Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 2

Kapitel 5

Integralrechnung

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 2

Kapitel 5

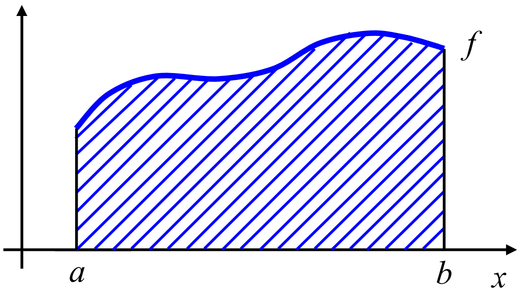
Inhaltsverzeichnis

5 Integralrechnung

5.1 Grundlagen

5.1.1 Obersumme / Untersumme

Gegeben sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit $f(x)\geq 0$ für alle $x\in[a,b]$.



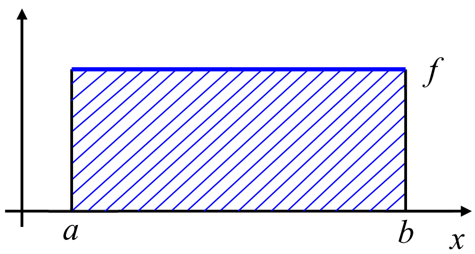
Gesucht ist der "Flächeninhalt" zwischen der x-Achse, dem Graphen von f sowie den Geraden $x=a$ und $x=b$.

Es stellt sich nun die Frage: Was ist überhaupt der Flächeninhalt?

Der Flächeninhalt sei so definiert, dass beim Rechteck gilt:

$$\mathit{Flächeninhalt} = \mathit{Produkt\ der\ Seitenlängen}.$$

Ist also f konstant,



so soll für den Flächeninhalt gelten:

$$I = f(a)(b-a).$$

Definition 5-1:

Gegeben sei ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

$$Z := \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

heißt Zerlegung von $[a,b]$, wenn $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \quad \text{mit } 1 \le k \le n$$

heißt k-tes Teilintervall,

$$\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$$

Länge von I_k und

$$|Z| := \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} \{\Delta x_k\}$$

Betrag von Z.

Im folgenden werden nur Funktionen $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ betrachtet, die auf $[a,b]$ beschränkt sind, d.h.

$$\exists K > 0 \text{ mit } |f(x)| < K \quad \forall x \in [a,b].$$

Die Funktion f muss nicht ≥ 0 sein.

Definition 5-2:

Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt auf $[a,b]$ und Z eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann definiert

$m(f) := \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ die größte untere Schranke auf $[a,b]$,

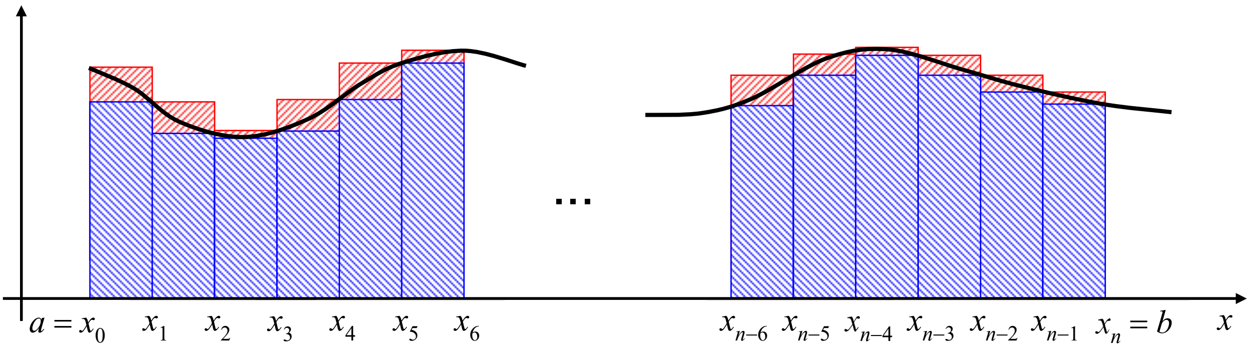
$M(f) := \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ die kleinste obere Schranke auf $[a,b]$,

$m_k(f) := \inf_{x \in I_k} \{f(x)\}$ das Infimum von f auf I_k,

$M_k(f) := \sup_{x \in I_k} \{f(x)\}$ das Supremum von f auf I_k.

$$U_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta x_k \quad \text{Untersumme von } f \text{ bzgl. } Z$$

$$O_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k \quad \text{Obersumme von } f \text{ bzgl. } Z$$



Man lässt nun die Zerlegung feiner werden. Damit wird U_Z größer und O_Z kleiner, aber immer gilt

$$U_Z \leq O_Z.$$

Streben beide Folgen

$$U_{Z_1}, U_{Z_2}, U_{Z_3}, \ldots \quad \text{und} \quad O_{Z_1}, O_{Z_2}, O_{Z_3}, \ldots$$

gegen einen Grenzwert und ist dieser bei beiden Folgen gleich, so definiert man diesen Grenzwert als Integral von f in den Grenzen von a bis b.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so liefert dieses Integral den Flächeninhalt zwischen der x-Achse, dem Graphen von f und den Geraden $x = a$ und $x = b$.

Zunächst sind einige Eigenschaften zu zeigen, die einem anschaulich sofort einleuchten.

Satz 5-1:
Es gilt

a) $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a,$ b) $m(f)(b-a) \le U_Z(f) \le O_Z(f) \le M(f)(b-a).$

Beweis:

a) $\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n + \sum_{k=1}^{n-1} x_k - \sum_{k=2}^{n} x_{k-1} - x_0 = x_n - x_0 = b-a$

b) $m(f)(b-a) = \sum_{k=1}^{n} m(f)\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,\Delta x_k = U_Z(f)$

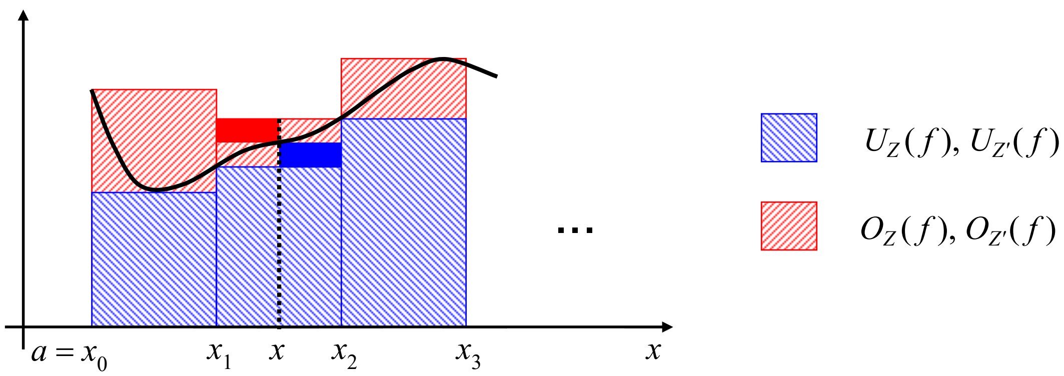
$\le O_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n} M(f)\,\Delta x_k = M(f)(b-a)$

Definition 5-3:
Z' heißt Verfeinerung von Z, wenn $Z \subset Z'$.

Satz 5-2:
Es sei Z' eine Verfeinerung von Z, dann gilt

$$U_Z(f) \le U_{Z'}(f) \le O_{Z'}(f) \le O_Z(f).$$

Beweis:
Zunächst sei $Z' = Z \cup \{x\}$ betrachtet $\Rightarrow U_Z(f) \le U_{Z'}(f) \le O_{Z'}(f) \le O_Z(f).$



Im allgemeinen sind endlich viele Unterteilungspunkte hinzuzufügen. Man muss den obigen Schritt also nur entsprechend oft wiederholen.

Satz 5-3:
Es seien Z_1 und Z_2 Zerlegungen von $[a,b]$ $\Rightarrow$ $U_{Z_1}(f) \leq O_{Z_2}(f)$.

Beweis:
$Z = Z_1 \cup Z_2$ ist Verfeinerung von Z_1 und Z_2

$$\Rightarrow U_{Z_1}(f) \leq U_Z(f) \leq O_Z(f) \leq O_{Z_2}(f).$$

Definition 5-4:
Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt auf $[a,b]$. f heißt integrierbar auf $[a,b]$ genau dann, wenn

$$\sup_Z \{U_Z(f)\} = \inf_Z \{O_Z(f)\}.$$

In diesem Fall schreibt man

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sup_Z \{U_Z(f)\} = \inf_Z \{O_Z(f)\}$$

und bezeichnet es als das Riemann-Integral der Funktion f von a bis b.

Anmerkung:
Aus den Sätzen 5-1 und 5-2 folgt, dass die Werte $\sup U_Z(f)$ und $\inf O_Z(f)$ existieren und endlich sind. Aus Satz 5-3 folgt, dass immer gilt $\sup U_Z(f) \leq \inf O_Z(f)$. Gilt das Gleichheitszeichen so ist f integrierbar.

Anmerkung:
Ist f integrierbar auf $[a,b]$ und gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, so stellt der Wert $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt zwischen der x-Achse, dem Graphen von f und den Geraden $x = a$ und $x = b$ dar.

Beispiel:

1) $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$

   $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf jedem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a),$$

denn $U_Z(f) = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$ und $O_Z(f) = c\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = c(b-a)$

$\Rightarrow \sup_Z \{U_Z(f)\} = \inf_Z \{O_Z(f)\} = c(b-a).$

2) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\Rightarrow f$ ist nicht integrierbar auf $[a,b] \subset \mathbb{R}$, denn

$U_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$ und $O_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = (b-a)$

$\Rightarrow \sup_Z \{U_Z(f)\} < \inf_Z \{O_Z(f)\}.$

Welche Funktionen sind integrierbar?

<u>**Satz 5-4:**</u>
Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. f ist auf $[a,b]$ integrierbar genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a,b]$ existiert mit

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon.$$

<u>*Beweis:*</u>

"$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists Z_1, Z_2$ mit

$O_{Z_1}(f) < \inf_Z \{O_Z(f)\} + \varepsilon/2$ und $U_{Z_2}(f) > \sup_Z \{U_Z(f)\} - \varepsilon/2.$

Für $Z = Z_1 \cup Z_2$ gilt dann

$O_Z(f) - U_Z(f) \le O_{Z_1}(f) - U_{Z_2}(f) < \varepsilon$

"$\Leftarrow$": $0 \le \inf_Z \{O_Z(f)\} - \sup_Z \{U_Z(f)\} \le O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig $\Rightarrow \inf_Z \{O_Z(f)\} = \sup_Z \{U_Z(f)\}$

Satz 5-5:

a) Jede auf $[a,b]$ monotone und beschränkte Funktion ist integrierbar auf $[a,b]$.

b) Jede auf $[a,b]$ stetige Funktion ist integrierbar auf $[a,b]$.

