Höhere Mathematik 1

Kapitel 4

Differentialrechnung

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höher Mathematik 1

Kapitel 4

Inhaltsverzeichnis

4 Differentialrechnung

4.1 Grundlagen

4.1.1 Ableitung einer differenzierbaren Funktion

Definition 4-1:

Es sei f eine auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definierte Funktion und $x_0 \in I$. f heißt in x_0 differenzierbar, wenn der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

für $x \to x_0$ bzw. $h \to 0$ einen endlichen Grenzwert besitzt. Der Grenzwert (sofern er existiert) heißt die Ableitung der Funktion f in x_0 und man schreibt

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Betrachtet man beim Grenzübergang $x \to x_0$ nur $x > x_0$ bzw. $x < x_0$, so heißt f in x_0 rechtsseitig bzw. linksseitig differenzierbar und der Grenzwert die rechtsseitige bzw. linksseitige Ableitung von f in x_0.

Satz 4-1:

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$. Existiert die linksseitige und rechtsseitige Ableitung in x_0 und sind diese gleich, d.h.

$$\lim_{x \to x_0 -} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0 +} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

dann ist f differenzierbar in x_0 mit $f'(x_0) = a$.

Beispiel:

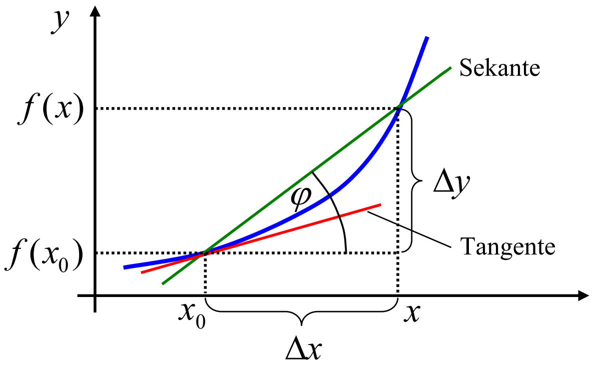
1) $f(x) = C \;\; \forall x \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; f'(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, denn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = 0.$$

2) $f(x)=x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)=1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, denn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

Geometrische Deutung der Ableitung



Anstieg der Sekante: $\quad \tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Der Grenzwert (sofern er existiert)

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

gibt den Anstieg der Tangente in $(x_0, f(x_0))$ an. Ist f in x_0 differenzierbar, ergibt sich die Tangente an den Graphen $y=f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ zu

$$y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

Physikalische Deutung der Ableitung

Gegeben sei $s=s(t)$, die von einem Massenpunkt zur Zeit t zurückgelegte Strecke. Der Differenzenquotient

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}$$

gibt die Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall $[t_0, t]$ an.

Die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t_0 erhält man durch Grenzübergang

$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0) = \dot{s}(t_0)$$

<u>Anmerkung:</u>
Für Ableitungen nach der Zeit schreibt man üblicherweise

$$\dot{s}(t), \ddot{s}(t), \dddot{s}(t) \quad \text{statt} \quad s'(t), s''(t), s'''(t)\,.$$

<u>Stetigkeit ist notwendige Voraussetzung für Differenzierbarkeit</u>

<u>Satz 4-2:</u>
Jede in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist dort auch stetig.

<u>Beweis:</u>
Aus

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

folgt mit

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0}\big(f(x) - f(x_0)\big) &= \lim_{x \to x_0}\left((x - x_0)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right) \\ &= \lim_{x \to x_0}(x - x_0) \cdot \lim_{x \to x_0}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= 0 \cdot f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

die Stetigkeit, d.h. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Anmerkung:
Die Umkehrung gilt nicht, d.h. aus der Stetigkeit folgt nicht die Differenzierbarkeit. Die Stetigkeit ist somit keineswegs hinreichend für die Differenzierbarkeit.

Beispiel:

1) $f(x) = |x| = \begin{cases} x & : \text{ für } x \geq 0 \\ -x & : \text{ für } x < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ ist differenzierbar in allen $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, aber f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{linksseitige Ableitung}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{rechtsseitige Ableitung}$$

d.h. rechtsseitige Ableitung $\neq$ linksseitige Ableitung
$\Rightarrow f$ ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

2) $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & : \text{ für } x \neq 0 \\ 0 & : \text{ für } x = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f$ ist stetig in $x_0 = 0$, aber f ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$,

denn $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin(1/x)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \sin(1/x)$ existiert nicht.

Differentiationsregeln

Satz 4-3:

a) Sind die Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, dann gilt

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(cf)'(x_0) = cf'(x_0) \quad c \in \mathbb{R}$

3) $(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0)$

4) $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0$

b) Ist $g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ in $g(x_0) \in I$ differenzierbar, so ist auch $h = f \circ g$ $(h(x) = f(g(x)))$ in x_0 differenzierbar

$$h'(x_0) = (f \circ g)'(x_0) = f'\big(g(x_0)\big)\,g'(x_0)$$

c) Ist $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton in I und in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis:

a)

1) $$\frac{\big(f(x)+g(x)\big) - \big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
$$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(x_0) + g'(x_0)$$

2) $$\frac{cf(x)-cf(x_0)}{x-x_0} = c\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} cf'(x_0)$$

3) $$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
$$= \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$= g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4) 1. Schritt

$$\frac{1/g(x)-1/g(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x_0)-g(x)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

2. Schritt

$$(f/g)'(x_0) = (f\cdot 1/g)'(x_0) = f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$= \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

b)

$$\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} = \frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\,\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$

$$\xrightarrow[x\to x_0]{} f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

c)

$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$, f^{-1} ist stetig und streng monoton. Überdies sei $y = f(x) \neq f(x_0) = y_0 \;\Rightarrow\; x = f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0) = x_0$

$$\Rightarrow \lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Beispiel:

1) $f(x) = x^k,\; k\in\mathbb{Z} \;\Rightarrow\; f'(x) = k\,x^{k-1}$

$k = 0, k = 1:$ s. früheres Beispiel

$k > 0, k\to k+1: \quad (x^{k+1})' = (x\,x^k)' = 1x^k + x\,k\,x^{k-1} = (k+1)\,x^k$

$$k<0 \;\Rightarrow\; -k>0 \;\Rightarrow\; f(x)=x^k=\frac{1}{x^{-k}}, \quad x\neq 0$$

$$\Rightarrow\; f'(x)=\frac{-(-k\,x^{-k-1})}{(x^{-k})^2}=k\,x^{k-1}$$

2) $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow f'(x)=\sum_{k=1}^{n} k\,a_k x^{k-1}$

(Polynome sind differenzierbar auf $\mathbb{R}$)

3) $f(x)=p(x)/q(x)$

p, q sind Polynome, also ist f eine gebrochenrationale Funktion. f ist differenzierbar in allen $x \in \mathbb{R}\setminus\{\text{Nullstellen von } q\}$ mit

$$f'(x)=\frac{p'(x)q(x)-p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

4) $g(x)=\sqrt{x}, \quad x\geq 0$

$\Rightarrow$ g ist differenzierbar für alle $x>0$ mit $(\sqrt{x})'=1/(2\sqrt{x})$, denn g ist Umkehrfunktion von $f(x)=x^2,\ f'(x)=2x$

$\Rightarrow$ $g=f^{-1}$ und $g'(y_0)=(f^{-1})'(y_0)$

$$=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}=\frac{1}{2f^{-1}(y_0)}=\frac{1}{2g(y_0)}=\frac{1}{2\sqrt{y_0}}$$

5) $f(x)=\begin{cases} x^3 & : \text{ für } x<0 \\ x^2 & : \text{ für } x\geq 0 \end{cases}$

f ist differenzierbar für $x<0$ mit $f'(x)=3x^2$

f ist differenzierbar für $x>0$ mit $f'(x)=2x$

$\lim_{x\to 0-} 3x^2=0$ und $\lim_{x\to 0+} 2x=0$

$\Rightarrow$ linksseitige Ableitung = rechtsseitige Ableitung

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar für $x = 0$ mit $f'(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & : \quad \text{für } x < 0 \\ 0 & : \quad \text{für } x = 0 \\ 2x & : \quad \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Definition 4-2:

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$.

a) f heißt differenzierbar in I, wenn f in jedem inneren Punkt von I differenzierbar ist.

b) f heißt differenzierbar auf I, wenn f differenzierbar in I und falls $x_0 \in I$ rechter Randpunkt (bzw. linker Randpunkt) von I, f rechtsseitig (bzw. linksseitig) differenzierbar ist.

c) Ist f' stetig in (bzw. auf) I, so heißt f in (bzw. auf) I stetig differenzierbar.

