Höhere Mathematik 2

Kapitel 6

Reihen

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 2

Kapitel 6

Inhaltsverzeichnis

6 Reihen

6.1 Unendliche Reihen

6.1.1 Einführung

Unendliche Reihen sind Spezialfälle von Folgen.

Definition 6-1:

Gegeben sei eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann kann man hieraus eine neue Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ bilden. Die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennt man unendliche Reihe und schreibt dafür $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Besitzt die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $s \in \mathbb{R}$, so sagt man $\sum_{i=1}^{n} a_i$ ist konvergent mit dem Grenzwert s, also

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = s.$$

Andernfalls heißt die unendliche Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergent. Das n-te Folgenglied s_n heißt n-te Partialsumme der unendlichen Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Beispiel:

1) Geometrische Reihe, $q \in \mathbb{R}$ fest, $n_0 \in \mathbb{N}_0$ fest.

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} q^k = \frac{q^{n_0}}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1$$

und für den Spezialfall $n_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{falls } |q| < 1.$$

2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + ... = 1$, denn

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent (harmonische Reihe), denn

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$$

(s_n) ist monoton wachsend, weil $s_{n+1} = s_n + 1/(n+1) > s_n$

(s_n) ist unbeschränkt, denn

$$s_1 = 1,\ s_2 - s_1 = \frac{1}{2},\ s_4 - s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$s_8 - s_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2},\ \text{usw.}$$

Allgemein gilt

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$s_{2^n} = s_1 + (s_2 - s_1) + (s_4 - s_2) + (s_8 - s_4) + \ldots + (s_{2^n} - s_{2^{n-1}})$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\Rightarrow$ (s_{2^n}) ist nicht beschränkt und da Teilfolge von (s_n) $\Rightarrow$ (s_n) ist nicht beschränkt $\Rightarrow$ (s_n) ist divergent $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ ist divergent.

6.1.2 Eigenschaften unendlicher Reihen

Satz 6-1:

Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zwei unendliche Reihen und $c \in \mathbb{R}$, dann gilt:

a) Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, d.h. (a_n) ist eine Nullfolge.
(Diese Eigenschaft gilt nicht umgekehrt, es ist ein notwendiges, aber kein hinreichendes Konvergenzkriterium für unendliche Reihen.)

b) Sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ sind konvergent mit

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Beweis:

a) $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i,\ \lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$

$$\Rightarrow\ 0 \le |a_n| = |s_n - s_{n-1}| \le |s_n - s| + |s - s_{n-1}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

b) folgt aus den entsprechenden Eigenschaften für die Folgen (s_n).

Anmerkung:

Das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt, dass die Umkehrung von a) nicht gilt, denn $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ist divergent, obwohl $(1/n)$ eine Nullfolge, d.h. $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$ ist.

6.1.3 Konvergenzkriterien

Bei vielen Reihen ist es schwierig, die Konvergenz direkt über die Konvergenz der Partialsummenfolge nachzuweisen, wenn man keinen geschlossenen Ausdruck für $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ findet.

Um trotzdem Angaben über die Konvergenz oder Divergenz machen zu können, werden Konvergenzkriterien benötigt.

<u>Satz 6-2:</u> (*hinreichende Konvergenzkriterien*)

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine unendliche Reihe, die auf Konvergenz oder Divergenz untersucht werden soll und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Vergleichsreihe, von der man weiß, ob sie konvergent oder divergent ist.

a) <u>Majoranten- / Minorantenkriterium</u>

Gilt $|a_n| \le b_n \;\; \forall n \ge n_0$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Gilt $0 \le b_n \le a_n \;\; \forall n \ge n_0$ und ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

b) <u>Quotientenkriterium</u>

Gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1 \;\; \forall n \ge n_0$ mit $0 < q < 1$ oder $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

Gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Im Fall $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$ ist keine der Aussagen möglich.

c) <u>Wurzelkriterium</u>

Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \le q < 1 \;\; \forall n \ge n_0$ mit $0 < q < 1$ oder $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Im Fall $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ist keine der Aussagen möglich.

