \pi + \arctan(y/x)$$

falls z im 2. oder 3. Quadraten liegt. Also gilt:

$$z = x + jy \text{ mit } x > 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \arctan(y/x)$$
$$z = x + jy \text{ mit } x < 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \pi + \arctan(y/x).$$

Graphen der trigonometrischen Umkehrfunktionen





Anmerkung:
Bei einigen Programmiersprachen steht nur die arctan-Funktion zur Verfügung. Alle anderen arc-Funktionen lassen sich durch den arctan ausdrücken, z.B.

$$\arcsin x = \arctan\left(x\big/\sqrt{1-x^2}\right), \quad |x|<1,$$

denn aus

$$\left.\begin{array}{l}\arcsin x = a \Rightarrow x = \sin a \\ \cos^2 a + \sin^2 a = 1 \Rightarrow |\cos a| = \sqrt{1-\sin^2 a}\end{array}\right\} |\cos a| = \sqrt{1-x^2}$$

und

$$\arcsin x = a \in [-\pi/2, \pi/2] \Rightarrow \cos a \geq 0 \Rightarrow \cos a = \sqrt{1-x^2}$$

folgt

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \arcsin x = a = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

3.2.5 Hyperbolische Funktionen

3.2.5.1 sinh-, cosh-, tanh- und coth-Funktion

Definition 3-18:

Die für alle $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \qquad \text{sin-hyperbolicus}$$

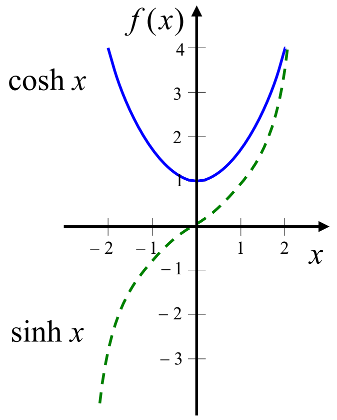
$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \qquad \text{cos-hyperbolicus}$$

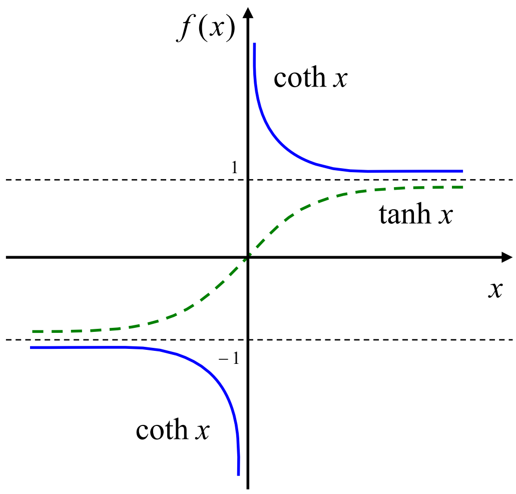
$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad \text{tan-hyperbolicus}$$

$$\coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \neq 0 \qquad \text{cot-hyperbolicus}$$

heißen hyperbolische Funktionen.

Graphen der hyperbolischen Funktionen





Eigenschaften der hyperbolischen Funktionen

1) $\sinh x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\cosh x \geq 1$

3) $\sinh(-x) = -\sinh x$

4) $\cosh(-x) = \cosh x$

5) $\tanh(-x) = -\tanh x$

6) $\coth(-x) = -\coth x$

7) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

8) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

9) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

10) $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

Beweis:

1) $\sinh x = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\cosh x = \cosh\left(|x|\right) = \frac{1}{2}(e^{|x|} + e^{-|x|}) \geq 1,$ da $e^{|x|} \geq 1$ und $e^{-|x|} > 0$

3) $\sinh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} - e^{x}) = -\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = -\sinh x$

4) $\cosh(-x) = \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{x}) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x$

5) $\tanh(-x) = \dfrac{\sinh(-x)}{\cosh(-x)} = \dfrac{-\sinh x}{\cosh x} = -\dfrac{\sinh x}{\cosh x} = -\tanh x$

6) $\coth(-x) = \dfrac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} = \dfrac{\cosh x}{-\sinh x} = -\dfrac{\cosh x}{\sinh x} = -\coth x$

7) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})^2$

$$= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = 1$$

8) $\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

$$= \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-x})(e^{y} + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^{x} + e^{-x})(e^{y} - e^{-y})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}) = \sinh(x+y)$$

9) $\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$$= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y - e^{-y})$$

$$= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{y-x} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{y-x} + e^{-x-y})$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x+y} + e^{-(x+y)}) = \cosh(x+y)$$

10) $\tanh(x+y) = \dfrac{\sinh(x+y)}{\cosh(x+y)} = \dfrac{\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y}$

$$= \frac{\dfrac{\sinh x \cosh y}{\cosh x \cosh y} + \dfrac{\cosh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}}{1 + \dfrac{\sinh x \sinh y}{\cosh x \cosh y}} = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

Anmerkung:

1) Für $x \to \infty$ gilt wegen $e^{-x} \to 0$

$$\sinh x \approx \cosh x \approx \frac{1}{2} e^x$$

2) Aus $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ folgt mit

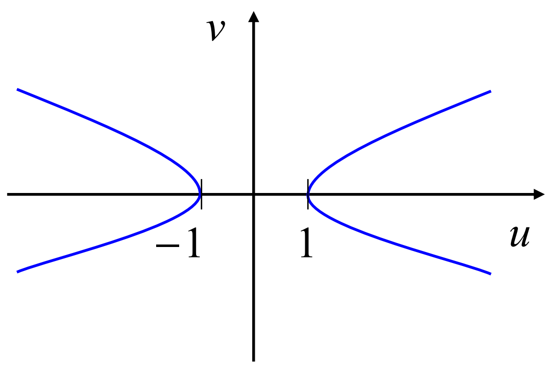
$$u = \cosh x$$

und

$$v = \sinh x$$

die Gleichung der Hyperbel

$$u^2 - v^2 = 1$$



3.2.5.2 Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen

Die

- sinh- und tanh-Funktionen sind streng monoton (bijektiv)
- coth-Funktion ist bijektiv
- cosh-Funktion ist bijektiv für $(-\infty, 0]$ oder $[0, \infty)$

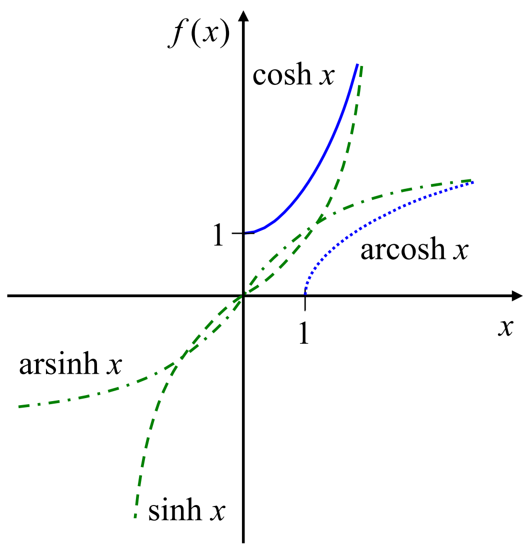
Definition 3-19:

