Abgabe: KW 45

Aufgabe 1-1:
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq 0$, $b \geq 0$. Beweisen Sie

a) $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

b) $\left|\sqrt{a} - \sqrt{b}\right| \leq \sqrt{|a-b|}$

Aufgabe 1-2:
Beweisen Sie durch vollständige Induktion

a) $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) $\sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k} > \sqrt{n} \quad \forall n \geq n_0,\ n_0 = ?$

c) $2^n < n!, \quad \forall n \geq n_0,\ n_0 = ?$

d) $2^n > n^2, \quad \forall n \geq n_0,\ n_0 = ?$

Aufgabe 1-3:
Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $3x \leq x^2 - 4 \leq 26 - x$

b) $\frac{x+2}{x-1} \leq \frac{x-3}{x+1}$ und $x \neq \pm 1$

Aufgabe 1-4:
Untersuchen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $0 \leq \frac{x - |x-4|}{x-1} \leq x - 3$ und $x \neq 1$

b) $|x-1| \frac{x^2 + x - 4}{x} \leq x - 1$ und $x \neq 0$

Abgabe: KW 46

Aufgabe 1-5:
Schreiben Sie folgende komplexe Zahlen in der Form $z = x + jy$

a) $z = \exp\left(-j\frac{7\pi}{2}\right)$ b) $z = \exp(2 - j6\pi)$ c) $z = \exp\left(3 + j\frac{\pi}{3}\right)$

Aufgabe 1-6:
Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der exponentiellen Form dar.

a) $z = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $z = \frac{1+j2}{2-j}$ c) $z = \frac{(1-j)^2}{1+j}$

Aufgabe 1-7:
Bestimmen Sie Real- Imaginärteil, Betrag und Argument von

a) $z = \frac{2+j3}{1-j2} + \frac{(1+j2)^2}{2+j}$ b) $z = \left(1 + j\sqrt{3}\right)^{12}$

Aufgabe 1-8:
Ermitteln Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen (mit Skizze)

a) $z^3 = j8$ b) $z^4 = \frac{1}{2}\left(1 + j\sqrt{3}\right)$

Aufgabe 1-9:
In welchen Bereichen der Gaußschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen z, für die die folgenden Beziehungen erfüllt sind.

a) $|z + j| \geq \sqrt{2}|z - j|$ b) $0 < \operatorname{Re}\left(z^2\right) < 1$ c) $0 < \arg\left(z^2\right) < \frac{\pi}{2}$

Abgabe: KW 47

Aufgabe 1-10:

Gegeben seien $\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\vec{b} = -3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{c} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Schreiben Sie die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$ als Spaltenvektoren und berechnen Sie deren Betrag.

Aufgabe 1-11:

Bestimmen sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$, $\quad \vec{b} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2$

b) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\quad \vec{b} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$

c) $\vec{a} = 4\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $\quad \vec{b} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$

Aufgabe 1-12:

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

a) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$

c) $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{b}\times\vec{c}$, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

d) $(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}+\vec{c})$, $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

e) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

f) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ Spatprodukt

Aufgabe 1-13:

Ermitteln Sie für

a) $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3$ die Richtungswinkel $\measuredangle(\vec{e}_i,\vec{a}), i = 1,2,3$

b) $\vec{a} = 5\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$, $|\vec{a}| = 7$ die Koordinate x_2 und die Richtungswinkel $\measuredangle(\vec{e}_i,\vec{a}), i = 1,2,3$

c) $\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, $|\vec{a}| = 4$, $\measuredangle(\vec{e}_1,\vec{a}) = 5\pi/18$, $\measuredangle(\vec{e}_2,\vec{a}) = \pi/3$, $\pi/2 < \measuredangle(\vec{e}_3,\vec{a}) < \pi$ den Richtungswinkel $\measuredangle(\vec{e}_3,\vec{a})$ und die Koordinaten x_1, x_2 und x_3.

Abgabe: KW 48

Aufgabe 1-14:

Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$, $\vec{b} = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{c} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$

a) die orthogonale Zerlegung von $\vec{a}$ längs $\vec{b}$ und $\vec{a}$ längs $\vec{c}$.

b) die Ausdrücke $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$ und $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Aufgabe 1-15:

Für welches ξ werden die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ \xi \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

linear abhängig? Bestimmen Sie für diesen Fall $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ so, dass $\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c} = 0$ gilt.