Beweis:

a) Sei f monoton wachsend mit $M_k(f) = f(x_k)$ und $m_k(f) = f(x_{k-1})$

$$\Rightarrow O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(M_k(f) - m_k(f) \right) \Delta x_k$$

$$\le |Z| \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - f(x_{k-1}) \right) = |Z| \left(f(b) - f(a) \right) < \varepsilon$$

falls $|Z| < \varepsilon / \left(f(b) - f(a) \right)$ und $f(b) \neq f(a)$.

b) Da f stetig auf $[a,b]$ und $[a,b]$ ein abgeschlossenes Intervall mit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist, ist f gleichmäßig stetig auf $[a,b]$, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \ \forall x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$.

Sei Z eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $|Z| < \delta$

$$\Rightarrow O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{k=1}^{n} \left(M_k(f) - m_k(f) \right) \Delta x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(f(\xi_k) - f(\mu_k) \right) \Delta x_k < \varepsilon (b-a)$$

$\Rightarrow f$ ist gemäß des Satzes 5-4 integrierbar auf $[a,b]$.

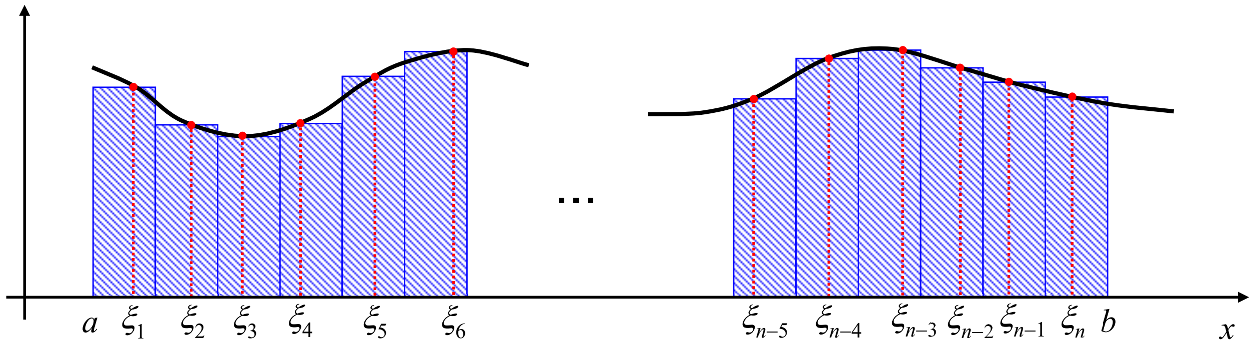
$\big($$M_k(f) = f(\xi_k)$ und $m_k(f) = f(\mu_k)$, da Infimum und Supremum auf jedem Teilintervall angenommen werden$\big)$

5.1.2 Riemannsche Summe

Eine andere Möglichkeit Integrierbarkeit nachzuprüfen, bzw. ein Hilfsmittel Integrale zu berechnen, bildet die Riemannsche Summe.

Definition 5-5:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt, Z eine Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi_k \in I_k$ ein beliebiger Zwischenpunkt $(1\le k\le n)$. Dann heißt $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ Riemannsche Summe von f zur Zerlegung Z.



Satz 5-6:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beschränkt. f ist integrierbar auf $[a,b]$ genau dann, wenn $\lim_{|Z|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$ unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte $\xi_k\in I_k$ existiert. In diesem Falle gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|Z|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k .$$

Satz 5-7:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$, $\{Z_n\}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty}|Z_n|=0$ und $\{\xi_{n,k}\}$ eine Folge von Zwischenpunkten. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_{n,k})(x_k - x_{k-1}).$$

Beispiel:

$f(x) = x$ für alle $x \in [a,b]$

$\Rightarrow f$ ist stetig auf $[a,b]$ $\Rightarrow f$ ist integrierbar auf $[a,b]$.

Wähle $Z_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ mit Zwischenpunkten $\xi_k = (x_k + x_{k-1})/2$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

5.1.3 Eigenschaften des Integrals

Satz 5-8:

Es sei $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

a) cf ist integrierbar auf $[a,b]$ mit

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

b) $f + g$ ist integrierbar auf $[a,b]$ mit

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

c) Ist $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

d) $|f|$ ist integrierbar auf $[a,b]$ mit

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

e) Ist $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [a,b]$, so gilt

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le K\int_a^b dx = K(b-a).$$

f) $f \cdot g$ ist integrierbar auf $[a,b]$.

Beweis:

a) c kann aus der Riemannschen-Summe herausgezogen werden.

b) $\sum_{k=1}^{n}\big(f(\xi_k)+g(\xi_k)\big)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\,\Delta x_k.$

c) $g-f$ ist integrierbar mit $g(x)-f(x) \ge 0$ für alle $x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx \ge 0.$$

d) $|f| = f^+ + f^-$ und $f = f^+ - f^-$ mit

$$f^+ = \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad f^- = \begin{cases} 0 & \text{für } f(x) \ge 0 \\ -f(x) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Man hat nun zu zeigen, dass f^+ und f^- integrierbar sind $\Rightarrow$ $|f|$ ist integrierbar (ausführlicher Beweis siehe Literatur).

Da $-f \le |f|$ und $f \le |f|$ folgt mit c) aus $-\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ und

$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ schließlich $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

e) Folgt unmittelbar aus c) und d).

f) Beweis siehe Literatur.

5.1.4 Integration auf Teilintervallen

Satz 5-9:

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ und $Z_n = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt f ist integrierbar auf $[a,b]$ genau dann, wenn f integrierbar auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ mit $1 \le k \le n$. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx.$$

Satz 5-10:

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und die Folgen (a_n) und (b_n) seien aus $\mathbb{R}$ mit dem Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und $[a_n, b_n] \subset [a,b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx.$$

Beweis:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{a_n} f(x)\,dx + \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx + \int_{b_n}^{b} f(x)\,dx$$

Sei $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt

$$\left.\begin{aligned} \left|\int_a^{a_n} f(x)\,dx\right| &\le K\,|a_n - a| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \\ \left|\int_{b_n}^{b} f(x)\,dx\right| &\le K\,|b - b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Behauptung}.$$

Anmerkung:

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig auf $[a,b]$, d.h. f besitzt höchstens endlich viele Sprungstellen. Dann gilt f ist integrierbar auf $[a,b]$.

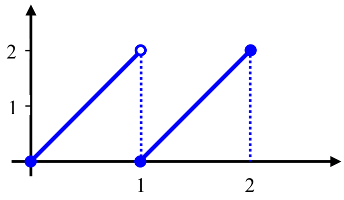
Anmerkung:

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt auf $[a,b]$ und $f(x) \neq g(x)$ für höchstens endlich viele $x \in [a,b]$. Dann ist f auf $[a,b]$ integrierbar genau dann, wenn g auf $[a,b]$ integrierbar. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [0,1) \\ 2x-2 & \text{für } x \in [1,2] \end{cases}$$



$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 (2x-2)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 2x\,dx - \int_1^2 2\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}(1^2-0^2) + 2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1^2) - 2(2-1) = 1+3-2 = 2$$

5.2 Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

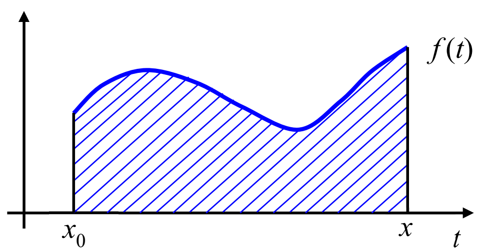
Definition 5-6:

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f integrierbar auf jedem Teilintervall $[a,b] \subset I$ mit $x_0 \in I$. Dann heißt $F : I \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Funktion der oberen Grenze des Integrals von f.

Ist $f(t) \geq 0$ für alle $t \in I \Rightarrow F(x)$ ist der Flächeninhalt zwischen t-Achse, Graphen von f und den Geraden $t = x_0$ und $t = x$



Satz 5-11: (*Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*)

Für die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ gilt

a) F ist stetig auf I

b) f stetig in $x \in I \;\Rightarrow\; F$ ist differenzierbar mit $F'(x) = f(x)$

c) f stetig auf $I \;\Rightarrow\; F$ ist stetig differenzierbar auf I mit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$

Beweis:

a) Es sei $x \in [a,b] \subset I$, (x_n) eine Folge aus $[a,b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $|f(x)| \le K$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt

$$|F(x_n) - F(x)| = \left| \int_{x_0}^{x_n} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{x}^{x_n} f(t)\,dt \right| \le K|x_n - x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ F ist stetig in x, da $x \in I$ beliebig $\Rightarrow$ F ist stetig auf I.

b) $$\left| \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{x_n - x} \int_{x}^{x_n} f(t)\,dt - f(x) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{x_n - x} \int_{x}^{x_n} f(t)\,dt - \frac{f(x)}{x_n - x} \int_{x}^{x_n} dt \right| = \frac{1}{|x_n - x|} \left| \int_{x}^{x_n} f(t)\,dt - \int_{x}^{x_n} f(x)\,dt \right|$$

$$= \frac{1}{|x_n - x|} \left| \int_{x}^{x_n} \big(f(t) - f(x)\big)\,dt \right| \le \frac{|x_n - x|}{|x_n - x|} \sup_{|t-x| \le |x_n - x|} |f(t) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

($n \to \infty$, also $x_n \to x$ und damit $t \to x$)

c) Folgt unmittelbar aus b) für alle $x \in I$.

Beispiel:

$F(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} \sin x/x & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

denn $f(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, da $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$.

Definition 5-7: (*Stammfunktion)*
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, F : I \to \mathbb{R}$ und F differenzierbar auf I. Gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$, dann heißt F Stammfunktion von f auf I.

Anmerkung:
Jede auf I stetige Funktion f besitzt auf I eine Stammfunktion, denn für $x_0 \in I$ und $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\, dt$ gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Anmerkung:
Ist F Stammfunktion von f auf I, so ist auch $G(x) = F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ ebenso Stammfunktion von f auf I. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, denn $G'(x) = F'(x) = f(x) \;\; \forall x \in I$.

Es seien F und G Stammfunktionen von f auf I

$\Rightarrow \; G'(x) = F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \; G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in I$ und $C \in \mathbb{R}$

Satz 5-12:
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$ dann gilt

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Beweis:

Sei f stetig (für allgemein integrierbare Funktionen siehe Literatur)

$\Rightarrow\ G(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ ist Stammfunktion von f auf $[a,b]$

$$\Rightarrow\ G(x)=F(x)+C,\ G(a)=0,\ G(b)=\int\limits_a^b f(t)\,dt$$

$$\Rightarrow\ G(b)-G(a)=F(b)-F(a)=\int\limits_a^b f(t)\,dt$$

Anmerkung:

a) $\int f(x)\,dx$ heißt unbestimmtes Integral und bedeutet die Gesamtheit aller Stammfunktionen von f, also

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}\ \text{ mit }\ F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in I.$$

Häufig lässt man die Integrationskonstante weg und schreibt einfach

$$\int f(x)\,dx=F(x)\ \text{ mit }\ F'(x)=f(x)\ \ \forall x\in I.$$

b) $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ heißt bestimmtes Integral.