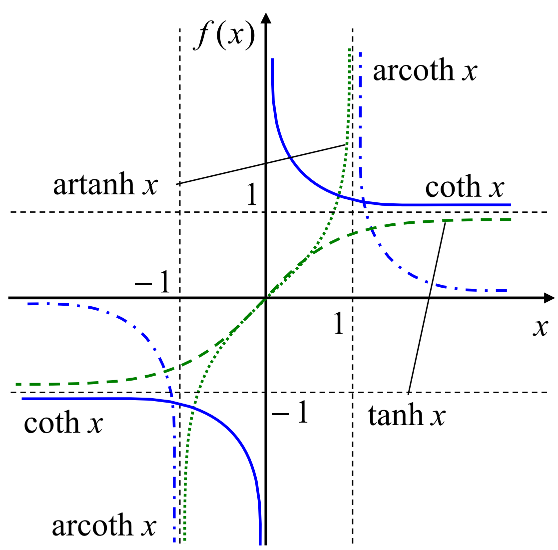
Die wie folgt definierten Funktionen

$\text{arsinh}:$	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$	area-sinh-Funktion
$\text{arcosh}:$	$[1,\infty) \to [0,\infty)$	area-cosh-Funktion
$\text{artanh}:$	$(-1,1) \to \mathbb{R}$	area-tanh-Funktion
$\text{arcoth}:$	$\mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$	area-coth-Funktion

heißen area-hyperbolische Funktionen.

Graphen der hyperbolischen Umkehrfunktionen





Die hyperbolischen Funktionen lassen sich durch e-Funktionen und demzufolge die hyperbolischen Umkehrfunktionen durch die ln-Funktion ausdrücken.

1) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

2) $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1$

3) $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1$

4) $\operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad |x| > 1$

<u>*Beweis:*</u>

1) $y = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$\Rightarrow\ 2y = (e^{2x} - 1)\,e^{-x}$

$\Rightarrow\ (e^x)^2 - 1 = 2ye^x$

$\Rightarrow\ (e^x)^2 - 2y\,e^x - 1 = 0$ (quadratische Gleichung in e^x)

$\Rightarrow\ e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ (wegen $e^x > 0$ nur $+\sqrt{\ }$ relevant)

$\Rightarrow\ x = \operatorname{arsinh} y = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$

vertauschen von x und y liefert schließlich die Behauptung.

2) $\operatorname{arcosh} x = \ln a \geq 0 \;\Rightarrow\; a \geq 1, \quad a = ?$

$$\Rightarrow\; x = \cosh(\ln a) = \frac{1}{2}(e^{\ln a} + e^{-\ln a}) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{a^2+1}{2a}$$

$$\Rightarrow\; a^2 - 2ax + 1 = 0$$

$$\Rightarrow\; a = x + \sqrt{x^2-1}$$ (wegen $a \geq 1$ nur $+\sqrt{}$ relevant)

$$\Rightarrow\; \operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

3) $\operatorname{artanh} x = \ln a \;\Rightarrow\; a > 0, \quad a = ?$

$$\Rightarrow\; x = \tanh(\ln a) = \frac{\sinh(\ln a)}{\cosh(\ln a)} = \frac{e^{\ln a} - e^{-\ln a}}{e^{\ln a} + e^{-\ln a}} = \frac{a - 1/a}{a + 1/a} = \frac{a^2-1}{a^2+1}$$

$$\Rightarrow\; a^2(x-1) = -1 - x$$

$$\Rightarrow\; a^2 = \frac{1+x}{1-x}$$

$$\Rightarrow\; a = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$ (wegen $a > 0$ nur $+\sqrt{}$ relevant)

$$\Rightarrow\; \operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

4) $\operatorname{arcoth} x = \ln a \geq 0 \;\Rightarrow\; a \geq 1, \quad a = ?$

$$\Rightarrow\; x = \coth(\ln a) = \frac{\cosh(\ln a)}{\sinh(\ln a)} = \frac{e^{\ln a} + e^{-\ln a}}{e^{\ln a} - e^{-\ln a}} = \frac{a + 1/a}{a - 1/a} = \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$$

$$\Rightarrow\; a^2 (x-1) = 1 + x$$

$$\Rightarrow\; a^2 = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\Rightarrow\; a = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$ (wegen a ≥ 1 nur $+\sqrt{\;}$ relevant)

$$\Rightarrow\; \operatorname{arcoth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

3.3 Folgen und Grenzwerte

3.3.1 Einführung

<u>Definition 3-20:</u>

Ordnen wir jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in \mathbb{R}$ zu, so entsteht eine reelle Zahlenfolge. Man schreibt hierfür

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots),\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (a_n)_{n\geq 1} \text{ oder kurz } (a_n)$$

<u>Beispiel:</u>

1) $(1, 1, 1, \ldots)$ konstante Folge

2) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$

3) $(1, 1.4, 1.41, 1.414, \ldots)$

4) $(2^0, 2^1, 2^2, \ldots) = (2^n)_{n\geq 0}$

Bildungsgesetze

a_n explizit definiert:

1) $a_n = n, \quad (n)_{n\geq 1} = (1, 2, 3, \ldots)$

2) $a_n = a_0 + nd,$

$(a_0 + nd)_{n\geq 0} = (a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \ldots)$

(arithmetische Folge: $a_{n+1} - a_n = d = \text{const.}$)

3) $a_n = a_0 q^n,$

$(a_0 q^n)_{n\geq 0} = (a_0, a_0 q, a_0 q^2, \ldots)$

(geometrische Folge: $a_{n+1} / a_n = q = \text{const.}$)

a_n rekursiv definiert:

1) $a_0 = 1, a_{n+1} = (n+1)\, a_n \quad$ für $n \geq 0$

2) $a_0 = 2, \; a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right) \quad$ für $n \geq 0$

3) $a_0 = 1, \; a_{n+1} = \sin a_n \quad$ für $n \geq 0$

3.3.2 Konvergenz von Folgen

Nähern sich für $n \to \infty$ die Werte einer Folge einem bestimmten Wert $a \in \mathbb{R}$, z.B.

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} : \qquad \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

$$(1, 1.4, 1.41, 1.414\ldots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \qquad a_n \to \sqrt{2} \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

so sagt man die Folge konvergiert gegen a für $n \to \infty$. Der Konvergenzbegriff kann wie folgt präzisiert werden.

Definition 3-21:

Gegeben sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ und man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \to a \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

wenn es zu jeder beliebig kleinen vorgegebenen Schranke $\varepsilon > 0$ einen Index $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N_\varepsilon$$

gilt.

Anschaulich:

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert a, wenn in jeder noch so kleinen ε-Umgebung U_ε, d.h. in dem Intervall $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$, ab einem hinreichend großen Index (der im Allgemeinen von der Intervallbreite abhängt) alle Folgenglieder a_n mit $n \geq N_\varepsilon$ liegen.