Beispiel:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

da $f'(x) = 2x$ stetig auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f(x) = x^2$ ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$

4.1.2 Ableitung einiger Grundfunktionen

Trigonometrische Funktionen

Es gilt

1) $\sin' x = \cos x \qquad x \in \mathbb{R}$

2) $\cos' x = -\sin x \qquad x \in \mathbb{R}$

3) $\tan' x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

4) $\cot' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1+\cot^2 x) \qquad x \neq k\pi$

5) $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1$

6) $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad |x| < 1$

7) $\arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$

8) $\operatorname{arccot}' x = -\dfrac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$

Beweis:

1) $$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sin(h/2)\cos(x+h/2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0} \cos(x+h/2) = \cos x$$

2) $$\cos' x = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin(h/2)\sin(x+h/2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2} \cdot \lim_{h\to 0} \big(-\sin(x+h/2)\big) = -\sin x$$

3) $$\tan' x = (\sin x / \cos x)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

4) $\cot' x = (\cos x / \sin x)' = \dfrac{\cos' x \sin x - \cos x \sin' x}{\sin^2 x}$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

5) $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin x)} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\left(\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y},\ \ y \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right); \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}\right)$$

6) $\arccos' x = \dfrac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\dfrac{1}{\sin(\arccos x)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\left(\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y},\ \ y \in \left(0, \pi\right); \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}\right)$$

7) $\arctan' x = \dfrac{1}{\tan'(\arctan x)} = \dfrac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} = \dfrac{1}{1 + x^2}$

8) $\operatorname{arccot}' x = \dfrac{1}{\cot'(\operatorname{arccot} x)} = -\dfrac{1}{1 + \cot^2(\operatorname{arccot} x)} = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

Exponential- und Logarithmusfunktionen

1) $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ $\qquad x > 0$

2) $\log_a' x = \dfrac{1}{x \ln a}$ $\qquad x > 0$

3) $(e^x)' = e^x$ $\qquad x \in \mathbb{R}$

4) $(a^x)' = a^x \ln a$ $\qquad a > 0,\ \ x \in \mathbb{R}$

Beweis:

1) $$\ln' x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\frac{1}{x}\left(\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\ln\left(1+\frac{1}{x/h}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}$$

2) $$\log_a' x = \frac{1}{\ln a}\ln' x = \frac{1}{x\ln a}$$

3) $$(e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{1/e^x} = e^x$$

4) $$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a$$

Ist f differenzierbar und $f(x)\neq 0$, so gilt mit Hilfe der Kettenregel

$$(\ln|f(x)|)' = f'(x)/f(x) \quad \text{bzw.} \quad f'(x) = f(x)\,(\ln|f(x)|)'$$

Potenzfunktionen

Es gilt

1) $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ $\qquad n\in\mathbb{N}_0$

2) $(x^k)' = k\,x^{k-1}$ $\qquad k\in\mathbb{Z},\ x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$

3) $(x^\alpha)' = \alpha\,x^{\alpha-1}$ $\qquad \alpha\in\mathbb{R},\ x>0$

Beweis:

1) und 2) siehe oben

3) $\alpha \in \mathbb{Q} \;\Rightarrow\; \alpha = n/m, \quad n, m \in \mathbb{Z}$

$$(x^\alpha)' = (x^{n/m})' = ((x^{1/m})^n)'$$

$$= n\,(x^{1/m})^{n-1}(x^{1/m})' = \frac{n\,x^{(n-1)/m}}{m\,(x^{1/m})^{m-1}} = \frac{n}{m}\,x^{\left(\frac{n-1}{m}-\frac{m-1}{m}\right)} = \frac{n}{m}\,x^{\frac{n-m}{m}} = \alpha\,x^{\alpha-1}$$

$$\alpha \in \mathbb{R},\; x^\alpha = e^{\alpha \ln x},\; (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}\alpha\,\frac{1}{x} = \alpha\,x^\alpha x^{-1} = \alpha\,x^{\alpha-1}$$

Hyperbolische Funktionen

1) $\sinh' x = \cosh x \qquad x \in \mathbb{R}$

2) $\cosh' x = \sinh x \qquad x \in \mathbb{R}$

3) $\tanh' x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \qquad x \in \mathbb{R}$

4) $\coth' x = -\dfrac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

5) $\operatorname{arsinh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad x \in \mathbb{R}$

6) $\operatorname{arcosh}' x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x > 1$

7) $\operatorname{artanh}' x = \dfrac{1}{1-x^2} \qquad |x| < 1$

8) $\operatorname{arcoth}' x = \dfrac{1}{1-x^2} \qquad x > 1$

Beweis:

1) $\sinh' x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}\Big((e^x)' - (e^{-x})'\Big) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$

2) $\cosh' x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})' = \frac{1}{2}\Big((e^x)' + (e^{-x})'\Big) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$

3) $\tanh' x = (\sinh x/\cosh x)' = \dfrac{\sinh' x\cosh x - \sinh x\cosh' x}{\cosh^2 x}$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

4) $\coth' x = (\cosh x/\sinh x)' = \dfrac{\cosh' x\sinh x - \cosh x\sinh' x}{\sinh^2 x}$

$$= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x$$

5) $\operatorname{arsinh}' x = \dfrac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh} x)} = \dfrac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\left(\cosh y = \sqrt{1+\sinh^2 y},\quad \cosh(\operatorname{arsinh} x) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}\right)$

6) $\operatorname{arcosh}' x = \dfrac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh} x)} = \dfrac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh} x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\left(\sinh y = \sqrt{\cosh^2 y - 1},\quad \sinh(\operatorname{arcosh} x) = \sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh} x) - 1}\right)$

7) $\operatorname{artanh}' x = \dfrac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh} x)} = \dfrac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh} x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$

8) $\operatorname{arcoth}' x = \dfrac{1}{\coth'(\operatorname{arcoth} x)} = \dfrac{1}{1-\coth^2(\operatorname{arcoth} x)} = \dfrac{1}{1-x^2}$

4.1.3 Höhere Ableitungen

Definition 4-3:

Ist $f: I \to \mathbb{R}$ in I differenzierbar mit der Ableitungsfunktion $f': I \to \mathbb{R}$ und ist f' in $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f in x_0 zweimal differenzierbar mit

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \frac{df'(x_0)}{dx} = f''(x_0).$$

Existieren analog alle Ableitungen bis zur Ordnung $(n-1)$ in I und ist $f^{(n-1)}: I \to \mathbb{R}$ (die $(n-1)$-te Ableitungsfunktion) in x_0 differenzierbar, so heißt f in x_0 n-mal differenzierbar mit

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_0) = \frac{d^{n-1} f'}{dx^{n-1}}(x_0) = \frac{d^{n-2} f''}{dx^{n-2}}(x_0) = \ldots = \frac{df^{(n-1)}}{dx}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Existiert $f^{(n)}$ in I und ist $f^{(n)}: I \to \mathbb{R}$ stetig in I, so heißt f n-mal stetig differenzierbar in I.

Die Menge der in I n-mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet man mit

$$C^n(I) = \left\{ f: I \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar in } I \right\}$$

Spezielle Fälle

$n = 0$: $C(I) = \left\{ f: I \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist stetig in } I \right\}$

$n = \infty$: $C^\infty(I) = \left\{ f: I \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist beliebig oft stetig differenzierbar in } I \right\}$

Beispiel:

1) $f(x)=e^x,\ f'(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) $f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,$

$f'''(x)=-\cos x \quad f^{(4)}(x)=\sin x \Rightarrow f\in C^{\infty}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^3 \text{ für } x<0, & f'(x)=3x^2, \quad f''(x)=6x \\ x^2 \text{ für } x\geq 0, & f'(x)=2x, \quad f''(x)=2 \end{cases}$

$\Rightarrow f''(0)$ existiert nicht $\Rightarrow f\in C^1(\mathbb{R})$

4) $f(x)=|x|=\begin{cases} x & : \text{ für } x\geq 0 \\ -x & : \text{ für } x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow f'(0)$ existiert nicht $\Rightarrow f\in C(\mathbb{R})$

Rechenregeln:

Es seien f, g n-mal stetig differenzierbar in x_0.