Anmerkung:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx=0,\ \int\limits_b^a f(x)\,dx=-\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Beispiel:

1) $\int cx^k\,dx=\frac{c}{k+1}x^{k+1}$ für $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\},\ c\in\mathbb{R}.$

2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$ für $x \neq 0$.

3) $\int e^x\,dx = e^x$, $\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ für $\alpha \neq 0$,

z.B. $\int_1^2 e^x\,dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1)$.

4) $$\left.\begin{aligned} \int \sin(\alpha x)\,dx &= -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x) \\ \int \cos(\alpha x)\,dx &= \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha x) \end{aligned}\right\} \text{ für } \alpha \neq 0.$$

5.3 Integrationsregeln

5.3.1 Partielle Integration

Satz 5-13:

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Beweis:

$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \;\Rightarrow\; f \cdot g$ ist Stammfunktion von

$f'g + fg'$, d.h. $f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$

$\Rightarrow \int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx.$

Beispiel:

1) $\int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x \cdot 1\,dx = x\,e^x - e^x = (x-1)\,e^x$

mit $f'(x) = e^x,\;\; g(x) = x \;\Rightarrow\; f(x) = e^x$ und $g'(x) = 1.$

2) $\int x^n e^x\,dx = x^n e^x - n\int x^{n-1} e^x\,dx,\;\; n \in \mathbb{N}$ Rekursionsformel

mit $f'(x) = e^x,\;\; g(x) = x^n \;\Rightarrow\; f(x) = e^x$ und $g'(x) = n\,x^{n-1}.$

3) $\int \ln x\,dx = \int 1 \cdot \ln x\,dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$

mit $f'(x) = 1,\;\; g(x) = \ln x \;\Rightarrow\; f(x) = x$ und $g'(x) = 1/x.$

4) $\int x \sin x\,dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx$

$$= -x\cos x + \sin x = \sin x - x\cos x$$

mit $f'(x) = \sin x,\;\; g(x) = x \;\Rightarrow\; f(x) = -\cos x$ und $g'(x) = 1.$

5.3.2 Substitutionsmethode

Satz 5-14:

a) Es sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[\alpha,\beta]$ mit $[\alpha,\beta] = \varphi([a,b])$. Dann gilt

$$\int f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)} \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

b) Es sei $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ stetig differenzierbar auf $[\alpha,\beta]$ mit $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in [\alpha,\beta]$, d.h. φ ist streng monoton und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\int f(x)\,dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt\Big|_{t=\varphi^{-1}(x)} \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis:

a) Ist F Stammfunktion von f auf $[\alpha, \beta]$, so gilt

$$\left(F\left(\varphi(x)\right)\right)' = F'\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x) = f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)$$

also ist

$$F\left(\varphi(x)\right) = F \circ \varphi \text{ Stammfunktion von } f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)$$

und es gilt

$$\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)\,dx = F\left(\varphi(x)\right) = F(t)\Big|_{t=\varphi(x)} = \int f(t)\,dt\Big|_{t=\varphi(x)}$$

b) Mit $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ und $\beta = \varphi^{-1}(b)$ gilt nach a)

$$\int_{\alpha=\varphi^{-1}(a)}^{\beta=\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ Behauptung

Merkregel:

$\int f(x)\,dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt$, also setze $x = \varphi(t)$ und $dx = \varphi'(t)\,dt$ ein.

Beispiel:

1) $$\int \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \int \frac{3x^2}{t}\frac{1}{3x^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln\left|x^3+1\right| + C.$$

Substitution: $t = x^3+1,\ dt = 3x^2dx \Rightarrow dx = dt/(3x^2)$

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \ln\left|x^3+1\right|\Big|_0^2 = \ln\left|2^3+1\right| - \ln\left|0^3+1\right| = \ln 9$$

oder Grenzen mit substituieren

$$\int_0^2 \frac{3x^2}{x^3+1}\,dx = \int_1^9 \frac{1}{t}\,dt = \ln|t|\Big|_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9.$$

Das erste Beispiel ist ein Beispiel für den folgenden allgemeinen Fall.

2) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{t}\frac{1}{f'(x)}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Substitution: $t = f(x),\ dt = f'(x)\,dx \ \Rightarrow\ dx = dt/f'(x).$

3) $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{t}{x}\,x\,dt = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Substitution: $t = \ln x,\ dt = dx/x \ \Rightarrow\ dx = x\,dt.$

Das dritte Beispiel ist ein Beispiel für den folgenden allgemeinen Fall.

4) $$\int f(x)f'(x)\,dx = \int t\,f'(x)\frac{1}{f'(x)}\,dt = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}f^2(x) + C.$$

Substitution: $t = f(x),\ dt = f'(x)\,dx \ \Rightarrow\ dx = dt/f'(x).$

5) $$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(x/a)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{t^2+1}\,a\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{a}\arctan t + C = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\ \ a > 0.$$

Substitution: $t = x/a,\ dt = dx/a \ \Rightarrow\ dx = a\,dt.$

6) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-(x/a)^2}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,a\,dt$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ \ |x| < a,\ \ a > 0.$$

Substitution: $t = x/a,\ dt = dx/a \ \Rightarrow\ dx = a\,dt.$

Analog erhält man

7) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + \tilde{C},\;\; a>0.$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \operatorname{arcosh}\frac{x}{a} + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + \tilde{C},\;\; |x|>a.$

8) $\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \sqrt{t} + C = \sqrt{a^2+x^2} + C.$

Substitution: $t = a^2 + x^2,\;\; dt = 2x\,dx \;\Rightarrow\; x\,dx = dt/2.$

9) $\int_0^1 e^{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int_1^{\sqrt{2}} t\,e^t\,dt = 2\left((t-1)\,e^t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)e^{\sqrt{2}}.$

Substitution: $t = \sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; x = t^2 - 1 \;\Rightarrow\; dx = 2t\,dt.$

10) $\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int t\,e^t\,\frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}(t-1)\,e^t + C = \frac{1}{2}(x^2-1)\,e^{x^2} + C.$

Substitution: $t = x^2,\;\; dt = 2x\,dx \;\Rightarrow\; x\,dx = dt/2.$

11) $\int \frac{e^x+1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{t+1}{t+1/t}\,\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{t+1}{t^2+1}\,dt = \int \frac{t}{t^2+1}\,dt + \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right| + \arctan t + C = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right| + \arctan e^x + C.$

Substitution: $t = e^x \;\Rightarrow\; x = \ln t \;\Rightarrow\; dx = dt/t.$

12) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\ln\left|1+\cos x\right| + C. \quad \left(-\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\right)$

13) $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt$

$$= a^2 \int\limits_0^{\pi/2} |\cos t|\cos t\,dt = a^2 \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \left(1+\cos 2t\right)dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left\{\int\limits_0^{\pi/2} 1\,dt + \int\limits_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt\right\} = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right) = \frac{a^2\pi}{4}.$$

Substitution: $x = a\sin t \;\Rightarrow\; dx = a\cos t\,dt,\; t = \arcsin(x/a).$

Flächeninhalt des Viertelkreises $\Rightarrow$ Flächeninhalt des Kreises mit dem Radius r ist $A = r^2\pi$.

Als Stammfunktion ergibt sich

$$\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\cos t\right) = \frac{a^2}{2}\left(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C,\; |x|<a.$$

14) $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$

a) Substitution:

$$x = a\sinh t \;\Rightarrow\; dx = a\cosh t\,dt,\;\; t = \operatorname{arsinh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right),$$

$$\int \sqrt{a^2 + a^2\sinh^2 t}\; a\cosh t\,dt = a^2 \int \sqrt{1+\sinh^2 t}\,\cosh t\,dt$$

$$= a^2 \int \left|\cosh t\right| \cosh t\,dt = a^2 \int \cosh^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cosh 2t)\,dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int 1dt + \int \cosh 2t\,dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sinh 2t\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{4}\big(\exp(2t) - \exp(-2t)\big)\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)^2 - \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)^{-2}\right)\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + \frac{1}{4}\left(\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)^2 - \left(\frac{x}{a} - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right)^{2}\right)\right)$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + \frac{1}{4}4\frac{x}{a}\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right) = \frac{1}{2}\left(a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\operatorname{arsinh}\frac{x}{a}\right) + C.$$

b) Partielle Integration:

$$\int 1\cdot\sqrt{a^2+x^2}\,dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \frac{x^2+a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx + a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2+x^2} + a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right) + C.$$

15) $\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin\left((\alpha+\beta)x\right)+\sin\left((\alpha-\beta)x\right)\right)dx$

$$=\begin{cases} -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos\left((\alpha+\beta)x\right)}{\alpha+\beta}+\frac{\cos\left((\alpha-\beta)x\right)}{\alpha-\beta}\right)+C & \text{für } \alpha\neq\pm\beta \\ -\frac{1}{2}\frac{\cos\left((\alpha+\beta)x\right)}{\alpha+\beta}+C & \text{für } \alpha=\beta\neq 0 \\ -\frac{1}{2}\frac{\cos\left((\alpha-\beta)x\right)}{\alpha-\beta}+C & \text{für } \alpha=-\beta\neq 0 \end{cases}.$$

16) Die folgenden Integrale lassen sich nicht geschlossen durch Funktionen ausdrücken:

$$\int e^{x^2}dx,\ \int\frac{e^x}{x}dx,\ \int\frac{\sin x}{x}dx,\ \int\frac{\cos x}{x}dx,\ \text{etc.}$$

5.4 Integration spezieller Funktionstypen

5.4.1 Integration rationaler Funktionen

Gesucht sind Stammfunktionen für Integrale vom Typ

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx, \text{ wobei } p, q \text{ Polynome mit } \operatorname{grad} p > \operatorname{grad} q.$$

Ist $\operatorname{grad} p \geq \operatorname{grad} q \Rightarrow$ Polynomdivision durchführen bis $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$ ist. Anschließend muss eine Partialbruchzerlegung durchgeführt werden. Es sind dann nur noch Integrale vom Typ

$$\int \frac{1}{(x-x_0)^n} dx \text{ und } \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n} dx$$

zu berechnen.