Anmerkung:

- Jede gegen Null konvergierende Folge heißt Nullfolge.
- Nicht konvergente Folgen heißen divergent.
- Folgen mit wechselndem Vorzeichen benachbarter Glieder heißen alternierende Folgen.

Beispiel:

1) $(1,1,1,\ldots)$ konvergent gegen 1, denn

$$|a_n - a| = |1-1| = 0 < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen 0, denn

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon > 1/\varepsilon$$

3) $(1/n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a>0$ und fest konvergent gegen 0, denn

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n^{\alpha}} - 0\right| = \frac{1}{n^{\alpha}} < \varepsilon \quad \forall n \geq N_{\varepsilon} > 1/\varepsilon^{1/\alpha}$$

4) $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad q \in \mathbb{R}$ mit $|q| \leq 1$ fest

Fallunterscheidung:

a) $q = 0 \Rightarrow (q^n) = (0,0,0,\ldots), \quad q^n \to 0$ für $n \to \infty$

b) $q = 1 \Rightarrow (q^n) = (1,1,1,\ldots), \quad q^n \to 1$ für $n \to \infty$

c) $q = -1 \Rightarrow (q^n) = \left(-1,1,-1,1,\ldots\right)$, divergent

(alternierend, der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Folgengliedern ist immer = 2)

d) $|q| < 1 \Rightarrow \dfrac{1}{|q|} > 1 \Rightarrow \exists b > 0$ mit $\dfrac{1}{|q|} = 1 + b$

$$\Rightarrow \left|q^n - 0\right| = |q|^n = \frac{1}{(1+b)^n} < \frac{1}{nb}, \text{ denn für } b > 0 \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned}\left(1+b\right)^n &= \binom{n}{0}1^n b^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}1^{n-2}b^2 + \ldots \\ &\quad + \binom{n}{n-2}1^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1}1^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}1^0 b^n \\ &= b^0 + nb + \binom{n}{2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-2}b^{n-2} + nb^{n-1} + b^n > nb\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left|q^n - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon b} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q^n = 0, \text{ falls } |q| < 1$$

Definition 3-22:

Eine Folge (a_n) heißt

1) monoton bzw. streng monoton wachsend genau dann, wenn

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ bzw. } a_{n+1} > a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2) monoton bzw. streng monoton fallend genau dann, wenn

$$a_{n+1} \leq a_n \text{ bzw. } a_{n+1} < a_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

3) beschränkt genau dann, wenn ein $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$c_1 \leq a_n \leq c_2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Existiert nur eine untere Schranke c_1 bzw. obere Schranke c_2, so heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten bzw. nach oben beschränkt.

Definition 3-23:

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel:

1) $\left(1/(2l)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$

2) $(q^{2l-1})_{l\in\mathbb{N}}$ ist Teilfolge von $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definition 3-24:

Es sei M eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, d.h. es existiert ein $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit $c_1 \leq x \leq c_2 \ \forall x \in M$, dann heißt

$\sup M$ = Supremum von M = kleinste obere Schranke $\leq c_2$

$\inf M$ = Infimum von M = größte untere Schranke $\geq c_1$

Beispiel:

1) $\sup[a,b] = \sup[a,b) = b \qquad (\sup[a,b] = \max[a,b] = b)$
2) $\sup\{x \in \mathbb{Q}:\ x^2 < 2\} = \sqrt{2}$
3) $\inf[a,b] = \inf(a,b] = a \qquad (\inf[a,b] = \min[a,b] = a)$
4) $\inf\{x = 1 + 1/n:\ n \in \mathbb{N}\} = 1$

Satz 3-6:

1) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.
2) Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert gegen den gleichen Grenzwert.
3) Eine konvergente Folge ist beschränkt.
4) Eine monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Beweis:

1) Aus $a_n \to a$ und $a_n \to b$ mit $a \neq b$ folgt

   $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,1}$ und $|a_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_{\varepsilon,2}$

   $\Rightarrow\ |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < 2\varepsilon$

   für alle $n \geq \max\{N_{\varepsilon,1}, N_{\varepsilon,2}\}$

   wähle $\varepsilon = \tfrac{1}{2}|a - b| \ \Rightarrow\ |a - b| < |a - b|$, also Widerspruch

2) Aus $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_\varepsilon$ folgt

   $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_\varepsilon$, weil $n_k \geq k$ ((n_k) streng monoton)

3) Wähle $\varepsilon = 1 \ \Rightarrow\ |a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N_{\varepsilon=1}$

   $\Rightarrow\ |a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$ für alle $n \geq N_{\varepsilon=1}$

   $\Rightarrow\ |a_n| \leq K := \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N_\varepsilon}|, 1 + |a|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

4) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende und beschränkte Folge mit einer oberen Schranke K.

$\Rightarrow\ a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1} \le K$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Dann existiert eine kleinste obere Schranke $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Es sei nun $\varepsilon > 0 \Rightarrow (a-\varepsilon)$ ist keine obere Schranke, weil

$a-\varepsilon < a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \exists a_{N_\varepsilon}$ mit $a-\varepsilon < a_{N_\varepsilon} \le a$

Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend

$\Rightarrow\ a-\varepsilon < a_n \le a$ für alle $n \ge N_\varepsilon$

$\Rightarrow\ |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \ge N_\varepsilon$

$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a_n = a$

(analog verfährt man bei der Beweisführung für monoton fallende Folgen)

Beispiel:

1) $a_n = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}$

Teilfolgen: $a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \ \to\ 1$

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \ \to\ -1 \ne 1 \ \Rightarrow\ (a_n)$ divergent

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = 0,$ denn für $n \ge N_\varepsilon > 1/\varepsilon^2$ gilt

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{n+1} - 0\right| = \frac{\sqrt{n}}{n+1} < \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = 0,$ denn für $n \ge N_\varepsilon > 1/(2\varepsilon)$ gilt

$$\left|\sqrt{n^2+1} - n - 0\right| = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$ denn

$\sqrt[n]{n} > 1$ für $n > 1 \Rightarrow \exists b_n > 0$ mit $\sqrt[n]{n} = 1 + b_n$

$$\Rightarrow n = \left(1+b_n\right)^n = \binom{n}{0} 1^n b_n^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} b_n^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} b_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} 1^0 b_n^n$$

$$= 1 + n\, b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} b_n^n > \binom{n}{2} b_n^2$$

$$\Rightarrow n > \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} b_n^2 \Rightarrow 0 < b_n^2 < \frac{2}{n-1} < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon > \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

$$\Rightarrow \left|b_n^2 - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon > \left(1 + 2/\varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

denn $0 < b_n^2 < \varepsilon \Rightarrow 0 < b_n < \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow \left|b_n - 0\right| < \sqrt{\varepsilon}$

5) Für $c > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1,$ denn

Fallunterscheidung:

1. Fall: $c = 1 \Rightarrow \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{1} = 1 \to 1$

2. Fall: $c > 1 \Rightarrow \exists b_n > 0$ mit $\sqrt[n]{c} = 1 + b_n \Rightarrow c = (1+b_n)^n$

$$\Rightarrow c = 1 + n\, b_n + \binom{n}{2} b_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} b_n^n > n\, b_n$$

$$\Rightarrow 0 < b_n < c/n < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon > c/\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|b_n - 0\right| < \varepsilon \quad \text{für } n \geq N_\varepsilon > c/\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

3. Fall: $0 < c < 1 \Rightarrow 1/c > 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/c} = \lim_{n\to\infty} 1\big/\sqrt[n]{c} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$$

6) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$, denn für $n \geq N_\varepsilon > 2 + 2/\varepsilon$ gilt

$$\left|\frac{n^2}{n!} - 0\right| = \frac{n^2}{n!} \leq \frac{n^2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n}{(n-1)(n-2)} < \frac{2}{(n-2)} < \varepsilon$$

7) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, denn

a) Wir zeigen zunächst, dass (a_n) mit $a_n = (1 + 1/n)^n$ eine monoton wachsende Folge ist

$$a_{n-1} \leq a_n \Leftrightarrow \left(1 + 1/(n-1)\right)^{n-1} \leq \left(1 + 1/n\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \left(n/(n-1)\right)^{n-1} \leq \left((n+1)/n\right)^n$$

$$\Leftrightarrow \left(n/(n-1)\right)^n \leq \left((n+1)/n\right)^n \cdot n/(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(n^2/(n^2-1)\right)^n \leq n/(n-1)$$

$$\Leftrightarrow \left((n^2-1)/n^2\right)^n \geq (n-1)/n$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - 1/n^2\right)^n \geq 1 - 1/n$$

Dies ist die Bernoullische Ungleichung

$(1+x)^n \geq 1 + nx$ für $x = -1/n^2$

b) Nun zeigen wir, dass (a_n) beschränkt ist. Da (a_n) monoton wächst, gilt

$$a_1 \leq a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}{n \cdot n \quad \cdots \quad n} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - 1/2} < 1 + \frac{1}{1/2} = 3 \Rightarrow a_1 \leq a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Aus der Monotonie und Beschränktheit folgt die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Den Grenzwert bezeichnen wir mit e (Eulersche Zahl). Es gilt $2 < e < 3$.

Ferner gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = e, \text{ da } \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge.}$$

Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} 1/k!\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert deutlich schneller gegen die Eulersche Zahl e als $\left((1+1/n)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, z.B.

$$\sum_{k=0}^{13}\frac{1}{k!} = 2,7182818284 \quad \text{(11-stellige Genauigkeit)}$$

8) $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = (1 + a_n^2)/2$, $n \in \mathbb{N}$ rekursiv gebildete Folge. Es gilt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0.5, 0.625, 0.695, \ldots)$.

Zuerst zeigen wir, dass (a_n) monoton und beschränkt ist.

a) $a_{n+1} - a_n = (1 + a_n^2)/2 - a_n = (a_n^2 - 2a_n + 1)/2 = (a_n - 1)^2/2 \ge 0 \Rightarrow a_{n+1} \ge a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ ist monoton wachsend.

b) Da (a_n) monoton wachsend, gilt $a_1 = 1/2 \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Mittels Induktion kann man zeigen, dass $a_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, denn

$n = 1$: $a_1 = 1/2 \le 1$

$n \to n+1$: $a_{n+1} = (1 + a_n^2)/2 \le (1 + 1^2)/2 = 1$

Also ist (a_n) wegen $a_1 \le a_n \le 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ beschränkt.

Aus der Monotonie und Beschränktheit folgt die Konvergenz von (a_n) gegen einen Grenzwert a.

Nun bestimmen wir den Grenzwert a.

c) Aus $a_n \to a$ und $a_{n+1} \to a$ folgt

$a_{n+1} = (1 + a_n^2)/2 \;\to\; (1 + a^2)/2 = a$

$\Rightarrow\; a^2 - 2a + 1 = 0 \;\Rightarrow\; (a-1)^2 = 0$

$\Rightarrow\; a = 1 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$

Um die Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a zu zeigen, kann man häufig ein Vergleichskriterium benutzen.

<u>Satz 3-7:</u>

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge reeller Zahlen. Lassen sich die Glieder der Folge $(|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \geq n_0$ durch $|a_n - a| \leq b_n$ abschätzen, dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

<u>Beweis:</u>

Es sei $\varepsilon > 0 \;\Rightarrow\; b_n < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon$

$\Rightarrow\; |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq \max\{N_\varepsilon, n_0\}$

$\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

<u>Beispiel:</u>

$$a_n = \frac{\cos n}{n} \;\Rightarrow\; |a_n - 0| = \left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{n} = 0$$

<u>Definition 3-25:</u> (*Cauchy-Konvergenz*)

Eine Folge heißt genau dann Cauchy-konvergent, wenn zu jeder noch so kleinen Positiven Zahl ε ein Index N_ε derart existiert, dass

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon.$$

Satz 3-8:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-konvergent ist.

Beweis:

"$\Rightarrow$": $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
$\forall\; m, n \geq N_\varepsilon$

"$\Leftarrow$": $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, denn
$|a_n| = |a_n - a_m + a_m| \leq |a_n - a_m| + |a_m| \leq 1 + |a_m|$
$\forall n > N_{\varepsilon=1} \in \mathbb{N}$ und $m > N_{\varepsilon=1}$ fest
$\Rightarrow\; |a_n| \leq K := \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N_\varepsilon}|, 1 + |a_m|\} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$
Es sei $b_n = \inf\{a_k : k \geq n\}$, d.h. größte untere Schranke
$\Rightarrow\; b_{n+1} \geq b_n$, da $\{a_k : k \geq n+1\} \subset \{a_k : k \geq n\}$
$\Rightarrow\; (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent gegen einen Grenzwert a,
d.h. $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Es sei $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow\; \exists n_0 > N_\varepsilon \text{ mit } \left|a - b_{n_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und}$$

$$\exists n_1 \geq n_0 \text{ mit } \left|b_{n_0} - a_{n_1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{(weil Infimum)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\; |a - a_n| &= \left|a - b_{n_0} + b_{n_0} - a_{n_1} + a_{n_1} - a_n\right| \\ &\leq \left|a - b_{n_0}\right| + \left|b_{n_0} - a_{n_1}\right| + \left|a_{n_1} - a_n\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

3.3.3 Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz 3-9:

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ dann gilt

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lambda a \quad \lambda \in \mathbb{R}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a + b$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}$

5) $a_n \le b_n \quad \forall n \ge n_1 \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ [1)]

[1)] Aus $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ und $a_n < b_n$ für alle $n \ge n_1$ folgt im allgemeinen nicht $a<b$ sondern nur $a \le b$, d.h. strikte Ungleichheit bleibt im allgemeinen nicht erhalten.