Beweis:

a) Sei $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $t_n = \sum_{i=1}^{n} b_i$ mit $t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t$

$\Rightarrow$ für $m > n \geq n_0$, $|s_m - s_n| = |a_m + a_{m-1} + ... + a_{n+1}|$

$$\leq b_m + b_{m-1} + ... + b_{n+1} = t_m - t_n < \varepsilon$$

$\Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon \quad \forall m, n > N_\varepsilon \Rightarrow (s_n)$ ist Cauchy-konvergent

$\Rightarrow (s_n)$ ist konvergent.

Da $b_n \geq 0 \Rightarrow t_n = \sum_{i=n_0}^{n} b_i$ ist monoton wachsend.

Ist $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ divergent $\Rightarrow (t_n)$ ist unbeschränkt für $n \to \infty$.

Da $a_n \geq b_n \Rightarrow s_n = \sum_{i=n_0}^{n} a_i \geq t_n$ ist unbeschränkt für $n \to \infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

b) Sei $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1 \;\; \forall n \geq n_0$

$$\Rightarrow \left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \leq q^{n-n_0} \quad \text{für } n > n_0$$

$\Rightarrow |a_n| \leq \dfrac{|a_{n_0}|}{q^{n_0}} q^n = Kq^n$ für $n > n_0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergent für

$0 < q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent.

Ist $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1)$ mit $|a_{n+1}/a_n| \leq q < 1 \;\; \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) konvergent.

Ist $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| > 1 \Rightarrow \exists r > 1$ mit $|a_{n+1}/a_n| \geq r > 1 \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_{n+1}| > |a_n| \ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n$ keine Nullfolge

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

c) Sei $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow |a_n| \leq q^n \ \forall n \geq n_0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergent

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) kovergent.

Ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1)$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist (absolut) kovergent.

Ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \Rightarrow \exists r > 1$ mit $\sqrt[n]{|a_n|} \geq r \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow |a_n| > r^n \Rightarrow a_n$ keine Nullfolge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent.

Anmerkung:

In allen Konvergenzfällen des obigen Satzes konvergiert sogar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann heißt die unendliche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ absolut konvergent. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ absolut konvergent } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

Beispiel:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergent, denn $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergent, denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n/2^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}/2 = 1/2 < 1$.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3}$ divergent, denn $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3^n/n^3|} = \lim_{n\to\infty} 3\Big/\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 3 > 1$.

4) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ konvergent genau dann, wenn $|q| < 1$, denn

$\sqrt[n]{|q^n|} = |q| \xrightarrow[n\to\infty]{} |q|$, also gilt

$|q| < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergent,

$|q| > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergent,

$|q| = 1 \Rightarrow q^n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ divergent.

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ divergent, denn $(-1)^n \not\to 0$ (keine Nullfolge).

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ konvergent für $k \geq 2$, denn $\left|\frac{1}{n^k}\right| \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ $\forall n \geq 2$ und da

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ ist konvergent für $k \geq 2$.

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ ist sogar für } k > 1 \text{ konvergent} \right)$

Bei diesem Beispiel ist das Wurzel- und das Quotientenkriterium nicht anwendbar, denn

$\sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ Wurzelkriterium nicht anwendbar

und

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ Quotientenkriterium nicht anwendbar.

Satz 6-3: (*Folgerungen aus dem Majorantenkriterium*)

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ die zu untersuchende Reihe und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine Vergleichsreihe mit $b_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Gilt $\lim_{n\to\infty} |a_n| / b_n = L$ mit $0 \le L < \infty$ dann folgt aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Gilt $\lim_{n\to\infty} a_n / b_n = L$ mit $0 < L \le \infty$ dann folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis:

a) $L = 0 \;\Rightarrow\; 0 \le |a_n|/b_n \le 1 \;\; \forall n \ge n_0 \;\Rightarrow\; |a_n| \le b_n \;\; \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow$ Majorantenkriterium anwendbar.