Es gilt

a) $\int \frac{1}{x-x_0} dx = \ln|x-x_0|.$

b) $\int \frac{1}{(x-x_0)^n} dx = \frac{1}{(1-n)(x-x_0)^{n-1}}, \ n \geq 2.$

c) $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, \ a > 0.$

d) $\int \frac{1}{x^2+bx+c} dx = \lambda \arctan\left(\lambda\left(x+\frac{b}{2}\right)\right), \ \lambda = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}, \ 4c-b^2 > 0.$

e) $\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n} dx = \frac{\lambda^2(2x+b)}{4(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{\lambda^2(2n-3)}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}} dx,$

$\lambda = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}, \ 4c-b^2 > 0$ Rekursionsformel.

f) $\displaystyle\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \ln\left|x^2+bx+c\right|.$

g) $\displaystyle\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}},\ \ n \geq 2.$

h) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx - \frac{b}{2}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx,\ \ n \geq 1.$

Beweis:

a) s. Beispiel 2 in Kapitel 5.3.2

b) s. Beispiel 1 in Kapitel 5.2

c) s. Beispiel 5 in Kapitel 5.3.2

d) $$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{1}{(x+b/2)^2+(c-b^2/4)}\,dx = \int \frac{1}{(x+b/2)^2+(1/\lambda)^2}\,dx$$
$$= \lambda \arctan\big(\lambda(x+b/2)\big) \ \text{ mit } \ \lambda = 1\Big/\sqrt{c-b^2/4} = 2\Big/\sqrt{4c-b^2}$$

e) $$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{c}\int \frac{x^2+bx+c}{(x^2+bx+c)^n}\,dx - \frac{1}{c}\int \frac{x(x+b)}{(x^2+bx+c)^n}\,dx =$$
$$= \frac{1}{c}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx - \frac{1}{2c}\int x\frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx - \frac{b}{2c}\int \frac{x}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$$
$$= \frac{1}{c}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx - \frac{1}{2c}\left(\frac{x}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx\right)$$
$$- \frac{b}{4c}\int \frac{2x+b}{(x^2+bx+c)^n}\,dx + \frac{b^2}{4c}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx - \frac{b^2}{4c}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2c}\left(2+\frac{1}{1-n}\right)\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx - \frac{1}{2c}x\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}}$$
$$- \frac{b}{4c}\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \frac{1}{1-b^2/4c}\left\{\frac{1}{2c}\left(2+\frac{1}{1-n}\right)\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2c}\left(x+\frac{b}{2}\right)\frac{1}{(1-n)(x^2+bx+c)^{n-1}}\right\}$$

$$= \frac{4}{4c-b^2}\left\{\frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx + \right.$$

$$\left. + \frac{2x+b}{4(n-1)}\frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\right\} \text{ mit } \lambda = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}$$

$$= \frac{\lambda^2(2x+b)}{4(n-1)(x^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{\lambda^2(2n-3)}{2(n-1)}\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\,dx$$

f) s. Beispiel 2 in Kapitel 5.3.2

g) s. Beispiel 1 in Kapitel 5.2

h) s. e) und g)

Beispiel:

1) $\displaystyle\int \frac{2x^3+3x^2+4x+6}{x^2+2x+1}\,dx \quad \text{grad}\,p > \text{grad}\,q \;\Rightarrow\; \text{Polynomdivision}$

$$\begin{array}{l}
2x^3+3x^2+4x+6 : x^2+2x+1 = 2x-1+(4x+7)/(x^2+2x+1) \\
\underline{2x^3+4x^2+2x} \\
\quad -\;x^2+2x+6 \\
\quad \underline{-\;x^2-2x-1} \\
\qquad\qquad 4x+7
\end{array}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4x+7}{x^2+2x+1} = \frac{4x+7}{(x+1)^2} = \frac{4(x+1)}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x+1)^2} = \frac{4}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}.$$

$$I = \int (2x-1)\,dx + 4\int \frac{1}{x+1}\,dx + 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= x^2 - x + 4\ln|x+1| - \frac{3}{x+1} + C = x^2 - x + \ln(x+1)^4 - \frac{3}{x+1} + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2 - x + 1)^2}\,dx$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2 - x + 1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1} + \frac{Dx+E}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$A = \left.\frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x^2 - x + 1)^2}\right|_{x=-1} = \frac{9}{9} = 1.$$

Koeffizientenvergleich:

$$\frac{x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3}{(x+1)(x^2 - x + 1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3) - (x^2 - x + 1)^2}{(x+1)(x^2 - x + 1)^2} =$$

$$= \frac{Bx+C}{x^2 - x + 1} + \frac{Dx+E}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{(Bx+C)(x^2 - x + 1)(x+1) + (Dx+E)(x+1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)^2}$$

$$(x^4 - x^3 + 5x^2 + x + 3) - (x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1)$$
$$= (Bx^2 + (B+C)x + C)(x^2 - x + 1) + Dx^2 + (D+E)x + E$$

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = Bx^4 - Bx^3 + Bx^2 + (B+C)x^3 - (B+C)x^2 + (B+C)x$$
$$+ Cx^2 - Cx + C + Dx^2 + (D+E)x + E$$
$$= Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + (B+D+E)x + (C+E)$$

$$\Rightarrow\; A = 1,\; B = 0,\; C = 1,\; D = 2,\; E = 1.$$

$$I=\underbrace{\int\frac{1}{x+1}\,dx}_{I_1}+\underbrace{\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx}_{I_2}+\underbrace{\int\frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}\,dx}_{I_3},$$

$$I_1=\int\frac{1}{x+1}\,dx=\ln|x+1|,$$

$$I_2=\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx=\int\frac{1}{(x-1/2)^2+3/4}\,dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right),$$

$$\begin{aligned}I_3&=\int\frac{2x+1}{(x^2-x+1)^2}\,dx=\int\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}\,dx+2\int\frac{1}{(x^2-x+1)^2}\,dx\\&=\frac{-1}{x^2-x+1}+\frac{2(2x-1)}{3(x^2-x+1)}+\frac{4}{3}\int\frac{1}{x^2-x+1}\,dx\ \text{ mit }\ \lambda=\frac{2}{\sqrt{4-1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\\&=\frac{-1}{x^2-x+1}+\frac{4x-2}{3(x^2-x+1)}+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

$$I=I_1+I_2+I_3=\ln|x+1|+\frac{4x-5}{3(x^2-x+1)}+\frac{14}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+C.$$

5.4.2 Integrale der Form $\int R(\sin x,\cos x)\,dx$

$R(\sin x,\cos x)$ bezeichnet eine (gebrochen)rationale Funktion von $\sin x$ und $\cos x$.

Substitution: $t=\tan\dfrac{x}{2}\ \Rightarrow\ x=2\arctan t,\ dx=\dfrac{2}{1+t^2}\,dt,\ |x|<\pi$

$$\Rightarrow\ \sin\frac{x}{2}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Da $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)$ und $\cos x=\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)$ folgt

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Hierdurch erhält man gebrochenrationale Funktionen in t.

Beispiel:

$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,dx = \int \frac{1}{a+b(1-t^2)/(1+t^2)}\,\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int \frac{2}{a(1+t^2)+b(1-t^2)}\,dt = \int \frac{2}{(a+b)+(a-b)t^2}\,dt$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{1}{(a+b)/(a-b)+t^2}\,dt.$$

Mit $\tilde{a}^2 = \dfrac{a+b}{a-b} \Rightarrow \tilde{a} = \sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ und $\displaystyle\int \frac{1}{\tilde{a}^2+t^2}\,dx = \frac{1}{\tilde{a}}\arctan\left(\frac{1}{\tilde{a}}t\right)+C$ folgt

$$\int \frac{1}{a+b\cos x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

5.5 Ergänzende Betrachtungen

5.5.1 Integration gerader und ungerader Funktionen

Es gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{falls } f \text{ ungerade Funktion}$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{falls } f \text{ gerade Funktion,}$$

denn für f ungerade, d.h. $f(-t) = -f(t)$ folgt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx, \quad \text{Subst.: } x=-t,\ dx=-dt$$

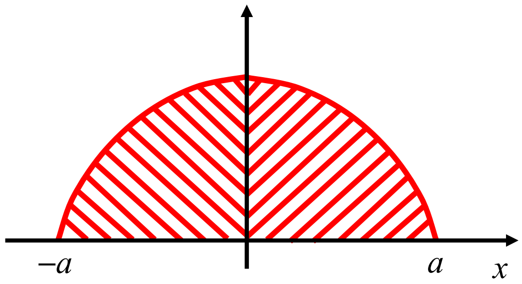
$$= \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

und für f gerade, d.h. $f(-t) = f(t)$ folgt

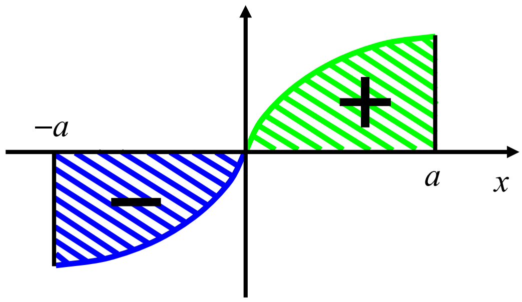
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx, \quad \text{Subst.: } x = -t,\; dx = -dt$$

$$= \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

gerade Funktion

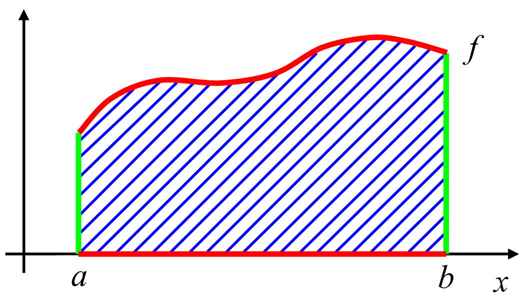


ungerade Funktion



5.5.2 Flächenberechnung

Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und gilt $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gibt $\int_a^b f(x)\,dx$ den Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse, dem Graphen von f und den Geraden $x = a$ und $x = b$ an.



Satz 5-15:

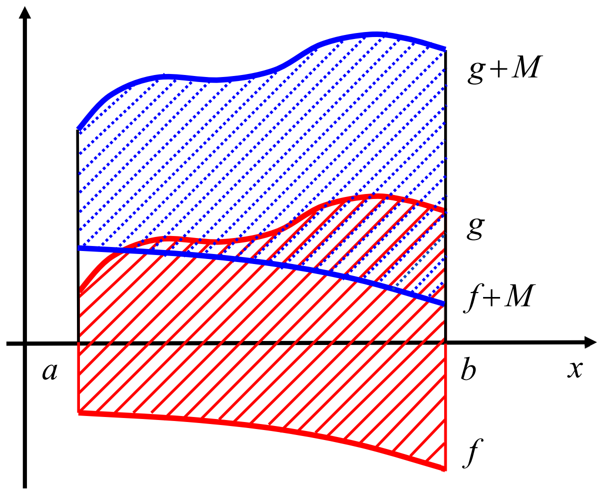
Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und es gelte $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$, dann gibt $\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx$ den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Graphen f und g und den Geraden $x = a$ und $x = b$ an.