Aufgabe 1-16:

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$, $\vec{b} = 2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{c} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3$ linear unabhängig sind und stellen Sie den Vektor $\vec{d} = -\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 - 6\vec{e}_3$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

Aufgabe 1-17:

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie – falls möglich – $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$, $\mathbf{A}^T\mathbf{C}$, $\mathbf{BA}$, $\mathbf{ABD}$, $\mathbf{A}^T + 3\mathbf{C}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, $\mathbf{D}^T\mathbf{D}^T$, $\mathbf{DD}^T$.

Abgabe: KW 49

Aufgabe 1-18:
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungssysteme

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -23 \end{pmatrix}$$ und

c) $$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 8 & -1 \\ -10 & 5 & 25 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie jeweils den Rang der Koeffizientenmatrix und der erweiterten Matrix an.

Aufgabe 1-19: Es sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$, $\det(6\mathbf{A}^T)$, $\det(\mathbf{A}^6)$ und $\operatorname{rang}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})$.

Aufgabe 1-20: Gegeben sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(n-1) & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(\mathbf{A})$.

Abgabe: KW 50

Aufgabe 1-21:
Berechnen Sie die Inverse der Matrix von

a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

b) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -5 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Cramer-Regel.

Aufgabe 1-22: Bestimmen Sie die Eigenwerte von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie ein maximales System linear unabhängiger Eigenvektoren (Orthonormalsystem).

Aufgabe 1-23: Bestimmen Sie für die symmetrische Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\beta-3 \\ 0 & 2\beta-3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\beta \in \mathbb{R}$ so, dass a) $\mathbf{A}$ positiv definit, b) $\mathbf{A}$ positiv semidefinit, c) $\mathbf{A}$ negativ definit, d) $\mathbf{A}$ negative semidefinit bzw. e) $\mathbf{A}$ indefinit wird.

Aufgabe 1-24: Bestimmen Sie für die quadratische Form

$$q(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2\beta x_2 x_3 = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

$\beta \in \mathbb{R}$ so, dass a) $q(\mathbf{x})$ positiv definit, b) $q(\mathbf{x})$ positiv semidefinit, c) $q(\mathbf{x})$ negativ definit, d) $q(\mathbf{x})$ negative semidefinit bzw. e) $q(\mathbf{x})$ indefinit wird.

Abgabe: KW 51

Aufgabe 1-25:

Berechnen Sie mithilfe des Horner-Schemas die Werte von $f(x)$ an den angegebenen Stellen und bestimmen Sie die Zerlegung von $f(x)$ in reelle Elementarfaktoren.

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 14x - 5$, $x = 5$

b) $f(x) = x^4 - 19x^2 - 6x + 72$, $x = -3$

c) $f(x) = 2x^5 - 6x^3 - 20x^2 - 8x + 80$, $x = 2$, $x_1 = -2$

Aufgabe 1-26:

Ermitteln Sie von den gebrochenrationalen Funktionen $f(x)$ die Nullstellen und Polstellen. Geben Sie die Asymptoten an und skizzieren Sie den Graphen $f(x)$ und die Asymptoten.

a) $f(x) = \dfrac{x^3(x+4)}{(x-2)^2(x-4)}$

b) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2(x^3 - 7x^2 + 6x)}{(x-1)(x-3)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^4(x+4)}{(x-2)^2(x^2-16)}$

Aufgabe 1-27:

Geben Sie die Zerlegung in reelle Partialbrüche an für

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 1}{x(x^2-1)}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 23x - 42}{(x-1)^3(x^2-4)}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^4 - x^3 + 8x^2 - 3x + 3}{(x-1)(x^2+2)^2}$

Abgabe: KW 2

Aufgabe 1-28:
Drücken Sie mit Hilfe der Eulerschen Identität

a) $\cos^6 x$ und $\sin^7 x$ durch $\sin kx$ und $\cos kx$, $k \in \mathbb{N}_0$

b) $\sin 6x$ und $\cos 7x$ durch $\sin^k x$ und $\cos^k x$, $k \in \mathbb{N}$

aus.