$0 < L < \infty \;\Rightarrow\; L/2 \le |a_n|/b_n \le 3L/2 \;\; \forall n \ge n_0 \;\Rightarrow\; (L/2)b_n \le |a_n| \le (3L/2)b_n$ $\forall n \ge n_0 \;\Rightarrow$ Majorantenkriterium anwendbar.

b) $0 < L < \infty \;\Rightarrow\; L/2 \le a_n/b_n \le 3L/2 \;\; \forall n \ge n_0 \;\Rightarrow\; (L/2)\, b_n \le a_n \;\; \forall n \ge n_0$

$\Rightarrow$ Majorantenkriterium für Divergenz anwendbar.

Für $L = \infty$ erfolgt der Beweis analog zum Fall $L = 0$ in a).

Beispiel:

1) $a_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{6n^4 + 5n + 6}$, $b_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4 - 3n^3 + 5n^2}{6n^4 + 5n + 6} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{6n^4 + 5n + 6} \text{ ist kovergent.}$$

2) $a_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{4n^3 + 6}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 5n}{4n^3 + 6} = \frac{1}{2} > 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{4n^3 + 6} \text{ ist divergent.}$$

Aus den Konvergenzkriterien erhält man nicht den Wert der Reihe. Zur approximativen Berechnung des Reihenwertes bestimmt man den Wert der Partialsumme $s_{n_0} = \sum_{n=1}^{n_0} a_n$ und ermittelt für den Fehler $R_{n_0} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ eine Abschätzung.

<u>Fehlerabschätzung:</u>

a) Gilt $\left|a_{n+1}/a_n\right| \le q < 1$ für alle $n \ge n_0$ so gilt die Fehlerabschätzung

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| \le \left|a_{n_0}\right| \frac{q}{1-q}.$$

b) Gilt $\sqrt[n]{\left|a_n\right|} \le q < 1$ für alle $n \ge n_0$ so gilt die Fehlerabschätzung

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| \le q^{n_0} \frac{q}{1-q}.$$

<u>Beweis</u>:

a) $$\left|\frac{a_n}{a_{n_0}}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\right| \le q^{n-n_0} \quad \forall n \ge n_0 \;\Rightarrow\; \left|a_n\right| \le \frac{\left|a_{n_0}\right|}{q^{n_0}} q^n \quad \forall n \ge n_0$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left|a_n\right| \le \frac{\left|a_{n_0}\right|}{q^{n_0}} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} q^n = \frac{\left|a_{n_0}\right|}{q^{n_0}} \frac{q^{n_0+1}}{1-q} = \left|a_{n_0}\right| \frac{q}{1-q}.$$

b) $$\sqrt[n]{\left|a_n\right|} \le q \quad \forall n \ge n_0 \;\Rightarrow\; \left|a_n\right| \le q^n \quad \forall n \ge n_0$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{n_0} a_n\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left|a_n\right| \le \sum_{n=n_0+1}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0+1}}{1-q} = q^{n_0} \frac{q}{1-q}.$$

Beispiel:

1) $s=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},\quad \left|s-\sum_{n=0}^{n_0}\frac{1}{n!}\right|\le\frac{1}{n_0!}\frac{q}{1-q}$ mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n_0+1}=q$

für alle $n\ge n_0$, da $1-q=1-1/(n_0+1)=n_0/(n_0+1)$ also

$$\frac{q}{1-q}=\frac{1}{n_0}\quad\Rightarrow\quad\left|s-\sum_{n=0}^{n_0}\frac{1}{n!}\right|\le\frac{1}{n_0!n_0}.$$

Für Fehler $<10^{-8}$ muss gelten $1/(n_0!n_0)<10^{-8}\ \Rightarrow\ n_0=11$ und somit

$$s=\sum_{n=0}^{11}\frac{1}{n!}+R_{11}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{11!}+R_{11}$$
$$=2{,}7182818+R_{11}\ \text{ mit }\ |R_{11}|<10^{-8}.$$