Beweis:

Sei $|f(x)| \le M \;\; \forall x \in [a,b] \;\Rightarrow\; -M \le f(x) \le M \;\; \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \; f(x)+M \ge 0$ und $g(x)+M \ge 0 \;\; \forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)\,dx = \int_a^b \big(g(x)+M\big)\,dx - \int_a^b \big(f(x)+M\big)\,dx = \text{Flächeninhalt.}$$



Beispiel:

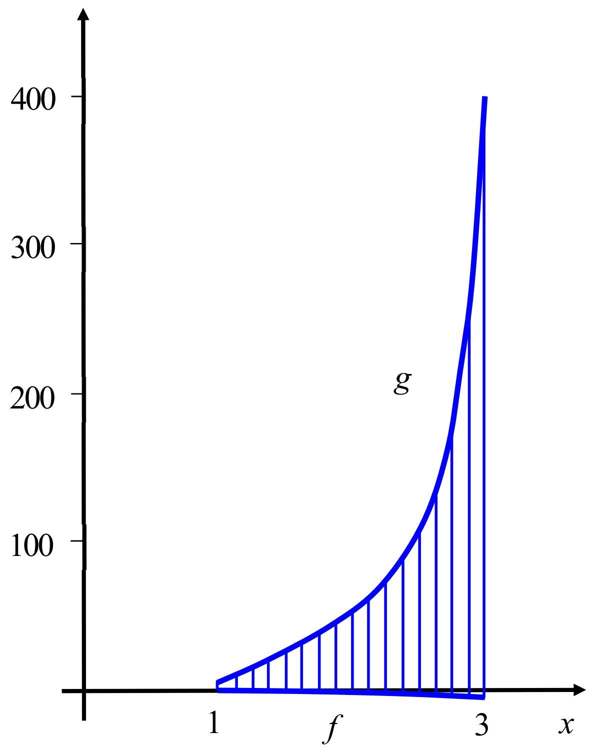
$$f(x) = -x^2, \quad g(x) = e^{2x}, \quad x \in [1,3]$$

$$F = \int_1^3 \big(e^{2x} - (-x^2)\big)\,dx = \int_1^3 \big(e^{2x} + x^2\big)\,dx$$

$$= \int_1^3 e^{2x}dx + \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}x^3\right]\Bigg|_1^3$$

$$= \frac{1}{2}e^6 + \frac{1}{3}27 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{e^2}{2}\big(e^4 - 1\big) + 8\frac{2}{3}.$$



5.5.3 Mittelwertsatz der Integralrechnung

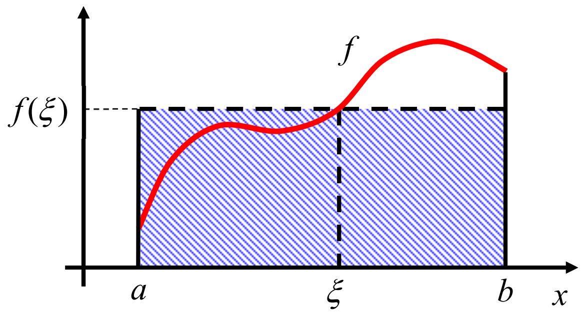
Satz 5-16: (*Mittelwertsatz*)

Es seien $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Ist $g(x) = 1$ für alle $x \in [a,b]$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$



Beweis:

Ist $g(x) = 0 \;\; \forall x \in [a,b] \;\Rightarrow$ beide Seiten $= 0$.

Sei $x_0 \in [a,b]$ mit $g(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; g(x) > 0 \;\; \forall x \in U(x_0)$ (da g stetig)

$$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx > 0 \;\left(\text{da } \; g(x) \geq 0 \;\; \forall x \in [a,b] \setminus U(x_0)\right).$$

Sei $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ und $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$$\Rightarrow m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\,g(x) \;\; \forall x \in [a,b]$$

$$\Rightarrow m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \leq M.$$

Da f stetig auf $[a,b]$, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b]$

mit $f(\xi) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \;\Rightarrow$ Behauptung.

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung ist oft ein gutes Hilfsmittel zur Abschätzung von Integralen.

5.6 Uneigentliche Integrale

Integrale wurden bisher nur für beschränkte Funktionen und endliche Intervalle definiert. Nun werden Integrale auch für gewisse unbeschränkte Funktionen bzw. für unendliche Intervalle angegeben.

<u>Definition 5-8:</u>

a) Es sei $I = [a,b)$ mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (b uneigentliche Stelle). f heißt uneigentlich integrierbar auf $[a,b)$, wenn f auf jedem Teilintervall $[a,B] \subset [a,b)$ integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{B \to b-} \int_a^B f(x)\,dx$$

existiert.

b) Es sei $I = (a,b]$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ (a uneigentliche Stelle). f heißt uneigentlich integrierbar auf $(a,b]$, wenn f auf jedem Teilintervall $[A,b] \subset (a,b]$ integrierbar ist und

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{A \to a+} \int_A^b f(x)\,dx$$

existiert.

c) Es sei $I = (a,b)$ mit $a,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,\infty\}$ (a,b uneigentliche Stellen). f heißt uneigentlich integrierbar, wenn für $c \in (a,b)$ f auf $(a,c]$ und $[c,b)$ uneigentlich integrierbar ist, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(Integral bei c aufspalten und dann Konvergenz untersuchen)

Beispiel:

1) $\int_0^1 (1/x^\alpha)\,dx,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$ fest und $I = (0,1]$.

Es gilt für $0 < \varepsilon < 1$:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} -\ln\varepsilon & \text{für } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) & \text{für } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Da $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon) = \infty$ und $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{1-\alpha} = \begin{cases} \infty & \alpha > 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases}$ gilt

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha < 1$,

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ ist divergent für $\alpha \geq 1$.

2) $\int_1^\infty (1/x^\alpha)\,dx,\ \ \alpha \in \mathbb{R}$ fest und $I = [1,\infty)$.

Es gilt für $1 < B < \infty$:

$$\int_1^B \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \ln B & \text{für } \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(B^{1-\alpha}-1) & \text{für } \alpha \neq 1 \end{cases}.$$

Da $\lim\limits_{B\to\infty}\ln B = \infty$ und $\lim\limits_{B\to\infty} B^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ \infty & \alpha < 1 \end{cases}$ gilt

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha-1}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$,

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ ist divergent für $\alpha \leq 1$.

3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = 2$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2$ ist konvergent.

4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^B \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{B\to\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^B = \frac{1}{2}\lim_{B\to\infty}\ln(1+B^2) = \infty$

$\displaystyle\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ ist divergent.

Also ist auch

$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_0^\infty \frac{x}{1+x^2}\,dx$ divergent,

(Integral aufspalten, da beide Integrationsgrenzen uneigentlich)

obwohl

$\displaystyle\lim_{B\to\infty}\int_{-B}^B \frac{x}{1+x^2}\,dx = \lim_{B\to\infty} 0 = 0 \quad (CHW).$

(Integrand ist eine ungerade Funktion)

<u>Cauchyscher Hauptwert (*CHW*)</u>

$$CHW\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx := \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a f(x)\,dx$$

bzw.

$$CHW\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right).$$

Es ist durchaus möglich, dass das uneigentliche Integral nicht konvergiert, der *CHW* dagegen existiert, vgl. Beispiel 4.

5) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = 2\lim\limits_{B\to\infty} \arctan x\Big|_0^B = 2\lim\limits_{B\to\infty} \arctan B = 2\,\frac{\pi}{2} = \pi.$

(Integrand ist eine gerade Funktion)

6) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x(1+x)}\,dx = \ln 2$ ist konvergent, denn

$$\int \frac{1}{x(1+x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{1+x}\,dx = \ln|x| - \ln|1+x| = \ln\left|\frac{x}{1+x}\right| \text{ und damit}$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x(1+x)}\,dx = \lim\limits_{B\to\infty} \ln\left|\frac{x}{1+x}\right|\Bigg|_1^B = \lim\limits_{B\to\infty} \ln\left|\frac{B}{1+B}\right| - \ln\frac{1}{2} = \ln 2.$$

7) $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x}\,dx = -\lim\limits_{B\to\infty} (1+x)\,e^{-x}\Big|_0^B = 1 - \lim\limits_{B\to\infty} (1+B)\,e^{-B} = 1,$ denn $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x}{e^x} = 0.$

8) $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx = \int\limits_{0}^{1} 1\cdot\ln x\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} (x\ln x - x)\,\Big|_\varepsilon^1 = -1 - \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \left(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon\right) = -1,$

denn $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{\ln\varepsilon}{1/\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \frac{1/\varepsilon}{-1/\varepsilon^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} -\varepsilon = 0.$

9) $\int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x(1-x)}\,dx = \int\limits_{0}^{c} \frac{1}{x(1-x)}\,dx + \int\limits_{c}^{1} \frac{1}{x(1-x)}\,dx$ mit $c \in (0,1).$

(Integral aufspalten, da zwei uneigentliche Grenzen)

$$\int \frac{1}{x(1-x)}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{1}{1-x}\,dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln\left|\frac{x}{1-x}\right| \text{ und damit}$$

$$\int\limits_{0}^{c} \frac{1}{x(1-x)}\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \ln\left|\frac{x}{1-x}\right|\Bigg|_\varepsilon^c = \ln\frac{c}{1-c} - \lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \ln\left|\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right| = \ln\frac{c}{1-c} + \infty$$

$\Rightarrow \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{x\left(1-x\right)}\,dx$ ist divergent.

Um die Konvergenz bzw. Divergenz von Integralen zu beurteilen, bei denen man die Stammfunktion nicht kennt, wendet man die folgenden Konvergenzkriterien an.

<u>Satz 5-17:</u> (*Konvergenzkriterien*)
Es seien f,g auf jedem Teilintervall $[a,B] \subset [a,b)$ bzw. $[A,b] \subset (a,b]$ integrierbar und $g(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$.

a) Konvergiert $\int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ ist konvergent,

b) Ist $|f(x)| \le g(x)$ für alle $x \in (a,b)$ und

konvergiert $\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ ist konvergent mit

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

c) Existiert $\lim\limits_{x\to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} = L$ bzw. $\lim\limits_{x\to a+} \frac{|f(x)|}{g(x)} = L$ mit $0 \le L < \infty$ und

konvergiert $\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ ist konvergent.

d) Existiert $\lim\limits_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ bzw. $\lim\limits_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ mit $0 < L \le \infty$ und

divergiert $\int_a^b g(x)\,dx \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ ist divergent.