Beweis:

1) $|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda||a_n - a| < \lambda\varepsilon' = \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon$

2) $|(a_n + b_n) - (a+b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon$

3)
$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = \left|a_n\left(b_n - b\right) + b\left(a_n - a\right)\right| \\
&\le |a_n(b_n - b)| + |b(a_n - a)| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\
&\le K\,|b_n - b| + |b||a_n - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon
\end{aligned}$$

4) $|b| = |b - b_n + b_n| \le |b - b_n| + |b_n| \le |b|/2 + |b_n| \quad \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow |b_n| \ge |b|/2 \Rightarrow 1/|b_n| \le 2/|b| \quad \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow \left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{|b - b_n|}{|b_n||b|} \le \dfrac{2}{|b|^2}|b - b_n| < \varepsilon \quad \forall n \ge N_\varepsilon \ge n_0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

5) $b_n-a_n\geq 0$, da $a_n\leq b_n$ und

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=b-a\Rightarrow b-a\geq 0\Rightarrow b\geq a$$

Beispiel:

1) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=0+e=e$$

2) Es sei $p(x)=c_kx^k+c_{k-1}x^{k-1}+...+c_1x+c_0$ mit $c_i\in\mathbb{R}$ für $i=0,\ 1,2,...,k.$

$$\lim_{n\to\infty}p\left(\frac{1}{n}\right)=c_k\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^k+c_{k-1}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}+\ldots+c_1\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)+c_0=c_0,$$

denn $\left(\frac{1}{n}\right)^k\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ für $k>0.$

3) $$a_n=\frac{c_kn^k+c_{k-1}n^{k-1}+\ldots+c_1n+c_0}{d_ln^l+d_{l-1}n^{l-1}+\ldots+d_1n+d_0}\text{ mit } c_k\neq 0, d_l\neq 0$$

$$a_n=n^{k-l}\frac{c_k+c_{k-1}\frac{1}{n}+\ldots+c_1\frac{1}{n^{k-1}}+c_0\frac{1}{n^k}}{d_l+d_{l-1}\frac{1}{n}+\ldots+d_1\frac{1}{n^{l-1}}+d_0\frac{1}{n^l}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\begin{cases}0 & : \text{ für } k<l\\ c_k/d_l & : \text{ für } k=l\\ \infty & : \text{ für } k>l \text{ und } c_k/d_l>0\\ -\infty & : \text{ für } k>l \text{ und } c_k/d_l<0\end{cases}$$

z.B.: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n-1}{4n^2+5}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3+2/n-1/n^2}{4+5/n^2}\right)=\dfrac{3}{4}$

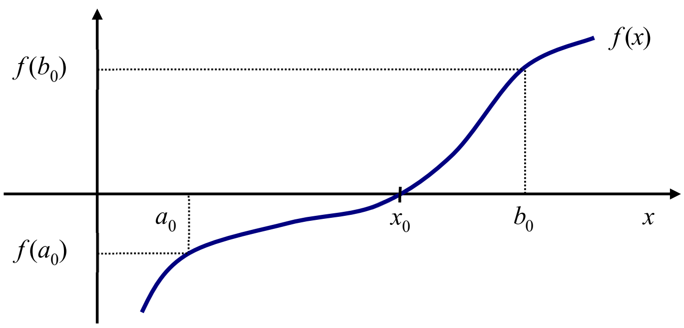
b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2}{10n+6}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+2/n}{10+6/n}\right)=\infty$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n^2+2}{6n^3+5n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3/n+2/n^3}{6+5/n^2}\right)=0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-\cos n}{n+\cos n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\dfrac{\cos n}{n}}{1+\dfrac{\cos n}{n}}\right)=1,$ da $\dfrac{\cos n}{n}\to 0$ für $n\to\infty$

3.3.4 Intervallschachtelung (Bisektionsverfahren)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deren Nullstelle $x_0\in I$, d.h. $f(x_0)=0$, gesucht wird.



1. Schritt

Startintervall $[a_0, b_0]$ wählen mit $x_0\in[a_0,b_0]$, d.h. $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$ (Vorzeichenwechsel)

2. Schritt

Halbierung des Intervalls, d.h. $c=(a_0+b_0)/2$

3. Schritt
$f(c)$ berechnen und nächstes Intervall angeben.

$$[a_1, b_1] = \begin{cases} [a_0, c], \text{ d.h. } a_1 = a_0, b_1 = c: & \text{für } f(a_0) \cdot f(c) \le 0 \\ [c, b_0], \text{ d.h. } a_1 = c, b_1 = b_0: & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0 \in [a_1, b_1]$ (neues Intervall)

4. Schritt
Abbruchkriterium Prüfen, d.h. fortfahren mit Schritt 2 bis

$$|b_n - a_n| = \frac{b_0 - a_0}{2^n} < \varepsilon$$

Auf diese Weise erhält man eine Folge von ineinander geschachtelten Intervallen $[a_n, b_n]$ mit $x_0 \in [a_n, b_n]$ und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_n \le a_{n+1} \le x_0 \le b_{n+1} \le b_n \le \cdots \le b_1 \le b_0$$

$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind monoton und beschränkt
$\Rightarrow$ konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Da $0 < (b_n - a_n) = (b_0 - a_0)/2^n \to 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = b - a = 0$

$\Rightarrow a = b = x_0$, denn $x_0 \in [a_n, b_n] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Beispiel:
Gesucht ist $\sqrt{2}$.

$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow x_0 = \sqrt{2}$ (positive Nullstelle)

Anfangsintervall $[1, 2]$, denn $f(1) \cdot f(2) = (-1) \cdot 2 = -2 < 0$

$c = (1+2)/2 = 1.5,$	$f(1)\cdot f(1.5) < 0$	$\Rightarrow [1, 1.5]$
$c = (1+1.5)/2 = 1.25,$	$f(1.25)\cdot f(1.5) < 0$	$\Rightarrow [1.25, 1.5]$
$c = (1.25+1.5)/2 = 1.375,$	$f(1.375)\cdot f(1.5) < 0$	$\Rightarrow [1.375, 1.5]$

$c = 1.4375,\qquad f(1.375)\cdot f(1.4375) < 0 \qquad \Rightarrow \; [1.375, 1.4375]$

$c = 1.40625,\qquad f(1.40625)\cdot f(1.4375) < 0 \qquad \Rightarrow \; [1.40625, 1.4375]$

$c = 1.421875,\qquad f(1.40625)\cdot f(1.421875) < 0 \qquad \Rightarrow \; [1.40625, 1.421875]$

$c = 1.4140625,$

usw.

Man erhält $\sqrt{2}$ = 1,4142... Die Konvergenz ist relativ langsam, denn z.B. bei einem Startintervall $[a_0, b_0]$ der Länge 1 erhält man mit der n-ten Iteration das Intervall $[a_n, b_n]$ der Länge $1/2^n$. Somit wird erst nach 27 Iterationen ein Intervall der Länge $< 10^{-8}$ (einfache Genauigkeit bei Rechnern) erreicht.

3.3.5 Unendliche Reihen

Ein Spezialfall für Folgen sind die unendlichen Reihen.