2) $s=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n4^n},\quad \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n4^n}\right|}=\frac{1}{\sqrt[n]{n}\,4}\le\frac{1}{4}=q$ für alle $n\ge 1$, da $\frac{q}{1-q}=\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow\left|s-\sum_{n=1}^{n_0}\frac{1}{n4^n}\right|\le\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0}\frac{1}{3}<10^{-8}\ \Rightarrow\ n_0=13\ \text{ und damit schließlich}$$

$$s=\sum_{n=1}^{13}\frac{1}{n4^n}+R_{13}=0{,}2876821+R_{13}\ \text{ mit }\ |R_{13}|<10^{-8}.$$

$$\left(s=-\ln(1-1/4)=-\ln(3/4)=\ln 4-\ln 3\right)$$

Satz 6-4: (*Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen*)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n,\ a_n>0$ für alle $n\in\mathbb{N}_0$. Eine solche Reihe heißt alternierende Reihe. Ist $(a_n)_{n\ge 0}$ eine monoton fallende Nullfolge, dann gilt $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ ist konvergent und für den Grenzwert $s=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ gilt die Fehlerabschätzung $\left|s-\sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n a_n\right|\le a_{n_0+1}$.

Beweis:

$s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n$, also ist

$s_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}) \geq 0$ und

$s_{2n+3} = s_{2n+1} + (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \geq s_{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \big((a_n) \text{ monoton fallend}\big)$

$\Rightarrow (s_{2n+1})$ ist monoton wachsend,

$s_{2n} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) \leq a_0$ und

$s_{2n+2} = s_{2n} - (a_{2n+1} - a_{2n+2}) \leq s_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \ \big((a_n) \text{ monoton fallend}\big)$

$\Rightarrow (s_{2n})$ ist monoton fallend.

Da $0 \leq s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1} \leq s_{2n} \leq a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow (s_{2n})$ und (s_{2n+1}) sind auch beschränkt.

Aus der Monotonie und Beschränktheit folgt die Konvergenz und

$\exists s, t \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s, \ \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = t.$

Also gilt $|s-t| \leq |s - s_{2n}| + |s_{2n} - s_{2n+1}| + |s_{2n+1} - t| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, denn

$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \big((a_n) \text{ Nullfolge}\big) \Rightarrow s = t.$

Da $0 \leq s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n} \leq a_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow 0 \leq s_{2n} - s \leq s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}$ und $0 \leq s - s_{2n+1} \leq s_{2n+2} - s_{2n+1} = a_{2n+2}$

$\Rightarrow |s_{2n} - s| \leq a_{2n+1}$ und $|s - s_{2n+1}| \leq a_{2n+2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow |s - s_n| \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$

Beispiel:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ ist konvergent, denn

$a_n = \frac{1}{n+1}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

Ist s der Reihenwert, dann gilt für $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\left| s - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n}{n+1} \right| \le \frac{1}{n_0 + 2}.$$

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergent ist.

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots$ ist konvergent, denn $a_n = \dfrac{1}{n!}$ ist eine monoton fallende Nullfolge. Für den Reihenwert s gilt

$$\left| s - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(-1)^n}{n!} \right| \le \frac{1}{(n_0 + 1)!} < 10^{-8} \;\Rightarrow\; n_0 = 11$$

und somit

$$s = \sum_{n=0}^{11} \frac{(-1)^n}{n!} + R_{11} = 0,3678794 + R_{11} \;\text{ mit }\; |R_{11}| < 10^{-8} \;\; (s = 1/e).$$

6.1.4 Eigenschaften absolut konvergenter Reihen

Anordnung einer Reihe

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$$

ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Die Reihe lässt sich nicht anders anordnen, denn z.B.

$$(1 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + \ldots) - (1/2 + 1/4 + 1/6 + 1/8 \ldots)$$

ist divergent, da beide Klammerausdrücke divergent sind.