<u>Beweis:</u> (für *b* uneigentliche Stelle, für *a* verläuft der Beweis analog)
a), b) Da $0 \le |f(x)| \le g(x)$, sind

$F(x) = \int_a^x |f(t)|\,dt$ und $G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ in $[a,b)$ monoton wachsend und es gilt $0 \le F(x) \le G(x) \le \lim\limits_{x \to b-} G(x) = \int\limits_a^b g(x)\,dx$

$\Rightarrow$ $F(x)$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt

$\Rightarrow$ es existiert $\lim\limits_{x \to b-} F(x) = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

Mit $\varphi(x) = f(x) + |f(x)|$ gilt $0 \le \varphi(x) \le 2|f(x)|$ und somit

$\varphi(x) = |\varphi(x)| \le 2g(x) \Rightarrow$ es existert $\int\limits_a^b |\varphi(x)|\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$

Aus $\lim\limits_{B \to b-} \int\limits_a^B f(x)\,dx = \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx - \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx$ ist konvergent

und da $\left|\int\limits_a^B f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^B |f(x)|\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx \underset{\text{für } B \to b-}{\Rightarrow}$

$\underset{\text{für } B \to b-}{\Rightarrow} \left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx \le \int\limits_a^b g(x)\,dx.$

c) <u>Fall $L = 0$</u>

$\lim\limits_{x \to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} = 0 \Rightarrow 0 \le \frac{|f(x)|}{g(x)} \le 1 \ \forall x \in [\xi, b]$ mit $\xi \in [a, b]$

$\Rightarrow |f(x)| \le g(x) \ \forall x \in [\xi, b].$

Da $\int\limits_\xi^b g(x)\,dx$ konvergent $\Rightarrow \int\limits_\xi^b f(x)\,dx$ ist konvergent (gemäß b))

$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int\limits_a^\xi f(x)\,dx}_{\textit{eigentliches Integral}} + \underbrace{\int\limits_\xi^b f(x)\,dx}_{\textit{uneigentliches Integral}}$ ist konvergent.

Fall $0 < L < \infty$

$$\lim_{x \to b-} \frac{|f(x)|}{g(x)} = L \;\Rightarrow\; \frac{L}{2} \le \frac{|f(x)|}{g(x)} \le 2L \quad \forall x \in [\xi, b] \text{ mit } \xi \in [a,b]$$

$$\Rightarrow\; |f(x)| \le 2L g(x) \quad \forall x \in [\xi, b] \;\Rightarrow\; \int_a^b f(x)\,dx \text{ ist konvergent (gemäß b)).}$$

d) $$0 < \lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = L < \infty \;\Rightarrow\; \frac{L}{2} \le \frac{f(x)}{g(x)} \le 2L \quad \forall x \in [\xi, b] \text{ mit } \xi \in [a,b]$$

$$\Rightarrow\; f(x) \ge \frac{L}{2} g(x) \quad \forall x \in [\xi, b].$$

Da $\int_a^b g(x)\,dx$ divergent $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ ist divergent.

Für $L = \infty$ erfolgt der Beweis analog zum Fall $L = 0$ in c).

Beispiel:

1) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ ist konvergent, denn

$$|f(x)| = \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2} = g(x) \quad \forall x \in [1, \infty) \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \text{ ist konvergent.}$$

2) $\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ ist konvergent, denn mit $f(x) = e^{-x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{x^2}$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left|e^{-x^2}\right|}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^2}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{u}{e^u} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{e^u} = 0,$$

da $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergent $\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ ist konvergent.

Außerdem, da $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ eigentliches Integral

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ ist konvergent $\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ ist konvergent.

(Integrand ist eine gerade Funktion)

3) $\int_1^\infty (x+1)/(x^2+3)\,dx$ ist divergent, denn mit $g(x) = 1/x$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)/(x^2+3)}{1/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+1)}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+1/x}{1+3/x^2} = 1$$

und da $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ divergent $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{x+1}{x^2+3}\,dx$ divergent.

4) Gamma-Funktion

Definition: (Eulersche Integraldarstellung)

$\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt.$

Beweis der Konvergenz: (an beiden Grenzen uneigentlich)

a) $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\,dt$ ist konvergent, denn mit $g(t) = 1/t^2$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} t^{x-1}}{1/t^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = 0 \text{ und } \int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt \text{ ist konvergent.}$$

(da die e-Funktion stärker wächst als jede Potenz von t)

b) $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\,dt$ ist konvergent, denn mit $g(t) = 1/t^\alpha$ gilt

$$\lim_{t\to 0+}\frac{e^{-t}t^{x-1}}{1/t^{\alpha}}=\lim_{t\to 0+}\frac{t^{x-1+\alpha}}{e^{t}}=0 \text{ falls } x-1+\alpha>0, \text{ d.h. } \alpha>1-x.$$

Wähle α entsprechend $1-x<\alpha<1$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{t^{\alpha}}dt \text{ ist konvergent } \Rightarrow \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt \text{ ist konvergent.}$$

Zusammen gilt dann

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \text{ ist konvergent } \forall x>0.$$

Eigenschaften:

a) $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)\quad \forall x>0$

b) $\Gamma(n+1)=n!\quad \forall n\in\mathbb{N}_0$

c) $\Gamma(x+n)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)\Gamma(x)\quad \forall x>0, n\in\mathbb{N}$

d) $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$

Beweis:

a) $\Gamma(x+1)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x+1-1}dt=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x}dt$ partielle Integration liefert

$$=-e^{-t}t^{x}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty} e^{-t}xt^{x-1}dt=0+x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt=x\,\Gamma(x).$$

b) $\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n(n-1)\Gamma(n-1)=n(n-1)(n-2)\Gamma(n-2)=\ldots$

$$=n(n-1)(n-2)\cdots 1\cdot\Gamma(1)=n!\,\Gamma(1)=n!$$

denn $\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=-e^{-\infty}+e^{0}=1 \Rightarrow \Gamma(1)=1,\ \Gamma(n+1)=n!$

Die Gamma-Funktion ist die Verallgemeinerung der nur für natürliche Zahlen definierten Fakultät.

c) $\Gamma(x+n) = (x+n-1)\,\Gamma(x+n-1)$

$$= (x+n-1)(x+n-2)\,\Gamma(x+n-2)$$

$$\vdots$$

$$= (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\,x\,\Gamma(x).$$

d) $\Gamma(1/2) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{1/2-1} dt = \int\limits_0^\infty e^{-t} \dfrac{1}{\sqrt{t}} dt$

Substitution: $s = \sqrt{t},\; t = s^2,\; dt = 2s\,ds$

$$\Gamma(1/2) = \int\limits_0^\infty e^{-s^2} \frac{1}{s} 2s\,ds = 2\int\limits_0^\infty e^{-s^2} ds = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}.$$

Die Werte der Gamma-Funktion müssen nur im Intervall $(1,2)$ berechnet werden, z.B. durch numerische Integration mit der Simpson-Formel. Alle weiteren Werte verschafft man sich durch Ausnutzen der Eigenschaften a) und c).

Beispiel:

1) $\Gamma(0,3) = ?,\; \Gamma(1,3) = \Gamma(0,3+1) = 0,3\cdot\Gamma(0,3) \;\Rightarrow\; \Gamma(0,3) = \dfrac{\Gamma(1,3)}{0,3}.$

2) $\Gamma(3,4) = 2,4\cdot\Gamma(2,4) = 2,4\cdot 1,4\cdot\Gamma(1,4).$

3) $\int\limits_0^\infty t^2 e^{-t} dt = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{3-1} dt = \Gamma(3) = 2! = 2.$

4) $\int\limits_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \int\limits_0^\infty s\, e^{-s} \dfrac{1}{2\sqrt{s}} ds = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-s}\sqrt{s}\,ds,$

Substitution: $s = t^2,\; t = \sqrt{s},\; dt = \dfrac{1}{2\sqrt{s}} ds$

$$\int\limits_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty s^{3/2-1} e^{-s} ds = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}.$$

5.7 Einige Anwendungen des Integrals

5.7.1 Bogenlänge einer ebenen Kurve

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$ und

$$C_f=\left\{\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix}:\ x\in[a,b]\right\}\subset\mathbb{R}^2$$

der Graph von *f*. C_f stellt eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ dar. Um die Länge einer solchen Kurve zu definieren, greifen wir mit

$$f(x)=\alpha\,x+\beta$$

auf eine elementare Kurve (Gerade) der Länge

$$L\left(C_f\right)=\sqrt{(b-a)^2+\left(f(b)-f(a)\right)^2}$$

zurück. Ist nun f eine beliebige stetig differenzierbare Funktion auf $[a,b]$ und $Z=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$, so können wir durch die

Punkte

$$\begin{pmatrix} x_k \\ f(x_k)\end{pmatrix}\quad k=0,1,2,\ldots,n$$

einen Polygonzug P_n der Länge

$$L\left(C_{P_n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right)^2}\,(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\,\Delta x_k$$

legen. Die Summe ist eine Riemannsche Summe, die für $|Z|\to 0$ gegen

$$\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

konvergiert.

Definition 5-9:

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar auf $[a,b]$, dann ist

$$L\left(C_f\right) = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

die Bogenlänge der Kurve

$$C_f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} :\ x \in [a,b] \right\}.$$

Beispiel:

1) $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2/2$ und $f'(x) = x$,

$$L\left(C_f\right) = \int_0^b \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x + \sqrt{1+x^2} \right)\right)\Bigg|_0^b$$

$$= \frac{1}{2}\left(b\sqrt{1+b^2} + \ln\left(b + \sqrt{1+b^2} \right)\right).$$

2) $f:[0,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{b^2 - x^2}$ und $f'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{b^2-x^2}}$, $0 \le x < b$

$$L\left(C_f\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{b-\varepsilon} \frac{b}{\sqrt{b^2-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} b \arcsin \frac{x}{b}\Bigg|_0^{b-\varepsilon} = b \arcsin 1 = b\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ Umfang des Kreises mit Radius r ist $U = 2\pi r$.

<u>Kurven in Parameterdarstellung</u>

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :\ x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ t \in [a,b] \right\}$$

φ, ψ seien stetig differenzierbar auf $[a,b]$ mit $\left(\varphi'(t), \psi'(t)\right) \neq (0,0)$ für alle $t \in [a,b]$. C stellt eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ dar und hat die Bogenlänge

$$L\left(C\right) = \int_a^b \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt.$$

Beweis:

Sei $\varphi' > 0$ auf $[a,b]$ $\Rightarrow$ φ streng monoton wachsend $\Rightarrow$ φ^{-1} existiert mit $t = \varphi^{-1}(x)$ $\Rightarrow$ $y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = f(x)$. Da $dt = dx/\varphi'$ und $f'(x) = \psi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1}(x))' = \psi'(\varphi^{-1}(x))/\varphi'(\varphi^{-1}(x))$ gilt

$$\begin{aligned}\int_a^b \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}\,dt &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}\,dx/\varphi' \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \sqrt{1 + (\psi'/\varphi')^2}\,dx \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Für $\varphi' < 0$ bzw. $\varphi' = 0$ und damit $\psi' \neq 0$ verläuft der Beweis entsprechend (ggf. ist der Integralbereich geeignet aufzuspalten).