1) $(f+g)^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)+g^{(n)}(x_0)$

2) $(cf)^{(n)}(x_0)=cf^{(n)}(x_0)$

3) $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$

$(fg)''(x_0)=f''(x_0)g(x_0)+2f'(x_0)\cdot g'(x_0)+f(x_0)g''(x_0)$

$(fg)'''(x_0)=f'''(x_0)g(x_0)+3f''(x_0)g'(x_0)+3f'(x_0)g''(x_0)+f(x_0)g'''(x_0)$

$\vdots$

$$(fg)^{(n)}(x_0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)g^{(k)}(x_0)$$

4.2 Anwendungen der Differentialrechnung

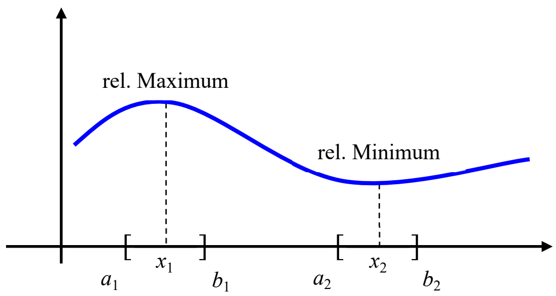
4.2.1 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

<u>Definition 4-4:</u>

Es sei $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. f hat in x_0 ein relatives Extremum (Maximum bzw. Minimum) genau dann, wenn ein Intervall $[a,b] \subset I$ existiert mit $x_0 \in (a,b)$ und $f(x) \le f(x_0)$ bzw. $f(x) \ge f(x_0)$ für alle $x \in [a,b]$.

<u>Satz 4-4:</u> (*notwendige Bedingung für Extremum*)

Hat $f: I \to \mathbb{R}$ ein relatives Extremum und ist f in x_0 differenzierbar, dann gilt $f'(x_0) = 0$.



<u>Beweis:</u>

f besitze in $x_0 \in I$ ein relatives Extremum, z.B. ein relatives Maximum

$$\Rightarrow \; f(x_0 \pm 1/n) \le f(x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

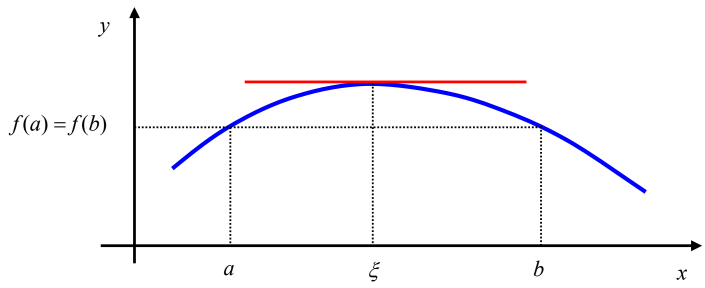
$$\Rightarrow \; f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + 1/n) - f(x_0)}{(x_0 + 1/n) - x_0} \le 0$$

$$\Rightarrow \; f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 - 1/n) - f(x_0)}{(x_0 - 1/n) - x_0} \ge 0$$

$$\Rightarrow \; f'(x_0) = 0$$

<u>Satz 4-5:</u> (*Satz von Rolle*)

Es sei f eine auf $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion und es gelte $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.



Beweis:

f nimmt als stetige Funktion auf $[a,b]$ ihr absolutes Minimum m_1 und absolutes Maximum m_2 an, vgl. früheren Satz.

1) $m_1 = m_2$, dann ist f auf $[a,b]$ konstant und damit $f'(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

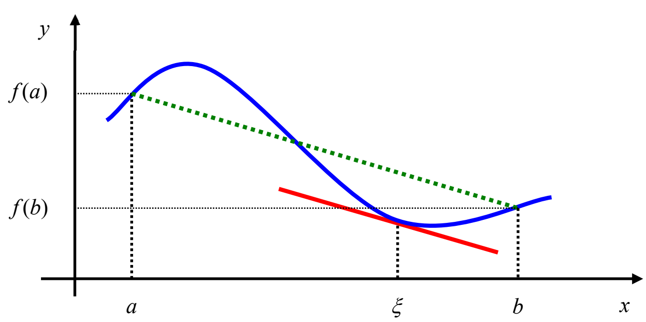
2) $m_1 \neq m_2$, da $f(a) = f(b)$ ist, nimmt f mindestens einen der beiden Werte m_1, m_2, an einer inneren Stelle ξ von $[a,b]$ an. Also gilt nach dem vorangegangenen Satz an dieser Stelle $f'(\xi) = 0$.

Satz 4-6: (*Mittelwertsatz*)

Es sei f eine auf $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktion, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

d.h. die Steigung der Tangente am Punkt $(\xi, f(\xi))$ ist gleich der Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$.



Beweis:

Es sei

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \;\Rightarrow\; h(a) = f(a) = h(b)$$

d.h. h erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Daher existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$h'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\Rightarrow\; f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Anmerkung:

Setzt man für $b = x$ und für $a = x_0$, so lautet die Aussage des Mittelwertsatzes $f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$ mit $\xi = x_0 + \delta(x - x_0)$ und $0 < \delta < 1$.

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Satz 4-7:

Es seien f und g zwei auf $[a,b]$ stetige und auf (a,b) differenzierbare Funktionen

a) Gilt $f'(x) = 0 \;\; \forall x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f$ ist konstant.

b) Gilt $f'(x) = g'(x) \;\; \forall x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f(x) = g(x) + c \;\; \forall x \in (a,b)$ und $c \in \mathbb{R}$, d.h. f und g unterscheiden sich nur durch eine Konstante.

c) Gilt $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b) \;\Rightarrow\; f$ ist streng monoton wachsend bzw. fallend auf $[a,b]$.

Beweis:

a) Es sei $x_0 \in (a,b]$, dann existiert ein $\xi \in (a,x_0)$ mit
$f(a) = f(x_0) + f'(\xi)(a - x_0) = f(x_0) \;\Rightarrow\; f(a) = f(x_0) \;\; \forall x_0 \in (a,b]$
$\Rightarrow f$ ist konstant.

b) $h = f - g$ erfüllt Voraussetzungen von a), d.h. $h' = f' - g' = 0$
$\forall x \in (a,b) \;\Rightarrow\; h$ ist konstant $\Rightarrow f(x) = g(x) + c$.

c) $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ und $a \le x_1 < x_2 \le b$
$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0$ da $f'(\xi) > 0$ und $(x_2 - x_1) > 0$
$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

$f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a,b)$ und $a \le x_1 < x_2 \le b$
$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)\,(x_2 - x_1) < 0$ da $f'(\xi) < 0$ und $(x_2 - x_1) > 0$
$\Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Beispiel:

1) e^x ist streng monoton wachsend in $\mathbb{R}$, da $(e^x)' > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2) $\ln x$ ist ebenfalls streng monoton wachsend für $x > 0$, da
$(\ln x)' = 1/x > 0$ für alle $x \in (0,\infty)$

3) $\sin x$ ist streng monoton wachsend bzw. fallend in den Intervallen, in denen $\cos x > 0$ bzw. $\cos x < 0$, z.B. streng monoton wachsend bzw. fallend auf $(-\pi/2, \pi/2)$ bzw. $(\pi/2, 3\pi/2)$

4) $\operatorname{arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, denn

$$\operatorname{arsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{und} \quad \ln'\left(x + \sqrt{1+x^2} \right) = \frac{1 + x\big/\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arsinh}' x = \ln'\left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{arsinh} x = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

für $x = 0$ folgt $0 = 0 + c$ und damit $c = 0$

5) $\arctan x = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\dfrac{1}{x} \qquad \forall x > 0,$ denn

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad (\arctan(1/x))' = \frac{(-1/x^2)}{1+(1/x)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \ \arctan' x + (\arctan(1/x))' = 0 \quad \forall x > 0$$

$$\Rightarrow \ \arctan x + \arctan(1/x) = c \quad \forall x > 0$$

für $x = 1$ folgt $\pi/4 + \pi/4 = \pi/2 = c$ und damit $c = \pi/2$

4.2.2 Nullstellen und Fixpunkte

4.2.2.1 Allgemeines Iterationsverfahren

Satz 4-8: (*Fixpunktiteration*)