<u>Definition 3-26:</u>

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann kann man daraus eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ldots$$

bilden. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man unendliche Reihe und schreibt hierfür $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Besitzt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $s \in \mathbb{R}$, dann heißt die unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergent mit dem Grenzwert s, also

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s\,.$$

Anderenfalls bezeichnet man die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ als divergent. Das n-te Folgenglied $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ heißt n-te Partialsumme der unendlichen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beispiel:

1) Geometrische Reihe

   Mit der geometrischen Summenformel gilt für $q \in \mathbb{R}$

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & : \text{ für } q \neq 1 \\ n+1 & : \text{ für } q = 1 \end{cases}$$

$|q| < 1$: $s_n \to 1/(1-q)$

$q \geq 1$: s_n bestimmt divergent gegen ∞

$q \leq -1$: s_n unbestimmt divergent (hat keinen Grenzwert)

Man schreibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} 1/(1-q) & , \text{ für } |q| < 1 \\ \infty & , \text{ für } q \geq 1 \\ \text{unbestimmt}, & \text{ für } q \leq -1 \end{cases}$$

2) Harmonische Reihe

   Die Folge

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

   wächst für $n \to \infty$ über alle Grenzen, d.h. ist divergent, denn

$$s_{2^k} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}\right)$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+\ldots+2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} = 1+\frac{k}{2} \to \infty$$

$\Rightarrow$ $(s_{2^k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist nicht beschränkte Teilfolge von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$

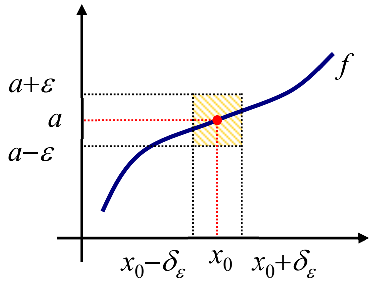
$\Rightarrow$ $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist divergent

3.4 Grenzwerte bei Funktionen, Stetigkeit

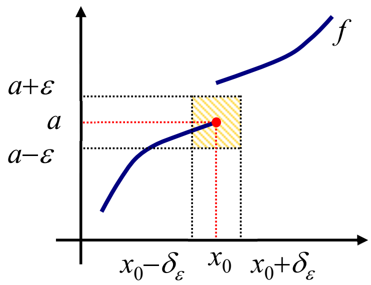
3.4.1 Funktionengrenzwerte

Definition 3-27:

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit einer Zahl $x_0 \in I$ und $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. f besitzt in x_0 einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f(x) - a| < \varepsilon$.



a ist Grenzwert



a ist kein Grenzwert

Satz 3-10:

Es sei $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. a ist Grenzwert von f in x_0 genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $I \setminus \{x_0\}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{gilt} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = a.$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ es existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$ mit $|f(x) - a| < \varepsilon \quad \forall x$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$. Sei (x_n) Folge aus $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$, dann existiert zu $\delta_\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta_\varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f(x_n) - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

"$\Leftarrow$" Für jede Folge (x_n) aus $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gelte $f(x_n) \to a$.
<u>Annahme:</u> f hat in x_0 keinen Grenzwert a, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ und $\forall \delta > 0$ ein x mit $|x_n - a| < \delta$ so dass $|f(x) - a| \geq \varepsilon$. Wählen wir $\delta = 1/n$ und ein x_n mit $|x_n - x_0| < \delta$ und $|f(x) - a| \geq \varepsilon$, so haben wir eine Folge (x_n) konstruiert, für die $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt, aber nicht $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a \Rightarrow$ Widerspruch zur Voraussetzung.

Betrachtet man Folgen, die nur von einer Seite gegen x_0 konvergieren, so spricht man von einseitigen (linksseitigen bzw. rechtsseitigen) Grenzwerten.

Definition 3-28:

Gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $I \setminus \{x_0\}$ mit $x_n > x_0$ bzw. $x_n < x_0$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch

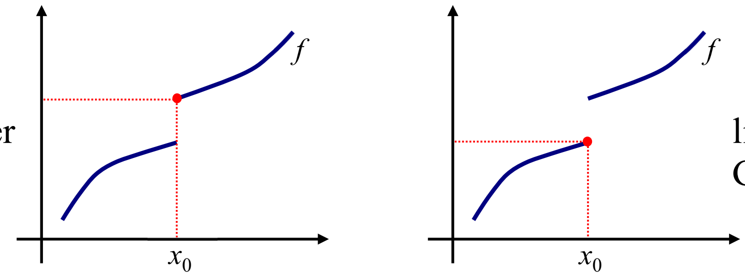
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = a$$

so heißt a rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert von f in x_0.

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = a \qquad \text{rechtsseitiger Grenzwert}$$

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = a \qquad \text{linksseitiger Grenzwert}$$

rechtsseitiger Grenzwert



linksseitiger Grenzwert

Methoden der Grenzwertbestimmung

a) Grenzwertregeln

Satz 3-11:

Aus $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$ und $a, b \in \mathbb{R}$ folgt:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lambda a$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a + b$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \cdot b$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{a}{b}$ für $b \neq 0$

Beispiel:

Aus $\lim\limits_{x\to 2} x = 2$ folgt $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 2x + 1} = \dfrac{2^3 + 3\cdot 2 + 5}{2^2 - 2\cdot 2 + 1} = \dfrac{19}{1} = 19.$

b) Funktionsterme umformen

Beispiel:

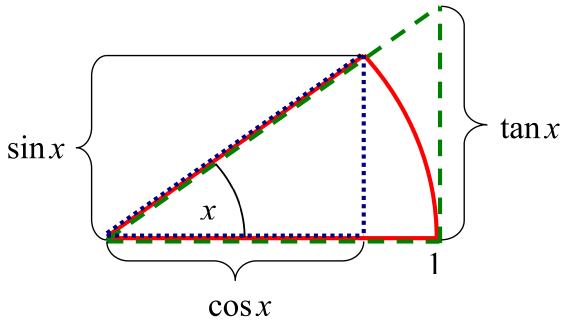
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

c) Funktionsterm einschnüren

Beispiel:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$



Flächeninhalt des

kleinen Dreiecks	*Kreissektors*	*großen Dreiecks*
$(\sin x \cos x)/2$	$1^2 \pi\,(x/2\pi) = x/2$	$(\tan x)/2$

Damit ist

$$\frac{1}{2}\sin x \cos x \le \frac{x}{2} \le \frac{1}{2}\tan x = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \;\Rightarrow\; \sin x \cos x \le x \le \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow\; \cos x \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \;\Rightarrow\; \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{\cos x} \quad \text{(Kehrwert)}$$

und aus $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ folgt schließlich $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Weitere Methoden der Grenzwertbestimmung ergeben sich durch Anwenden der

d) Monotonie und Beschränktheit $\Rightarrow$ Konvergenz

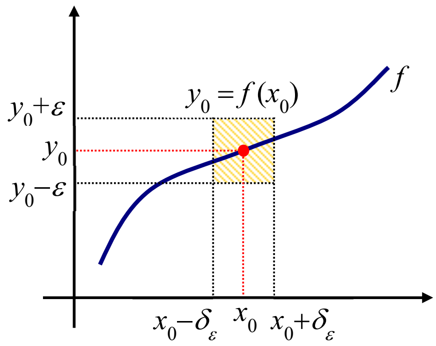
e) de l'Hospital-Regeln

f) Reihendarstellung

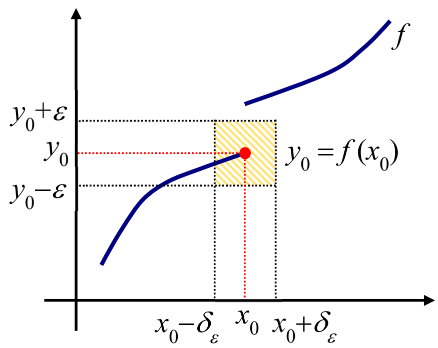
3.4.2 Stetigkeit

Definition 3-29:

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit $x_0 \in I$ und $f: I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. f heißt stetig in x_0 genau dann, wenn zu jeder beliebig kleinen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta_\varepsilon > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



f ist stetig in x_0



f ist nicht stetig in x_0

Satz 3-12:

f ist stetig in x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x_0)$ ist Grenzwert in x_0, d.h. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Leftrightarrow$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus I mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Analog zum rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert spricht man von rechts- und linksseitiger Stetigkeit.

Definition 3-30:

Eine Funktion f heißt in x_0 rechtsseitig bzw. linksseitig stetig, wenn $f(x_0)$ rechtsseitiger bzw. linksseitiger Grenzwert von f an der Stelle x_0 ist.

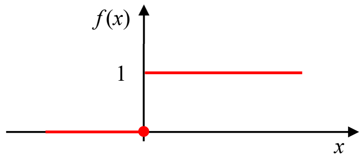
Satz 3-13:

Es sei $f: I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Existiert $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ und existiert $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ und gilt $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x)$, so ist f in x_0 stetig ergänzbar mit

$$f(x_0) := \lim_{x \to x_0-} f(x) = \lim_{x \to x_0+} f(x).$$

Beispiel:

1) $f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ für } x \le 0 \\ 1 & : \text{ für } x > 0 \end{cases}$

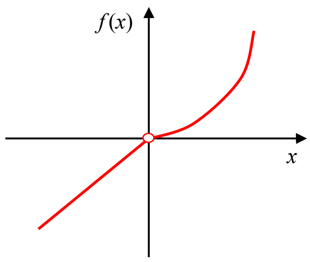


$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0 = f(0)$ linksseitiger Grenzwert

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$ rechtsseitiger Grenzwert

$\Rightarrow$ f ist linksseitig stetig in $x_0 = 0$, aber f ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

2) $f(x) = \begin{cases} x & : \text{ für } x < 0 \\ x^2 & : \text{ für } x > 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$ linksseitiger Grenzwert

$\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ rechtsseitiger Grenzwert

$\Rightarrow$ linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert

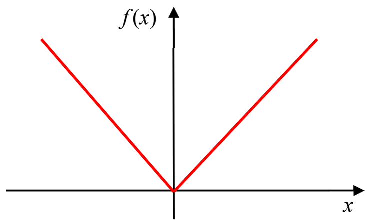
$\Rightarrow$ f ist stetig ergänzbar in $x_0 = 0$ mit $f(0) = 0$

Satz 3-14:

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. f ist stetig in x_0 genau dann, wenn sie dort sowohl rechtsseitig als auch linksseitig stetig ist.

Beispiel:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & : \text{ für } x \geq 0 \\ -x & : \text{ für } x < 0 \end{cases}$$



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 \end{array}\right\} = f(0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist stetig in } x_0$$

Definition 3-31:

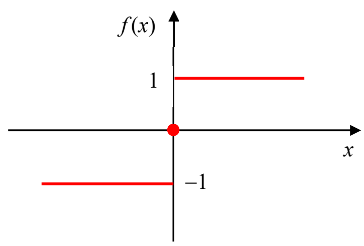
Besitzt f in x_0 rechts- und linksseitig endliche Grenzwerte mit

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0+} f(x)$$

so heißt x_0 Sprungstelle von f (f ist dann natürlich nicht stetig in x_0).

Beispiel:

1) $$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & : \text{ für } x > 0 \\ 0 & : \text{ für } x = 0 \\ -1 & : \text{ für } x < 0 \end{cases}$$



$\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \neq f(0)$ linksseitiger Grenzwert

$\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \neq f(0)$ rechtsseitiger Grenzwert

f ist weder linksseitig noch rechtsseitig stetig in $x_0 = 0$

$\Rightarrow f$ hat in $x_0 = 0$ eine Sprungstelle.

2) $$f(x) = \begin{cases} 0 & : \text{ für } x \leq 0 \\ 1 & : \text{ für } x > 0 \end{cases}$$

f ist links- aber nicht rechtsseitig stetig in $x_0 = 0$

$\Rightarrow f$ hat in $x_0 = 0$ eine Sprungstelle.

Definition 3-32:

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$.

a) f heißt stetig in I genau dann, wenn f in jedem inneren Punkt von I stetig ist.

b) f heißt stetig auf I genau dann, wenn f stetig in I und falls x_0 rechter bzw. linker Randpunkt von I mit $x_0 \in I$ f rechtsseitig bzw. linksseitig stetig ist.

Beispiel:

$f(x) = x^k, \quad k \in \mathbb{N}_0$ ist stetig in $\mathbb{R}$, denn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 3-15:

Sind f und g auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ stetig, dann gilt

a) $h = f + g$ stetig auf I $\quad h(x) = f(x) + g(x)$

b) $h = f \cdot g$ stetig auf I $\quad h(x) = f(x) \cdot g(x)$

c) $h = f / g$ stetig in allen $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$ $\quad h(x) = f(x) / g(x)$

Sind $f: I \to \mathbb{R}$, $g: D \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(D) \subset I$, dann gilt

d) $h = f \circ g$ stetig auf D $\quad h(x) = f(g(x))$

Beispiel:

1) Polynom

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

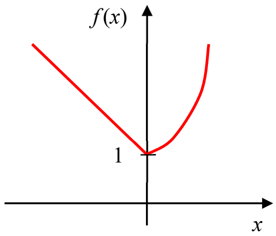
p ist stetig in $\mathbb{R}$ als Summe stetiger Funktionen x^k $(k = 1, ..., n)$.