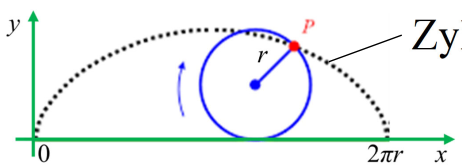
Beispiel:

1) $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :\ x = r\cos t,\ \ y = r\sin t,\ \ t \in [0, 2\pi] \right\},$

d.h. Kreis um den Ursprung mit dem Radius r

$$\begin{aligned}L(C) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(-\sin t)^2 + r^2\cos^2 t}\;dt \\ &= r\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\;dt = r\int_0^{2\pi} dt = r\,t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi r = \pi d.\end{aligned}$$

2) $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :\ x = r(t - \sin t),\ \ y = r(1 - \cos t),\ \ t \in [0, 2\pi] \right\}$



Zykloide (Radkurve)

$$\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2=r^2(1-\cos t)^2+r^2\sin^2 t=r^2(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t)$$
$$=2r^2(1-\cos t)\neq 0 \text{ in } (0,2\pi),$$

$$L\left(C\right)=r\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=r\int_0^{2\pi}\sqrt{4(1-\cos t)/2}\,dt$$
$$=2r\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2(t/2)}\,dt=2r\int_0^{2\pi}\left|\sin(t/2)\right|dt=2r\int_0^{2\pi}\sin(t/2)\,dt$$
$$=2r\left(-2\cos(t/2)\right)\Big|_0^{2\pi}=4r\left(\cos 0-\cos\pi\right)=4r\left(1-(-1)\right)=8r.$$

Fläche zwischen Zykloidenbogen und x-Achse, d.h.

$$\int y(x)\,dx=\int y\left(x(t)\right)x'(t)\,dt.$$

Substitution: $x=r\,(t-\sin t)$, $x'=r\,(1-\cos t)$, $y\left(x(t)\right)=r\,(1-\cos t)$

$$F=\int_0^{2\pi r}y(x)\,dx=\int_0^{2\pi}r\,(1-\cos t)\,r\,(1-\cos t)\,dt$$
$$=r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$
$$=r^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+(1+\cos 2t)/2\right)dt$$
$$=r^2\left\{\int_0^{2\pi}\frac{3}{2}dt-\int_0^{2\pi}2\cos t\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt\right\}$$
$$=r^2\left(\frac{3}{2}t-2\sin t+\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=3\pi r^2.$$

Kurven in Polarkoordinaten

$$C=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2:\ x(\varphi)=r(\varphi)\cos\varphi,\ \ y(\varphi)=r(\varphi)\sin\varphi,\ \ \varphi\in[\alpha,\beta]\right\}$$

mit r ist stetig differenzierbar auf $[\alpha,\beta]$. Aus

$$\begin{aligned}x(\varphi)&=r(\varphi)\cos\varphi\\ y(\varphi)&=r(\varphi)\sin\varphi\end{aligned}\quad\text{und}\quad\begin{aligned}x'(\varphi)&=r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi\\ y'(\varphi)&=r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi\end{aligned}$$

folgt

$$L(C)=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(x'(\varphi)\right)^2+\left(y'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi=\int_\alpha^\beta\sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2+\left(r(\varphi)\right)^2}\,d\varphi,$$

da

$$\begin{aligned}\left(x'(\varphi)\right)^2+\left(y'(\varphi)\right)^2&=\left(r'(\varphi)\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi\right)^2+\left(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi\right)^2\\&=\left(r'(\varphi)\right)^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+\left(r(\varphi)\right)^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)\\&=\left(r'(\varphi)\right)^2+\left(r(\varphi)\right)^2.\end{aligned}$$

Beispiel:

$r(\varphi)=\left|\cos(2\varphi)\right|$ mit $\varphi\in[0,2\pi]$.

$r(\varphi)$ ist symmetrisch zur x- und y-Achse, da $r(-\varphi)=r(\varphi)$ und
$r(\pi/2-\varphi)=r(\pi/2+\varphi)$.

$$\begin{aligned}L(C)&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(r'(\varphi)\right)^2+\left(r(\varphi)\right)^2}\,d\varphi\\&=8\int_0^{\pi/4}\sqrt{4\sin^2(2\varphi)+\cos^2(2\varphi)}\,d\varphi\\&=8\int_0^{\pi/4}\sqrt{3\sin^2(2\varphi)+\sin^2(2\varphi)+\cos^2(2\varphi)}\,d\varphi\\&=8\int_0^{\pi/4}\sqrt{3\sin^2(2\varphi)+1}\,d\varphi\quad\text{elliptisches Integral.}\end{aligned}$$

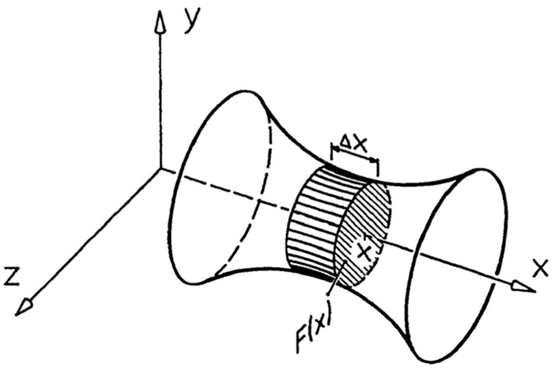
5.7.2 Volumen eines Rotationskörpers

Satz 5-18:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ nichtnegative stetige Funktion. Ein durch Drehung der Kurve $y=f(x)$ um die x-Achse erzeugter Rotationskörper besitzt das Volumen

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx.$$

Beweisskizze:



Für jedes $x\in[a,b]$ ist der Flächeninhalt des Querschnitts gegeben durch

$$F(x)=\left(f(x)\right)^2\pi.$$

Das Volumen einer Scheibe der Dicke Δx beträgt näherungsweise

$$\Delta V=F(x)\,\Delta x=\left(f(x)\right)^2\pi\,\Delta x.$$

Summation und Grenzübergang liefert mit $dV=F(x)\,dx$ schließlich

$$V=\int dV=\int_a^b F(x)\,dx=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx.$$

Beispiel:

$f(x)=\frac{r}{h}x,\;\; x\in[0,h]$

$$V=\pi\int_0^h\left(f(x)\right)^2dx=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{\pi}{3}r^2h.$$

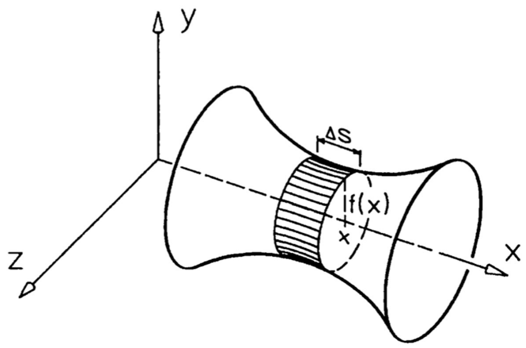
5.7.3 Mantelfläche eines Rotationskörpers

Satz 5-19:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ nichtnegative stetig differenzierbare Funktion. Rotiert die Kurve $y=f(x)$ um die x-Achse, so gilt für die Mantelfläche M des zugehörigen Rotationskörpers

$$M = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Beweisskizze:



Die Mantelfläche ΔM einer dünnen Scheibe der Dicke Δx wird mit

$$r=f(x),\ \ \Delta s=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2},\ \ U(x)=2\pi f(x)$$

angenähert durch

$$\Delta M = U(x)\,\Delta s = 2\pi f(x)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} = 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(\Delta y/\Delta x\right)^2}\,\Delta x.$$

Summation und Grenzübergang liefert mit

$$dM = 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

schließlich

$$M=\int dM = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Beispiel:

$f(x) = r\,e^x,\ \ x \in [0,h]$

$$M = 2\pi \int_0^h f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = 2\pi \int_0^h r\,e^x \sqrt{1+(r\,e^x)^2}\;dx$$

Substitution: $t = re^x,\ dt = re^x dx,\ dx = dt/t$

$$M = 2\pi \int_r^{re^h} \sqrt{1+t^2}\;dt = \pi\left\{t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right\}\Bigg|_r^{r\,e^h}$$

$$= \pi\left\{re^h\sqrt{1+r^2e^{2h}} + \ln\left(re^h+\sqrt{1+r^2e^{2h}}\right) - r\sqrt{1+r^2} - \ln\left(r+\sqrt{1+r^2}\right)\right\}.$$

5.8 Numerische Integration

5.8.1 Rechteckformel

Satz 5-20:

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und $Z = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ eine äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ mit $h = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$, dann gilt die Näherungsformel

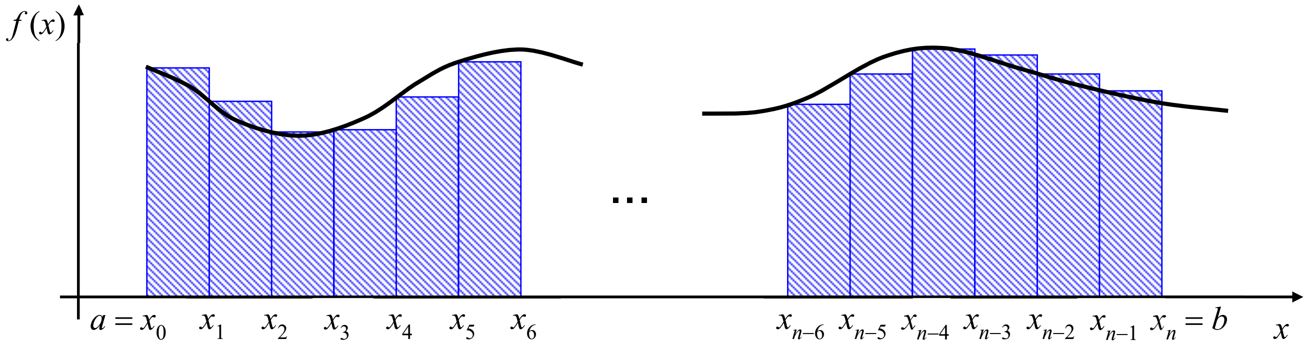
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right).$$

Beweisskizze:

Die Summen $h\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right)$ ist wegen

$$h\left(f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})\right) = h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k$$

mit $\Delta x_k = h$ und $\xi_k = x_{k-1}$ eine zur vorgegebenen Zerlegung gehörige Riemann-Summe und damit automatisch eine Näherung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx.$



Beispiel:

$$\int_0^4 x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^4 = 64$$

Für $Z = \{0,1,2,3,4\}$ liefert die Rechteckformel

$$\int_0^4 x^3 dx \approx h\left(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) = 1 \cdot (0+1+8+27) = 36.$$

Grund für die schlechte Übereinstimmung ist die große Steigung der Funktion $f(x) = x^3$.