Besitzt eine auf $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion g die Eigenschaften

a) $a \leq g(x) \leq b$ für alle $x \in [a,b]$

b) es existiert eine Konstante L und $|g'(x)| < L < 1$ für alle $x \in [a,b]$

dann gilt

1) *Existenz eines Fixpunkts*

Es existiert genau ein $\tilde{x} \in [a,b]$ mit $g(\tilde{x}) = \tilde{x}$

2) *Berechnung des Fixpunkts*

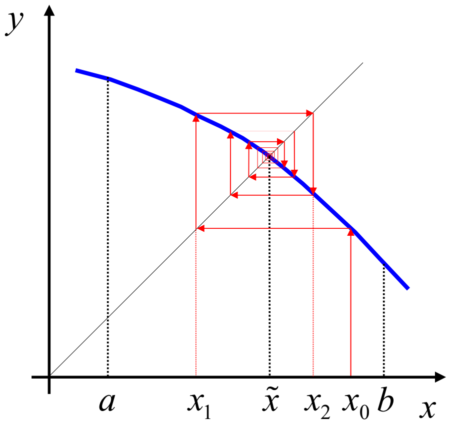
Die Iterationsfolge

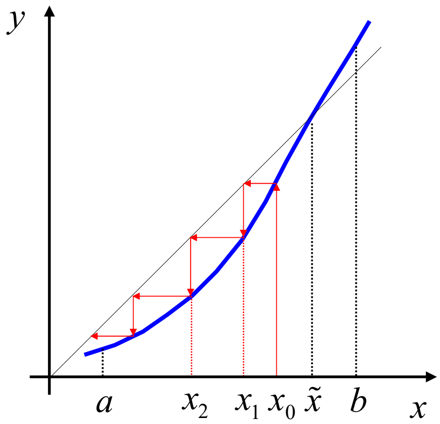
$$x_{n+1} = g(x_n), \ n = 0,1,2,\ldots$$

konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 \in [a,b]$ gegen den Fixpunkt $\tilde{x}$

3) *Fehlerabschätzung*

$$\left|x_n - \tilde{x}\right| \le \frac{L}{1-L}\left|x_n - x_{n-1}\right| \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$





Beweis:

1) a) Existenz

Falls $g(a) = a$ oder $g(b) = b$ ist nichts mehr zu zeigen.

Im Fall $a < g(a)$ und $g(b) < b$ hat $h(x) := g(x) - x$ wegen $h(a) > 0$ und $h(b) < 0$ in (a, b) wenigstens eine Nullstelle $\tilde{x}$ (Zwischenwertsatz) $\Rightarrow$ $g(\tilde{x}) = \tilde{x}$

b) Eindeutigkeit

Gäbe es zwei verschiedene Fixpunkte $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, so würde nach dem Mittelwertsatz ein ξ zwischen $\tilde{x}_1$ und $\tilde{x}_2$ existieren mit

$$\frac{g(\tilde{x}_1) - g(\tilde{x}_2)}{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2} = \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2}{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2} = 1 = g'(\xi)$$

dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung $\left|g'(\xi)\right| < 1$

2) $|x_n - \tilde{x}| = |g(x_{n-1}) - g(\tilde{x})|$ (aus Definition von x_n)

$= |g'(\xi)||x_{n-1} - \tilde{x}|$ (mit Mittelwertsatz)

$\le L|x_{n-1} - \tilde{x}|$ (nach Voraussetzung)

damit gilt $|x_n - \tilde{x}| \le L|x_{n-1} - \tilde{x}| \le L^2|x_{n-2} - \tilde{x}| \le \cdots \le L^n|x_0 - \tilde{x}|$ und wegen $L^n \to 0$ für $n \to \infty$ folgt die Konvergenz $|x_n - \tilde{x}| \to 0$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tilde{x}$

3) $|x_n - \tilde{x}| \le L|x_{n-1} - \tilde{x}| = L|x_{n-1} - x_n + x_n - \tilde{x}|$

$\le L|x_{n-1} - x_n| + L|x_n - \tilde{x}|$ (Dreiecksungleichung)

$$\Rightarrow |x_n - \tilde{x}| \le \frac{L}{1-L}|x_{n-1} - x_n|$$

Beispiel:

Gesucht wird die Lösung der Gleichung $x = e^{x^2-2}$. $g(x) = e^{x^2-2}$ erfüllt über dem Intervall $[0,1]$ die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes, denn $0 \le e^{x^2-2} \le 1$ für $0 \le x \le 1$ und $|g'(x)| = |e^{x^2-2}2x| \le 2/e = L < 1$

Für den Startwert $x_0 = 0{,}5$ erhält man die Iterationsfolge

$x_1 = 0{,}1737739|4345045\ldots$ $x_2 = 0{,}1394843|8549341\ldots$

$x_3 = 0{,}1379941|3341299\ldots$ $x_4 = 0{,}1379370|8285302\ldots$

$x_5 = 0{,}1379349|1146036\ldots$ $x_6 = 0{,}1379348|2883373\ldots$

Fehlerabschätzung

$$|x_6 - \tilde{x}| \le \frac{2/e}{1-2/e}|x_6 - x_5| \le 2{,}3 \cdot 10^{-7}$$

Anmerkung:

Ist $\left|g'(x)\right| \geq L > 1$ für alle $x \in [a,b]$ und ist g stetig differenzierbar mit $g\left([a,b]\right) \subset [\alpha,\beta]$, so existiert die Umkehrfunktion g^{-1}: $[\alpha,\beta] \to [a,b]$ mit

$$\max_{u\in[\alpha,\beta]} \left|\frac{dg^{-1}}{du}(u)\right| < 1, \text{ denn } \left|\frac{dg^{-1}}{du}(u)\right| = \frac{1}{\left|g'\left(g^{-1}(u)\right)\right|} \leq \frac{1}{L} \quad \forall u \in [\alpha,\beta].$$

Also kann man in diesem Fall zur Umkehrfunktion übergehen, denn es gilt $g(\tilde{x}) = \tilde{x} \;\Leftrightarrow\; g^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Beispiel:

Gegeben: $g(x) = \tan(x)$

Gesucht: $\tan\tilde{x} = \tilde{x}$ mit $\tilde{x} \in (\pi/2, 3\pi/2)$, Schnittpunkt des zweiten Tangens-Astes mit der Winkelhalbierenden

$$\left|g'(x)\right| = \left|1 + \tan^2 x\right| \geq 2 > 1 \quad \forall x \in [5\pi/4, 3\pi/2)$$

$g^{-1}(x) = \pi + \arctan x$ erfüllt $\forall x \in [1,\infty)$ die Voraussetzungen,

denn $\displaystyle\max_{x\in[1,\infty)} \left|\frac{dg^{-1}}{dx}(x)\right| = \max_{x\in[1,\infty)} \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} = L < 1$

g^{-1} ist streng monoton wachsend mit

$$1 < 5\pi/4 = g^{-1}(1) \leq g^{-1}(x) \leq \lim_{x\to\infty} g^{-1}(x) = 3\pi/2 < \infty$$

Iterationsfolge:

$x_0 = 5\pi/4$

$\vdots$

$x_4 = 4{,}4934062\ldots$

$x_5 = 4{,}4934093\ldots$

Fehlerabschätzung:

$$\left|x_5 - \tilde{x}\right| \leq \frac{1/2}{1-1/2}\left|x_5 - x_4\right| \leq 3{,}1 \cdot 10^{-6}$$

Berechnen von Nullstellen:

Gegeben: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

Gesucht: $\tilde{x}\in[a,b]$ mit $f(\tilde{x})=0$ (Nullstelle von f)

Zurückführen auf eines der Fixpunktverfahren

1) $f(\tilde{x})=0 \Leftrightarrow g(\tilde{x})=\tilde{x}$ mit
   $g(x)=x+f(x)$ falls $-2<f'(x)<0 \;\; \forall x\in[a,b]$

2) $f(\tilde{x})=0 \Leftrightarrow g(\tilde{x})=\tilde{x}$ mit
   $g(x)=x-f(x)$ falls $0<f'(x)<2 \;\; \forall x\in[a,b]$

3) $f(\tilde{x})=0 \Leftrightarrow g(\tilde{x})=\tilde{x}$ mit
   g so wählen, dass $\max\limits_{x\in[a,b]}|g'(x)|$ möglichst klein

4) Newton-Verfahren, $f(\tilde{x})=0 \Leftrightarrow g(\tilde{x})=\tilde{x}$ mit
   $g(x)=x-f(x)/f'(x)$ falls $f'(x)\neq 0 \;\; \forall x\in[a,b]$

Beispiel:

Gesucht wird die Nullstelle von

$$f(x)=x^2-5x+4 \text{ in } [a,b]=[0,2].$$

Da $f(0)=4>0$ und $f(2)=-2<0$ existiert ein $\tilde{x}\in[0,2]$ mit $f(\tilde{x})=0.$

a) Wegen $f'(x)=2x-5$ und damit $f'(0)=-5$ sind die ersten beiden Möglichkeiten ungeeignet. Aber

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow (x^2+4)/5=x.$$

Wähle

$$g(x)=(x^2+4)/5 \Rightarrow |g'(x)|=|2x/5|\leq 4/5=L<1 \text{ in } [0,2].$$

Aus $g'(x)=2x/5>0$ in $[0,2]$ folgt g ist streng monoton wachsend in $[0,2]$ und

$$0<4/5=g(0)\leq g(x)\leq g(2)=8/5<2 \quad \forall x\in[0,2].$$

Somit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt.