Aufgabe 1-29:
Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten.

a) $\arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$

b) $\arctan x = \operatorname{arccot} \dfrac{1}{x}$

c) $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$

d) $\operatorname{arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $\qquad x \geq 1$

e) $\operatorname{arcoth} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\qquad |x| > 1$

Aufgabe 1-30:
Zeigen Sie mit der Grenzwertdefinition (ε, N_ε - Definition)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{q}{1-q}$, wenn $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$ mit $0 \leq q < 1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Abgabe: KW 3

Aufgabe 1-31:
Untersuchen Sie die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwert.

a) $a_n = \sqrt{n}\left(n - \sqrt{n^2 + \sqrt{n}}\right)$

b) $a_n = \dfrac{3n^3 - 2n^2 + 2n + 4}{4n^4 + n^2 - n}$

c) $a_n = \dfrac{\sqrt{9n^2+3} - \sqrt{n^2+5}}{2n+7}\cos\left(\dfrac{2n+1}{\sqrt{n^2+5n}}\dfrac{\pi}{2}\right)$

e) $a_n = \dfrac{\sqrt[2n]{n} + \sqrt[n-1]{5}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n} + 0{,}999^{n-1}}$

f) $a_n = \dfrac{(2n-1)^2}{\sqrt{n^4+3n+5}}$

Aufgabe 1-32:
Zeigen Sie

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\frac{3}{2} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{3^k} < 3$

c) $\displaystyle 2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k!} < 3$

Aufgabe 1-33:

a) Zeigen Sie mit Hilfe der (ε,δ) – Definition $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(1/x) = 0$.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Grenzwertsätze $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x-4}{\sqrt{x^3+5}}$

c) Untersuchen Sie, ob die Funktion $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ im Punkt $x=2$ stetig ergänzbar ist.

Abgabe: KW 4

Aufgabe 1-34:
Bestimmen Sie durch Grenzübergang die Ableitung von

a) $f(x)=\dfrac{3+x}{3-x}$ an der Stelle $x=2$.

b) $f(x)=\sqrt{x} \quad \forall x \geq 0$.

Aufgabe 1-35:
Bestimmen Sie die Ableitung von

a) $f(x)=x \cdot \sin x \cdot e^{2x}$

b) $f(x)=x\exp\left(-(\ln x)^{1/3}\right) \qquad (x>1)$

c) $f(x)=\sqrt{x+a}\; x^2 e^x \ln x$

d) $f(x)=\exp\left(\sin\sqrt{x^2+1}\right)$

e) $f(x)=x^{1/x} \qquad (x>0)$

f) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^{\tan x} \qquad \left(0<x<\pi/2\right)$

Aufgabe 1-36:
Zeigen Sie mittels Induktion

$$\left(f(x)g(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)\,.$$

Abgabe: KW 5

Aufgabe 1-37:

Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktionen

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 4^{-x} + x^2}{x - \ln(x^2+1)}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x\sqrt{x}}{e^x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 0+} (\sin x)^x$

Aufgabe 1-38:

Bestimmen Sie Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, relative und absolute Extremwerte, Wendepunkte sowie das asymptotische Verhalten und skizzieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen.

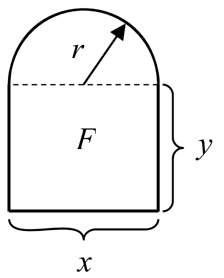
a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

b) $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

Aufgabe 1-39:

a) Es sei ein rechtwinkliges Dreieck gegeben. Die Summe der Seitenlängen ist 1m. Wie Lang sind die einzelnen Seiten, wenn die Fläche des Dreiecks maximal werden soll?

b) Der Querschnitt eines Tunnels bestehe aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Wie müssen die Abmessungen gewählt werden, damit bei fest vorgegebenem Umfang $U = \text{const.} = c$ die Querschnittsfläche des Tunnels F maximal wird?



c) Einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist ein achsenparalleles Rechteck mit maximalem Flächeninhalt F einzubeschreiben (s. Zeichnung). Bestimmen Sie Breite x, Höhe y und Fläche F des Rechtecks.