Für $\xi_k = x_k$ bzw. $\xi_k = (x_{k-1} + x_k)/2$ erhält man die Näherung

$$\int_0^4 x^3 dx \approx h\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)\right) = 1 \cdot (1+8+27+64) = 100$$

bzw.

$$\int_0^4 x^3 dx \approx h \sum_{k=1}^{4} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8} + \frac{125}{8} + \frac{343}{8}\right) = 62.$$

5.8.2 Trapezformel

Satz 5-21:

Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und $Z=\{x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ eine äquidistante Zerlegung von $[a,b]$ mit $h=x_k-x_{k-1}$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Ersetzt man $f(x)$ über jedem Teilintervall $[x_k,x_{k-1}]$ durch die $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ und $(x_k,f(x_k))$ verbindende Sehne, dann gilt die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Beweis:

Das Polygon der Sehnen kann durch

$$p(x)=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{h}(x-x_{k-1})+f(x_{k-1})$$

mit $x_{k-1}\le x\le x_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$ beschrieben werden.

Für die Näherungsformel gilt dann

$$\int_a^b p(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{h}(x-x_{k-1})+f(x_{k-1})\right)dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{h}\cdot\frac{(x-x_{k-1})^2}{2}+f(x_{k-1})\,x\right)\Bigg|_{x_{k-1}}^{x_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{h}\cdot\frac{(x_k-x_{k-1})^2}{2}+f(x_{k-1})(x_k-x_{k-1})\right)$$

$$=\frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(f(x_k)+f(x_{k-1})\big)=\frac{h}{2}\left(f(x_0)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(x_n)\right)$$

$$=h\left(\frac{f(x_0)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{f(x_n)}{2}\right).$$

Für $h_m = (b-a)/2^m$ kann die Näherungsformel rekursiv berechnet werden.

$$m = 0: \quad T_0 = (b-a)\left(\frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2}\right)$$

$$m = 1: \quad T_1 = \frac{b-a}{2}\left(\frac{f(a)}{2} + f(a + (2^1 - 1)h_1) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$T_m = \frac{b-a}{2^m}\left(\frac{f(a)}{2} + f(a+h_m) + \ldots + f(a + (2^m - 1)h_m) + \frac{f(b)}{2}\right)$$

Um von T_m nach T_{m+1} zu gelangen, braucht man nur den durch die Intervallhalbierung $h_{m+1} = h_m/2$ neu hinzukommenden Beitrag

$$M_m = h_m\left(f\left(a + \frac{h_m}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h_m}{2}\right) + \ldots + f\left(a + (2^{m+1} - 1)\frac{h_m}{2}\right)\right)$$

gemäß

$$T_{m+1} = \frac{1}{2}(T_m + M_m)$$

zu berücksichtigen. Deshalb berechnet man in der Praxis der Reihe nach

$$T_0, \; M_0,$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_0 + M_0), \; M_1,$$

$$T_2 = \frac{1}{2}(T_1 + M_1), \; M_2,$$

$$\vdots$$

bis sich T_m und T_{m+1} nicht mehr merklich unterscheiden.

Beispiel:

$$\int_0^4 x^3 dx = 64$$

$$T_0 = 4\cdot\left(\frac{0^3}{2}+\frac{4^3}{2}\right)=128, \qquad M_0 = 4\cdot(2^3)=32$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\cdot\big(128+32\big)=80, \qquad M_1 = 2\cdot(1^3+3^3)=56$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\cdot\big(80+56\big)=68, \qquad M_2 = 1\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{3}{2}\right)^3+\left(\frac{5}{2}\right)^3+\left(\frac{7}{2}\right)^3\right)=62$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\cdot\big(68+62\big)=65, \qquad M_3 = \frac{1}{2}\cdot\left(\left(\frac{1}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{5}{4}\right)^3+\left(\frac{7}{4}\right)^3+\right.$$

$$\left.\left(\frac{9}{4}\right)^3+\left(\frac{11}{4}\right)^3+\left(\frac{13}{4}\right)^3+\left(\frac{15}{4}\right)^3\right)=63.5$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\cdot\big(65+63.5\big)=64.25, \quad M_4 = \cdots$$

5.8.3 Simpsonsche Regel

<u>Satz 5-22:</u> (*Keplersche Fassregel*)
Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und $Z=\{x_0,x_1,x_2\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit $x_0=a,\ x_1=(a+b)/2,\ x_2=b$ und demzufolge $h=(b-a)/2$. Ersetzt man $f(x)$ durch eine Parabel

$$g(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$$

die durch die Punkte $(x_0,f(x_0))$, $(x_1,f(x_1))$ und $(x_2,f(x_2))$ geht, dann gilt die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\big(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\big).$$

<u>*Beweis:*</u>

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (\alpha x^2+\beta x+\gamma)\,dx = \frac{\alpha}{3}x^3+\frac{\beta}{2}x^2+\gamma x\Big|_a^b =$$

$$=\frac{\alpha}{3}(b^3-a^3)+\frac{\beta}{2}(b^2-a^2)+\gamma\,(b-a)$$

$$=\frac{1}{6}(b-a)\left(2\alpha\,(b^2+ab+a^2)+3\beta(b+a)+6\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(b-a\right)\left(\alpha(a+b)^2+\alpha b^2+\alpha a^2+2\beta(a+b)+\beta b+\beta a+4\gamma+\gamma+\gamma\right)$$

$$=\frac{1}{6}\left(b-a\right)\left\{\alpha a^2+\beta a+\gamma+\alpha b^2+\beta b+\gamma+4\left(\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\beta\left(\frac{a+b}{2}\right)+\gamma\right)\right\}$$

$$=\frac{b-a}{6}\left(g(a)+g(b)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$$

Die Simpsonsche Regel erhält man aus der Keplerschen Fassregel, wenn man das Intervall $[a,b]$ in $n=2m$ gleiche Teilintervalle zerlegt und auf zwei benachbarte Teilintervalle die Keplersche Fassregel anwendet.

<u>Satz 5-23:</u> (*Simpsonsche Regel*)
Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar auf $[a,b]$ und $Z=\{x_0,x_1,\ldots,x_{2m}\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ in eine gerade Anzahl $n=2m$ gleicher Teilintervalle. Ersetzt man $f(x)$ durch Parabeln

$$g_k(x)=\alpha_k x^2+\beta_k x+\gamma_k$$

die für $k=1,...,m$ durch die Punkte $(x_{2k-2},f(x_{2k-2}))$, $(x_{2k-1},f(x_{2k-1}))$ und $(x_{2k},f(x_{2k}))$ gehen, dann gilt die Näherungsformel

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6m}\Big\{f(x_0)+4\big[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{2m-1})\big]$$
$$+2\big[f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{2m-2})\big]+f(x_{2m})\Big\}.$$

<u>Beweis:</u>
Zunächst gilt

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx.$$

Anwenden der Keplerschen Fassregel liefert

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_2} g_1(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} g_2(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} g_m(x)\,dx =$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big) + \frac{x_4 - x_2}{6}\big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{x_{2m} - x_{2m-2}}{6}\big(f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})\big)$$

wegen

$$x_2 - x_0 = x_4 - x_2 = \ldots = x_{2m} - x_{2m-2} = (b-a)/m$$

folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6m}\Big\{f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{2m-1})\big)$$

$$+ 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{2m-2})\big) + f(x_{2m})\Big\}.$$

Beispiel:

$$\int_0^4 x^3 dx = 64,\ \ Z = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$\Rightarrow\ n = 4$ und wegen $n = 2m\ \Rightarrow\ m = 2$, so dass

$$\int_0^4 x^3 dx \approx \frac{4-0}{6\cdot 2}\Big\{f(0) + 4\cdot\big(f(1) + f(3)\big) + 2\cdot f(2) + f(4)\Big\} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\big(0 + 4\cdot(1+27) + 2\cdot 8 + 64\big) = \frac{1}{3}\cdot 192 = 64.$$

Anmerkung:

Ist $f(x)$ ein Polynom 2ten oder 3ten Grades, dann liefert die Keplersche Fassregel und damit auch die Simpsonsche Regel den exakten Integralwert.

Für Polynome 2ten Grades ist dies, wegen der der Keplerschen Fassregel zugrunde liegenden Parabelinterpolation, leicht einzusehen.

Auf den Beweis bei Polynomen 3ten Grades wird auf die Literatur, z.B. Mangoldt/Knopp: Einführung in die höhere Mathematik, verwiesen.

Aufgabe 5-1: Berechnen Sie die folgenden Integrale durch Substitution.

a) $\int \sqrt{16-x^2}\, dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{3+2x+x^2}} dx$

c) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

d) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

Aufgabe 5-2: Berechnen Sie die folgenden Integrale vom Typ $\int f'(x)/f(x)\,dx$.

a) $\int \frac{6x^2+4}{x^3+2x+1} dx$

b) $\int \tan(3x)\, dx$

Aufgabe 5-3: Berechnen Sie die folgenden Integrale durch partielle Integration.

a) $\int x \cdot e^{3x} dx$

b) $\int x^2 \cdot \sin(4x)\, dx$

Aufgabe 5-4: Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Integrale

a) $\int \frac{-3x^3+12x^2-6x+7}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4} dx,$

b) $\int \frac{x^3+5x^2+4x+8}{x^2(x^2+4)} dx.$

Aufgabe 5-5: Berechnen Sie die folgenden Integrale vom Typ $\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx$ durch Substitution der Art $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

a) $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-\sqrt{x-1}} dx$

b) $\int \frac{x}{\sqrt[4]{3x+2}} dx$

Aufgabe 5-6: Berechnen Sie die folgenden Integrale vom Typ $\int R(e^x)\,dx$ durch Substitution.

a) $\int \frac{e^x}{1+3e^x}\,dx$

b) $\int \frac{e^x-1}{e^x+2}\,dx$

Aufgabe 5-7: Berechnen Sie die folgenden Integrale vom Typ $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ durch Substitution.

a) $\int \frac{1}{\cos x}\,dx$

b) $\int \frac{1+\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

Aufgabe 5-8: Berechnen Sie die folgenden Integrale vom Typ $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ durch Substitution der Art $t + x\sqrt{a} = \sqrt{ax^2+bx+c}$.

a) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-3x+5}}\,dx$

b) $\int \frac{x - \sqrt{x^2-5x+1}}{x^2}\,dx$

Aufgabe 5-9: Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale (falls sie existieren).

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

b) $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2x}\,dx$

Aufgabe 5-10: Berechnen Sie die Cauchyschen Hauptwerte der folgenden uneigentlichen Integrale (falls sie existieren).

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+3}\,dx$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$

Aufgabe 5-11: Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

a) $\int\limits_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\int\limits_0^2 \frac{1}{(x-1)^4}\,dx$

c) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2+e^x}\,dx$

d) $\int\limits_1^\infty \frac{\sqrt{x}+5}{x}\,dx$

Aufgabe 5-12: Berechnen Sie die Bogenlänge des Kurvenstücks

a) $y = x\sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 8,$

b) $x(t) = \ln t, \quad y(t) = 2\sqrt{t}, \quad 3 \le t \le 8.$

Aufgabe 5-13: Berechnen Sie das Volumen und die Mantelfläche des durch

$$y = \sqrt{5-x}, \quad 0 \le x \le 5$$

bzw. das Volumen und die Oberfläche des durch

$$y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$$

definierten Rotationskörpers.