Mit dem Startwert $x_0 = 0$ erhält man die Iterationsfolge

$$x_1 = 0{,}8$$
$$x_2 = 0{,}928$$
$$x_3 = 0{,}9722368$$
$$x_4 = 0{,}98904887905485\ldots$$
$$x_5 = 0{,}99564353703193\ldots$$
$$x_6 = 0{,}99826121056669\ldots$$

Fehlerabschätzung für x_6 ergibt

$$\left|x_6 - \tilde{x}\right| = \frac{4/5}{1-4/5}\left|x_6 - x_5\right| \le 1{,}05 \cdot 10^{-2}.$$

b) Newton-Verfahren

$$f(x) = x^2 - 5x + 4, \quad f'(x) = 2x - 5$$

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 5x + 4}{2x - 5} = \frac{x^2 - 4}{2x - 5}$$

Die Voraussetzungen für Konvergenz werden im nächsten Abschnitt formuliert.

Mit dem Startwert $x_0 = 0$ erhält man die Iterationsfolge

$$x_1 = 0{,}8$$
$$x_2 = 0{,}98823529411765\ldots$$
$$x_3 = 0{,}99995422293431\ldots$$
$$x_4 = 0{,}99999999930151\ldots$$
$$x_5 = 1{,}00000000000000\ldots$$

4.2.2.2 Newton-Verfahren

Es sei f eine auf dem Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbare Funktion mit $f(a)f(b)<0$ (Vorzeichenwechsel), d.h. $\exists \tilde{x} \in (a,b)$ mit $f(\tilde{x})=0$.

Gesucht: $\tilde{x}$ Nullstelle von f in $[a,b]$.

<u>Näherungsverfahren zur Bestimmung von $\tilde{x}$</u>

Wähle Startwert (Anfangsnäherung) $x_0 \in [a,b]$. Die Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ (Linearisierung der Funktion f) ist gegeben durch

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

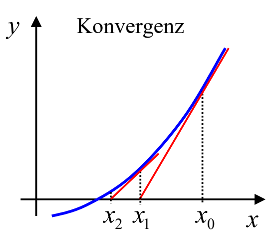
Bestimme x_1 als Nullstelle von $T(x)$, also (nächste Näherung)

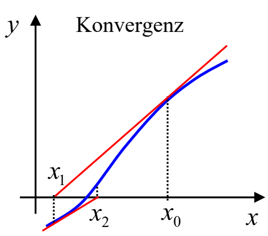
$$T(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

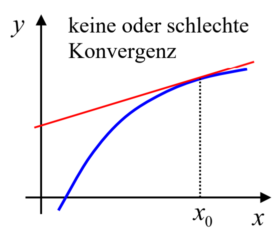
<u>Allgemein für $n \in \mathbb{N}_0$</u>

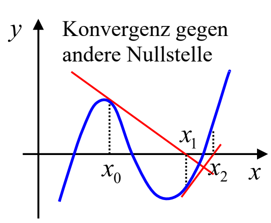
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für} \quad f'(x) \neq 0$$

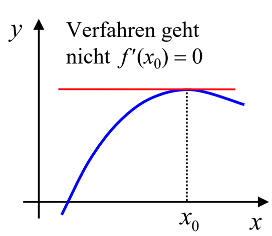
<u>*Beispiele für Konvergenz und Divergenz*</u>











Satz 4-9: (*Konvergenzkriterium für das Newton-Verfahren*)
Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ zweimal stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x)\neq 0$ für alle $x\in[a,b]$. Für einen Startwert x_0 seien

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\in[a,b]$$

für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Ferner sei

$$K=\max_{x\in[a,b]}\left|\frac{f(x)f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right|<1.$$

Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ gegen die einzige Nullstelle $\tilde{x}\in[a,b]$ von f und es gelten die Fehlerabschätzungen

$$\left|x_n-\tilde{x}\right|\leq\frac{K}{1-K}\left|x_n-x_{n-1}\right| \quad \text{bzw.} \quad \left|x_n-\tilde{x}\right|\leq\frac{\left|f(x_n)\right|}{\min\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x_n)\right|}.$$

Beweis:
Bis auf die letzte Fehlerabschätzung folgen alle Aussagen unmittelbar aus dem Fixpunktsatz. Die letzte Fehlerabschätzung ergibt sich unmittelbar aus dem Mittelwertsatz wie folgt:

$$0=f\left(\tilde{x}\right)=f(x_n)+f'(\xi_n)(\tilde{x}-x_n) \;\Rightarrow\; \left|x_n-\tilde{x}\right|=\left|\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}\right|\leq\frac{\left|f(x_n)\right|}{\min\limits_{x\in[a,b]}\left|f'(x)\right|}$$

Beispiel:
Gegeben: $f(x)=x^2-a,\quad a>0$
Gesucht: positive Nullstelle $\tilde{x}=\sqrt{a}$

Für $f(x)=x^2-a$ liefert das Newton-Verfahren mit

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x^2-a}{2x}=\frac{2x^2-x^2+a}{2x}=\frac{x^2+a}{2x}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$$

die Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2.$$

Es sei $x_0 > \sqrt{a}$.

$$g'(x) = (1 - a/x^2)/2 \;\Rightarrow\; 0 \le g'(x) \le \frac{1}{2} = L < 1 \quad \forall x \in [\sqrt{a}, x_0]$$

g ist monoton wachsend in $[\sqrt{a}, x_0]$.

$$\sqrt{a} = g(\sqrt{a}) \le g(x) \le g(x_0) \le x_0 \quad \forall x \in [\sqrt{a}, x_0]$$

Somit sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt und es gilt

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \sqrt{a}$$

mit der Fehlerabschätzung

$$\left|x_n - \sqrt{a}\right| \le \frac{1/2}{1 - 1/2}\left|x_n - x_{n-1}\right| = \left|x_n - x_{n-1}\right|.$$

Für $a = 2$, also $\tilde{x} = \sqrt{2}$ erhält man mit dem Startwert $x_0 = 1{,}5$ die Iterationsfolge

$$x_1 = 1{,}41666666666666\ldots$$
$$x_2 = 1{,}41421568627451\ldots$$
$$x_3 = 1{,}41421356237469\ldots$$
$$x_4 = 1{,}41421356237309\ldots$$

Fehlerabschätzung für x_4 liefert

$$\left|x_4 - \tilde{x}\right| \le \left|x_4 - x_3\right| \le 1{,}6 \cdot 10^{-12}.$$

4.2.3 Berechnungen von Grenzwerten, Regel von de l'Hospital

Vorbereitend wird der erweiterte Mittelwertsatz gezeigt.

Satz 4-10: (*Erweiterter Mittelwertsatz*)
Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Beweis:
Es ist $g(b) \neq g(a)$, da $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) (Mittelwertsatz). Ferner sei

$$F(x) := \big(f(x)-f(a)\big) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big) \;\Rightarrow\; F(a) = F(b) = 0$$

$\Rightarrow\; \exists \xi \in (a,b)$ mit $F'(\xi) = 0$ (Satz von Rolle).

Da $F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) = 0 \;\Rightarrow$ Behauptung.

Zunächst werden Grenzprozesse der Form

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ mit } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty,$$

d.h. der Form "0/0" und "∞/∞", betrachtet.