2) gebrochenrationale Funktion

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \qquad (p, q \text{ Polynome})$$

r ist stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q(x)\}$

3) $$f(x) = \begin{cases} 1 - x & : \text{ für } x < 0 \\ 1 + x^2 & : \text{ für } x \geq 0 \end{cases}$$



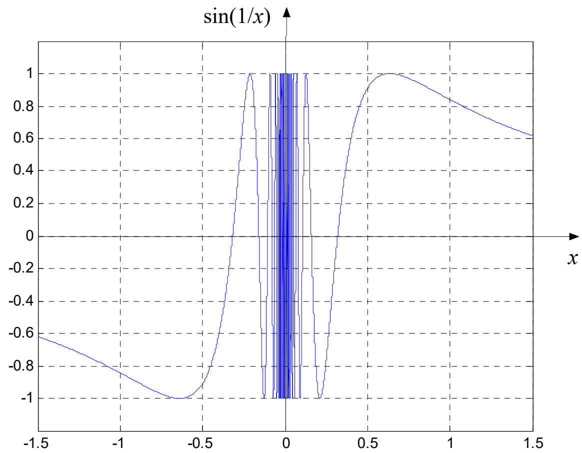
f ist stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

f ist stetig in 0, da

$\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 = f(0)$

$\Rightarrow f$ ist stetig auf $\mathbb{R}$

4) $$f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & : \text{ für } x \neq 0 \\ 0 & : \text{ für } x = 0 \end{cases}$$



f ist in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig, da f zusammengesetzte Funktion der stetigen Funktionen

$g(x) = \sin x, \quad h(x) = 1/x,$

$\Rightarrow f(x) = g\big(h(x)\big) = \sin(1/x)$

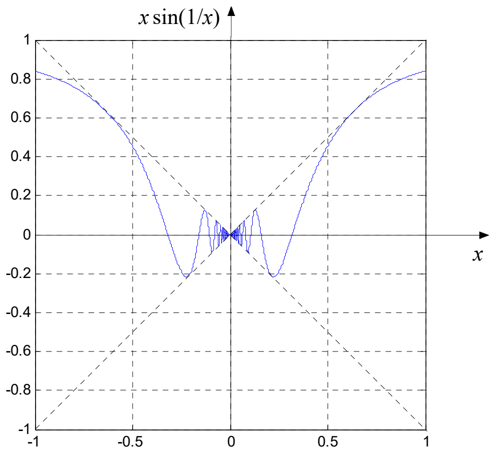
f ist nicht stetig in 0, denn sei (x_n) eine Nullfolge mit

$$x_n = 1/(\pi/2 + n\pi)$$

dann ist $f(x_n) = \sin(\pi/2 + n\pi) = (-1)^n$ divergent, d.h.

$$f(x_n) \not\to f(0) = 0.$$

5) $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & : \text{ für } x \neq 0 \\ 0 & : \text{ für } x = 0 \end{cases}$



f ist in allen $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig, da f Produkt einer stetigen und zusammengesetzt stetigen Fkt.

f ist auch stetig in 0, denn sei (x_n) eine Nullfolge

$$\Rightarrow \left|f(x_n)\right| = \left|x_n\right| \left|\sin(1/x_n)\right| \leq \left|x_n\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(0) = 0$$

also f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 3-16:

Für jede auf einem abgeschlossenen Intervall $a \leq x \leq b$ stetige Funktion f gilt

a) Zwischenwertsatz
f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal in $[a,b]$ an

b) Schrankensatz
f ist beschränkt auf $[a,b]$, d.h. es existiert eine Schranke mit

$$\left|f(x)\right| < K \quad \text{für alle } x \in [a,b]$$

c) Satz vom Minimum und Maximum
f nimmt auf $[a,b]$ ihr absolutes Maximum und Minimum an, d.h. es existiert $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ mit

$$f(\xi_1) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \quad \text{und} \quad f(\xi_2) = \min_{x\in[a,b]} f(x).$$

Außerdem besitzen $f(a)$ und $f(b)$ entgegengesetzte Vorzeichen, d.h. $f(a) \cdot f(b) < 0$, dann gilt

d) Nullstellensatz
   Es existiert ξ im Inneren $[a,b]$, d.h. $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = 0$

<u>Satz 3-17:</u>
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[a,b]$ streng monoton und stetig, dann ist ihre Umkehrfunktion f^{-1} auf dem Wertebereich von f, der ebenfalls ein Intervall ist, stetig.

Damit sind auch die folgenden Funktionen stetig:

$\ln$ ist stetig auf $(0,\infty)$,

a^x ist stetig auf $\mathbb{R}$ (für $a > 0$),

$\log_a$ ist stetig auf $(0,\infty)$,

arc- und area- Fkt. sind stetig auf ihren Definitionsbereichen.

Aufgabe 3-1: Berechnen Sie mittels Horner-Schema die Werte von $f(x)$ an den angegebenen Stellen und bestimmen Sie die Zerlegung von $f(x)$ in reelle Elementarfaktoren.

a) $f(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 2x + 4\,,\quad x_0 = 1,\ x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$

b) $f(x) = 2x^7 - x^6 + 2x^5 + 71x^4 + 68x^3 - 52x^2\,,\quad x_0 = -3,\ x_1 = -2,\ x_2 = \dfrac{1}{2}$

c) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8\,,\quad x_0 = -2,\ x_1 = 2,\ x_2 = 3$

Aufgabe 3-2: Ermitteln Sie von den gebrochenrationalen Funktionen $f(x)$ die Nullstellen und Polstellen. Geben Sie die Asymptoten an und skizzieren Sie den Graphen $f(x)$ und die Asymptoten.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 + 5x + 6}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\left(x^2 + x\right)\left(x - 3\right)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x\left(x - 1\right)^2}{\left(x - 1\right)\left(x + 1\right)\left(x + 2\right)}$

Aufgabe 3-3: Geben Sie die Zerlegung in reelle Partialbrüche an für

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^3 + 10x^2 - x}{\left(x + 1\right)^2\left(x - 1\right)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{\left(x + 1\right)^2\left(x^2 + x + 1\right)^2}$

Aufgabe 3-4: Drücken Sie

a) $\sin^6 x$ und $\cos^7 x$ durch $\sin kx$ und $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}_0$,

b) $\cos 6x$ und $\sin 7x$ durch $\sin^k x$ und $\cos^k x$, $k \in \mathbb{N}$

aus.

Aufgabe 3-5: Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten.

a) $\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad |x| \le 1$

b) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2} \qquad |x| \le 1$

c) $\operatorname{ar\,sinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}$

d) $\operatorname{ar\,tanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right) \qquad |x| < 1$

Aufgabe 3-6: Zeigen Sie mit der Grenzwertdefinition (ε, N_ε - Definition)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a_n \ge 0 \;\forall\; n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Aufgabe 3-7: Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwert.

a) $a_n = 2^{-n}\left(2^n + (-2)^n\right)$

b) $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

c) $a_n = \sqrt{\dfrac{2n^3 - n^2 - n + 1}{3n^3 - 1}}$

d) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{3n}\right)^{n+3}$

e) $a_n = \dfrac{2n+1}{n^2} + \left(\dfrac{4}{5}\right)^n \dfrac{n}{n+1}$

f) $a_n = \dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{n^3 + 3n - 1}{n^2} + 3n\right)$

Aufgabe 3-8: Zeigen Sie

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k(k+1)} = 1$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} \le 1$

c) $2 \le \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} < 3$

Aufgabe 3-9:

a) Zeigen Sie mit Hilfe der (ε,δ) – Definition $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{1 + e^{-1/x}} = 1$

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = \tanh\left(\dfrac{1}{x}\right)$ im Nullpunkt stetig ergänzbar ist.