Satz 4-11: (*Regeln von de l'Hospital*)
Es sei $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Ferner seien f und g zwei auf (a, x_0) bzw. (x_0, a) stetig differenzierbare Funktionen mit $a \in \mathbb{R}$. Gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{mit} \quad L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

und

$$\left.\begin{Bmatrix} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \\ \text{oder} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty \end{Bmatrix}\right. \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Beweis:

Hier wird der Satz für $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ bewiesen. Der Beweis für $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ verläuft ähnlich.

a) $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ und g sind in x_0 stetig ergänzbar mit

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \text{ und } g(x_0) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$$

nach dem erweiterten Mittelwertsatz existiert ein $\xi \in (x, x_0)$ oder $\xi \in (x_0, x)$ mit

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L$$

b) $x_0 = \pm\infty$, Substitution $x = 1/y$ und Anwenden von a) liefert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0} \frac{df(1/y)/dy}{dg(1/y)/dy} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{(-1/y^2)f'(1/y)}{(-1/y^2)g'(1/y)} = \lim_{y\to 0} \frac{f'(1/y)}{g'(1/y)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Beispiel:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = 1$ ("0/0")

2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$ (jeweils "0/0")

3) Es sei $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{\alpha\, x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\alpha\, x^\alpha} = 0 \qquad (\text{"}\infty/\infty\text{"})$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x} \neq \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$ existiert nicht

Hier besser durch den Ausdruck, der am schnellsten gegen ∞ strebt, kürzen (also x)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x/x}{1+\cos x/x} = 1, \text{ da } \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x} = 0 \text{ denn } |\cos x| \le 1$$

5) $$\lim_{x\to\pi-}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = \lim_{x\to\pi-}\frac{\cos x}{-\sin x\big/\left(2\sqrt{1+\cos x}\right)} = \lim_{x\to\pi-}\frac{-2\cos x\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$$

$$= -2\lim_{x\to\pi-}\cos x \lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} = 2\lim_{x\to\pi-}\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x} \qquad (\text{jeweils "}0/0\text{"})$$

Regel von de l'Hospital führt wieder auf den gleichen Ausdruck und damit nicht weiter. Hier besser vorher quadrieren

$$\lim_{x\to\pi-}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi-}\frac{2\sin x\cos x}{-\sin x} = -2\lim_{x\to\pi-}\cos x = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\pi-}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = \sqrt{2} \text{ bzw. } \lim_{x\to\pi+}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos x}} = -\sqrt{2}$$

6) Aufspalten in Produkte endlicher Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan^2 x\,\ln(1+x^2)}{x(\sin x - x)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\right)^2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x - x}\right)$$

$$= 1^2\cdot 1\cdot(-6) = -6$$

denn

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x^2)}{1} = 1 \qquad (\text{"}0/0\text{"})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{1/(1+u)}{1}=1 \qquad ("0/0")$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin x - x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos x - 1}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{-\cos x}=\frac{6}{-1}=-6 \qquad (\text{jeweils}\ "0/0")$$

Jetzt werden Grenzprozesse der Form "$0\cdot\infty$", "$\infty-\infty$", "0^0", "∞^0", "1^∞" betrachtet und auf die Fälle "0/0" und "∞/∞" zurückgeführt.

a) Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$ oder umgekehrt

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{1/f(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{also "0/0" bzw. "}\infty/\infty\text{"}$$

b) Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to x_0}\frac{1/g(x)-1/f(x)}{1/g(x)\cdot 1/f(x)} \quad \text{also "0/0"}$$

c) $$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0} e^{\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}}=\lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln\left(f(x)\right)}=e^{\lim_{x\to x_0} g(x)\ln\left(f(x)\right)}$$

also muss der Grenzwert des Exponenten d.h. $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln(f(x))$ berechnet werden.

Beispiel:

1) $$\lim_{x\to 0+} x^x=\lim_{x\to 0+} e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0+} x\ln x}=e^0=1, \text{ denn}$$

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0$$

2) Es sei $\alpha > 0$

$$\lim_{x\to 0+} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x^\alpha}{\alpha} = 0$$

3) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x - 1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

4) $$\lim_{x\to\infty}(1+\alpha/x)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(1+\alpha/x)} = e^\alpha, \text{ denn}$$

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(1+\alpha/x) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\alpha/x)}{1/x} = \lim_{u\to 0}\frac{\ln(1+\alpha u)}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{\alpha}{1+\alpha u} = \alpha$$

4.2.4 Kurvendiskussion

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar auf (a,b), so erhält man mit Hilfe der Nullstellen von f' und f'' Aussagen über Extrema und Wendepunkte von f.

Bereits bekannt sind die Aussagen

a) notwendige Bedingung für relatives Extremum in x_0

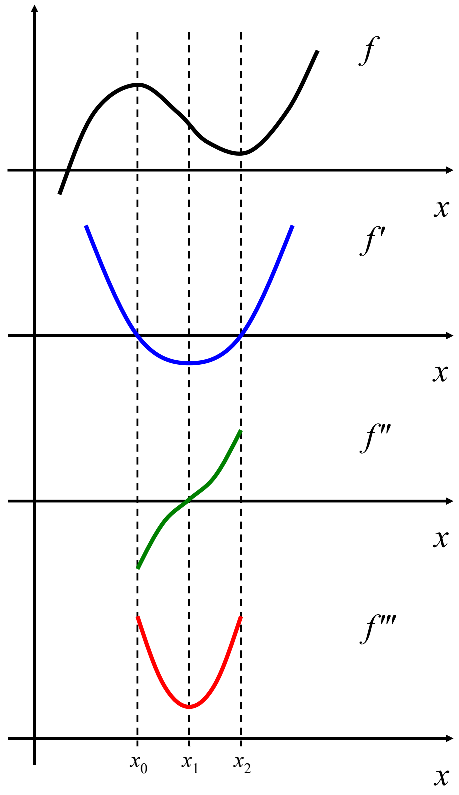
$$f'(x_0) = 0$$

b) Monotonie

$f'(x) > 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ streng monoton wachsend

$f'(x) < 0$ auf (a,b) $\Rightarrow$ streng monoton fallend

Beispiel:



x_0: relatives Maximum

$f'(x_0) = 0$

$f''(x_0) < 0$

f' hat Vorzeichenwechsel bei x_0 von + nach –

x_2: relatives Minimum

$f'(x_2) = 0$

$f''(x_2) > 0$

f' hat Vorzeichenwechsel bei x_2 von – nach +

x_1: Wendepunkt

$f''(x_1) = 0$

$f'''(x_1) \neq 0$

f'' hat Vorzeichenwechsel bei x_1

Satz 4-12: (*hinreichende Kriterien für relative Extrema*)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf (a,b) n-mal stetig differenzierbar.

a) Gilt für ein $x_0 \in (a,b)$

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

und ist

n gerade $\Rightarrow$ f hat in x_0 relatives Maximum falls $f^{(n)}(x_0) < 0$

f hat in x_0 relatives Minimum falls $f^{(n)}(x_0) > 0$

n ungerade $\Rightarrow$ f hat in x_0 kein Extremum

b) Gilt für ein $x_0 \in (a,b)$

$f'(x_0) = 0$ und hat f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von

$+$ nach $-$ $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein relatives Maximum

$-$ nach $+$ $\Rightarrow$ f hat in x_0 ein relatives Minimum

Beispiel:

1) $f(x) = x^4 \quad \text{mit} \quad f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 24 \neq 0$

$\Rightarrow f$ hat in $x_0 = 0$ ein relatives Minimum

oder

$f'(x) = 4x^3$ hat Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0$ von – nach +

$\Rightarrow f$ hat in $x_0 = 0$ ein relatives Minimum

2) $f(x) = x^3 \quad \text{mit} \quad f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 6 \neq 0$

$\Rightarrow f$ hat in $x_0 = 0$ kein Extremum

oder

$f'(x) = 3x^2$ hat keinen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0$

$\Rightarrow f$ hat in $x_0 = 0$ kein Extremum

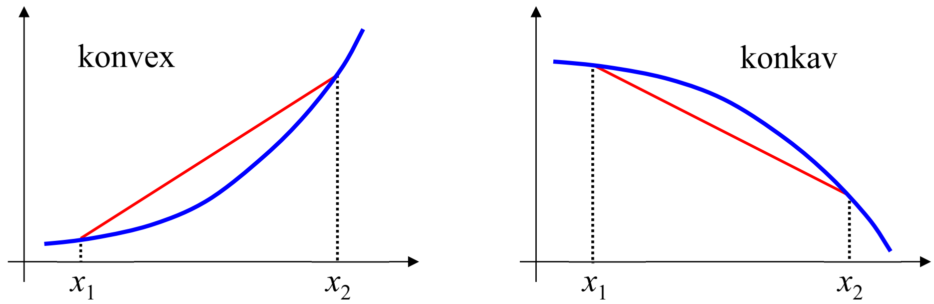
Definition 4-5:

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$. f heißt konvex (bzw. konkav) auf I genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt

$$f(x) \leq \underbrace{f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}_{\text{Sekante}} \qquad \forall x \in I \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

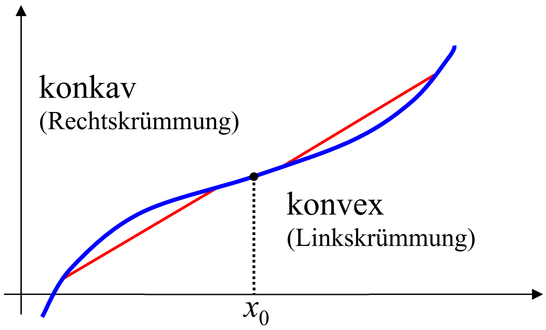
$$\left(\text{bzw.} \quad f(x) \geq f(x_1)\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\right)$$

D.h. für je zwei Punkte $x_1 < x_2$ aus I verläuft der Graph von f zwischen x_1 und x_2 unterhalb (bzw. oberhalb) der Sekante zwischen den Punkten $P_1 = \left(x_1, f(x_1)\right)$ und $P_2 = \left(x_2, f(x_2)\right)$.



Definition 4-6:

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in (a,b)$. An der Stelle x_0 besitzt f einen Wendepunkt genau dann, wenn der Graph dort zwischen konvexem und konkavem Verhalten wechselt.



Satz 4-13:

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 2mal differenzierbar auf (a,b). Gilt $f''(x) \geq 0$ bzw. $f''(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f konvex bzw. konkav auf $[a,b]$.

Beweis:

Sei $f''(x) \geq 0$ für all $x \in (a,b)$ $\Rightarrow$ f' ist monoton wachsend, d.h. für $\xi < \eta$ ist $f'(\xi) \leq f'(\eta)$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = f'(\xi), \quad \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = f'(\eta) \text{ mit } x_1 < \xi < x < \eta < x_2$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \Rightarrow f(x) \leq f(x_1)\frac{x_2-x}{x_2-x_1} + f(x_2)\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

für alle $x \in I$ mit $x_1 \leq x \leq x_2$. (Der Beweis für $f''(x) \leq 0$ verläuft analog)

Anmerkung:

f konvex auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ $-f$ konkav auf $[a,b]$.

Satz 4-14:

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 3mal differenzierbar auf (a,b). Gilt $f''(x) = 0$ und $\{f''(x)$ hat Vorzeichenwechsel bei x_0 oder $f'''(x) \neq 0\}$ $\Rightarrow f$ hat in x_0 einen Wendepunkt.

Beweis:

$f''(x_0) = 0$ und f'' hat Vorzeichenwechsel bei x_0 $\Rightarrow$ Wechsel zwischen konvex und konkav $\Rightarrow f$ hat in x_0 einen Wendepunkt.

$f''(x_0) = 0$ und $f''' \neq 0$ $\Rightarrow$ f'' hat einfache Nullstelle bei x_0 $\Rightarrow$ f'' hat Vorzeichenwechsel bei x_0 usw.

Beispiel:

1) $f(x) = x^4,\ f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2 \ \Rightarrow\ f''(0) = 0$

   $f''(x)$ hat keinen Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0$

   $\Rightarrow\ f(x) = x^4$ hat keinen Wendepunkt bei $x_0 = 0$

2) $\Rightarrow\ f(x) = x^4$ hat keinen Wendepunkt bei $x_0 = 0$

   $f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f'''(x) = 6$

   $\Rightarrow\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 6 \neq 0$

   oder $f''(x)$ hat Vorzeichenwechsel bei $x_0 = 0$

   $\Rightarrow\ f(x) = x^3$ hat einen Wendepunkt bei $x_0 = 0$

Definition 4-7:

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar auf (a,b) und $x_0 \in (a,b)$. f hat in x_0 eine Nullstelle der Ordnung n (n-fache Nullstelle) genau dann, wenn

$$f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Beispiel:

1) $f(x) = (x-1)^3(x+4)^2$ hat in $x_0 = 1$ eine dreifache Nullstelle und in $x_1 =$ –4 eine 2fache Nullstelle, denn für Polynome gilt $p(x) = (x - x_0)^r q(x)$ mit $q(x_0) \neq 0 \Leftrightarrow p$ hat in x_0 eine r-fache Nullstelle

$$g(x) = (x-1)^3,\ \ h(x) = (x+4)^2$$
$$f'(x_0) = g'(x_0)\,h(x_0) + g(x_0)\,h'(x_0)$$
$$f''(x_0) = g''(x_0)\,h(x_0) + 2g'(x_0)\,h'(x_0) + g(x_0)\,h''(x_0)$$
$$f'''(x_0) = g'''(x_0)\,h(x_0) + 3\,g''(x_0)\,h'(x_0) + 3\,g'(x_0)\,h''(x_0) + g(x_0)\,h'''(x_0)$$

2) $f(x) = \sin x$ hat in $x_k = k\pi$ einfache Nullstellen, denn $\sin(k\pi) = 0,\ \sin'(k\pi) = \cos(k\pi) \neq 0$

Definition 4-8:

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$. f heißt gerade Funktion $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)\ \ \forall x \in I$. f heißt ungerade Funktion $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)\ \ \forall x \in I$.

Definition 4-9:

a) Die Gerade g mit $g(x) = ax + b$ heißt Asymptote von f für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$, wenn

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - g(x)\big) = 0$$

b) Die Gerade $x = x_0$ heißt Asymptote von f in x_0, wenn f in x_0 mindestens einen einseitigen unendlichen Grenzwert besitzt.

Satz 4-15:

f besitzt für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ genau dann eine Asymptote g mit $g(x) = ax + b$, wenn

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/x = a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - ax\big) = b$$

bzw.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = a \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x) - ax\big) = b$$

Anmerkung:

Bei gebrochenrationalen Funktionen erhält man die Asymptote einfach durch Polynomdivision.

Beispiel:

$$f(x) = (x^2+3)/(x-1) \quad x^2+3 : x-1 = x+1+4/(x-1)$$

$$\begin{array}{r} \underline{x^2 - x} \\ x+3 \\ \underline{x-1} \\ 4 \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = x+1+4/(x-1) \Rightarrow g(x) = x+1$ ist Asymptote für $x \to \pm\infty$,

da $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\big(x+1+4/(x-1)-(x+1)\big) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} 4/(x-1) = 0$

Schritte einer Kurvendiskussion

1) Definitionsbereich
2) Nullstellen
3) Grenzverhalten
4) Asymptoten

5) Extremalstellen
6) Monotoniebereiche
7) Konvexitätsbereiche
8) Wendepunkte
9) Skizze des Graphen

Beispiel:

1) $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$

Definitionsbereich:

$D(f) = \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $x_0 = 1$ ist Singularität / einfacher Pol (Pol 1. Ordnung bzw. Pol der Ordnung 1), da einfache Nullstelle des Nenners.

Nullstellen:

$x^2+3=0 \Rightarrow x^2=-3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm j\sqrt{3} \Rightarrow$ keine reellen Nullstellen

Grenzverhalten:

$$f(x)=\frac{x^2}{x}\,\frac{1+3/x^2}{1-1/x}=x\,\frac{1+3/x^2}{1-1/x}\ \Rightarrow\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$x^2+3>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ (einfacher Pol $\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel)

$$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x^2+3}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x^2+3}{x-1}=+\infty$$

Asymptoten:

In $x_0=1$ senkrechte Asymptote und $g(x)=x+1$ für $x\to\pm\infty$ (vgl. Polynomdivision des vorangegangenen Beispiels)

Extremalstellen:

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2+3)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)=0$ für $x=x_1=-1$ und $x=x_2=3$

a) f' hat Vorzeichenwechsel bei $x_1=-1$ von + nach – und bei $x_2=3$ von – nach + $\Rightarrow$ relatives Maximum bei $x_1=-1$ und relatives Minimum bei $x_2=3$.

b) $$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$$

$$=\frac{2(x^2-2x+1)-2(x^2-2x-3)}{(x-1)^3}=\frac{8}{(x-1)^3}$$

$f''(-1)=-1<0\ \Rightarrow f$ hat ein relatives Maximum bei $x_1=-1$ mit $f(-1)=-2$

$f''(3)=1>0\ \Rightarrow f$ hat ein relatives Minimum bei $x_2=3$ mit $f(3)=6$

Monotoniebereiche:

$f'(x) > 0$ für $x > 3$ und $x < -1$

$\Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf $(-\infty, -1)$ und $(3, \infty)$

$f'(x) < 0$ für $-1 > x > 1$ und $1 < x < 3$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf $(-1, 1)$ und $(1, 3)$

Konvexität:

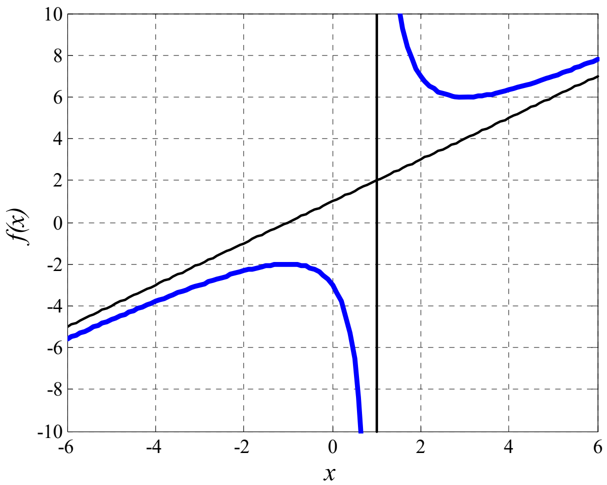
$f''(x) > 0$ für $x > 1 \Rightarrow f$ ist konvex auf $(1, \infty)$

$f''(x) < 0$ für $x < 1 \Rightarrow f$ ist konkav auf $(-\infty, 1)$

Wendepunkte:

$f''(x) \neq 0$ für alle $x \in D(f) \Rightarrow$ keine Wendepunkte

Skizze des Graphen:



2) $f(x) = x\,e^{1/x}$

Definitionsbereich:

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen:

keine

Grenzverhalten:

$$\lim_{x\to 0+} x\,e^{1/x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{e^u}{1} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0-} x\,e^{1/x} = 0, \text{ da } \lim_{u\to -\infty} e^u = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x\,e^{1/x} = \infty,$$

$$\lim_{x\to -\infty} x\,e^{1/x} = -\infty$$

Asymptoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\,e^{1/x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1 = a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (xe^{1/x} - ax) = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u}{1} = 1 = b$$

Asymptote von f für $x \to \pm\infty$ ist $g(x) = x + 1$ und senkrechte Asymptote bei $x = 0$, da einseitiger unendlicher Grenzwert für $x \to 0+$.

Extremalstellen:

$$f'(x) = e^{1/x} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{1/x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{1/x}$$

$f'(x) = 0 \quad$ für $x = x_1 = 1$

f' hat Vorzeichenwechsel bei $x_1 = 1$ von – nach +

$\Rightarrow$ relatives Minimum bei $x_1 = 1$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{1/x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{1/x} = \frac{1}{x^3} e^{1/x}$$

$f''(1) = e > 0$ f hat ein relatives Minimum bei $x_1 = 1$ mit $f(1) = e$

Monotoniebereiche:

$f'(x) > 0$ für $x > 1$ und $x < 0$

$\Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf $(-\infty, 0)$ und $(1, \infty)$

$f'(x) < 0$ für $0 < x < 1$

$\Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf $(0, 1)$

Konvexität:

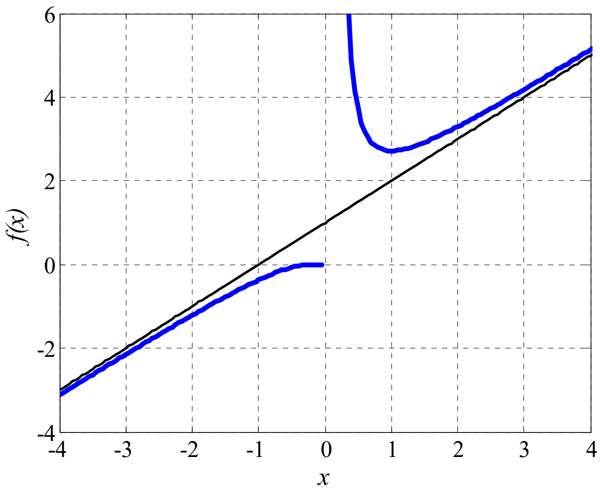
$f''(x) > 0$ für $x > 0 \Rightarrow f$ ist konvex auf $(0, \infty)$

$f''(x) < 0$ für $x < 0 \Rightarrow f$ ist konkav auf $(-\infty, 0)$

Wendepunkte:

$f''(x) \neq 0$ für alle $x \in D(f) \Rightarrow$ keine Wendepunkte

Skizze des Graphen:



Aufgabe 4-1: Bestimmen Sie durch Grenzübergang die Ableitung von

a) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ an der Stelle $x=5$.

b) $f(x)=x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4-2: Bestimmen Sie die Ableitung von

a) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sin^3(1-x)}$

c) $f(x)=\cos^2\left(\arctan\left(e^x\right)\right)$

d) $f(x)=\arctan\left(x^x\right)+\left(\arctan x\right)^x$

e) $f(x)=\ln\left(\sin x\right)+\dfrac{1}{2}\cot^2 x$

f) $f(x)=x^{x\cos x} \quad (x>0)$

g) $f(x)=\ln\left(x\cos x\right)$

h) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Aufgabe 4-3: Zeigen Sie mittels Induktion

$$\frac{d}{dx}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dx}\left(f_i(x)\right)\cdot \prod_{j=1,\, j\neq i}^{n} f_j(x)\right).$$

Aufgabe 4-4: Lösen Sie näherungsweise die folgenden Gleichungen

a) $\sinh x = x^3 - x \quad$ für $\quad x\in[1,2]$

b) $x\tan x = 1 \quad$ für $\quad x\in[0.7, 1.1]$.

c) $x^2=\cos x \quad$ für $\quad x\in[0.5, 1]$.

Begründen Sie Ihre Vorgehensweise und geben Sie eine Fehlerabschätzung für die Näherungslösung an.

Aufgabe 4-5: Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktionen

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\tan 3x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\tan x-\frac{1}{\cos x}\right)$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\ln(x)\ln(1-x)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

Aufgabe 4-6: Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, relative und absolute Extremwerte, Wendepunkte sowie das asymptotische Verhalten und skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 4}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^2$

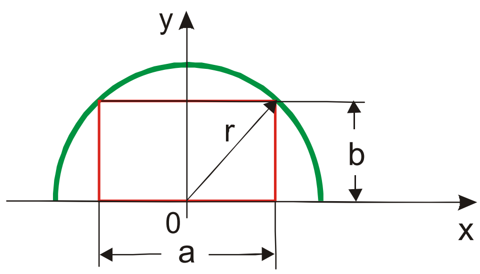
c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Aufgabe 4-7: Extremwertaufgaben

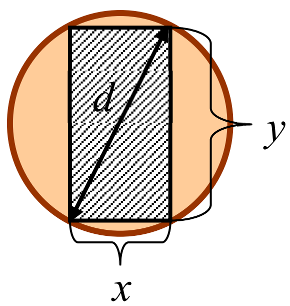
a) Unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang l ist dasjenige mit maximalem Flächeninhalt zu bestimmen.

b) Welche Abmessungen muss ein Zylinder mit dem Volumen V_z besitzen, wenn seine Oberfläche O_z minimal sein soll?

c) Einem Halbkreis soll ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden, vgl. Abb. Berechnen Sie die Abmessungen des Rechtecks und geben Sie den Flächeninhalt des Rechtecks relativ zum Flächeninhalt des Halbkreises in Prozent an.



d) Aus einem kreisförmigen Baumstamm mit dem Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt herausgeschnitten werden, der maximale Tragfähigkeit besitzt. Die Tragfähigkeit eines Balkens sei durch $T = c\,x\,y^2$ gegeben, wobei x die Breite, y die Höhe und $c > 0$ die Materialkonstante des Balkens angibt. Wie müssen x und y gewählt werden, um maximale Tragfähigkeit zu erreichen?



e) Ein Körper mit der Masse m soll auf einer horizontalen Unterlage mit dem Reibungskoeffizienten $\mu = 0{,}2$ von der Zugkraft F gleichförmig fortbewegt werden. Wie groß muss der Winkel α zwischen F und der Horizontalen gewählt werden, damit F minimal wird?