Satz 6-5: (*Umordnungssatz*)

Ist eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent mit dem Reihenwert s, dann konvergiert jede aus $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ durch Umordnung der Glieder entstehende Reihe ebenfalls gegen s.

Multiplikation von absolut konvergenten Reihen

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen, dann gilt für das Produkt

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) &= (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)(b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots) \\
&= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_0 b_3 + \ldots \\
&\quad + a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \ldots \\
&\quad + a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \ldots \\
&\quad + a_3 b_0 + a_3 b_1 + a_3 b_2 + a_3 b_3 + \ldots \\
&\quad + \ldots \\
&\quad \vdots \\
&= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) \\
&\quad + (a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0) + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.
\end{aligned}
$$

Cauchy-Produkt

$$
\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}
$$

Satz 6-6:

Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Dann ist auch das Cauchy-Produkt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ absolut konvergent.

Beispiel:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$

Beide Reihen sind absolut konvergent, denn

$$
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1} n!}{(n+1)!\, x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1.
$$

Also gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(x+y)^n}{n!}\right).$$

Die e-Funktion kann auch durch

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

definiert werden. Wir haben mit Hilfe des Cauchy-Produktes somit

$$e^x e^y = e^{(x+y)} \quad \text{für} \quad x,y\in\mathbb{R}$$

gezeigt.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$ falls $|x|<1$ (absolute Konvergenz, geometrische Reihe)

Also gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k x^{n-k}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{falls} \quad |x|<1$$

hieraus folgt wiederum

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{falls} \quad |x|<1.$$

6.2 Potenzreihen

6.2.1 Einführung

Definition 6-2:

Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Entwicklungspunkt. Die unendliche Reihe

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

heißt Potenzreihe um x_0. Für alle $x \in \mathbb{R}$, für die diese Reihe konvergiert, ist damit die Funktion $f(x)$ definiert mit

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \ \text{ konvergent} \right\}$$

und

$$f : D(f) \to \mathbb{R} \ \text{ bzw. } \ x \mapsto \text{Reihenwert} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

In Anwendungen ist oftmals $x_0 = 0$, also

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

falls konvergent.

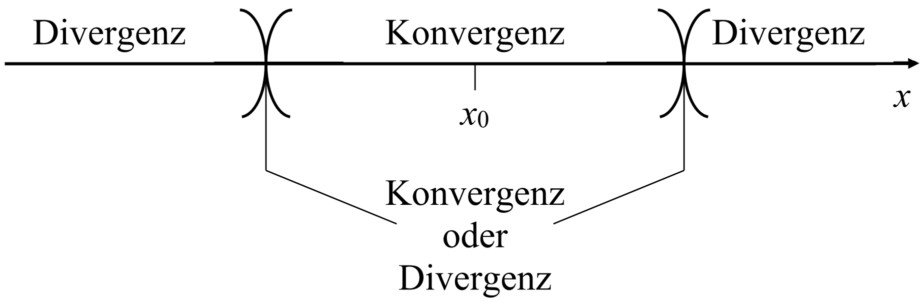
Beispiel:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ falls $|x| < 1$.

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergent, also ist f mit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion $\left(f(x) = e^x \right)$.

6.2.2 Eigenschaften von Potenzreihen

Zu jeder Potenzreihe gibt es ein Intervall um x_0, so dass die Potenzreihe für alle x aus dem Inneren des Intervalls konvergiert und für alle x außerhalb dieses Intervalls divergiert. An den Intervallgrenzen kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.



Satz 6-7:

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe um x_0. Dann existiert eindeutig ein r mit $0 \le r \le \infty$, so dass gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$|x - x_0| < r$ konvergiert die Reihe absolut bzw.

$|x - x_0| > r$ divergiert die Reihe.

Im Fall

$r = 0$ konvergiert die Reihe nur für $x = x_0$ bzw.

$r = \infty$ konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut.

r heißt Konvergenzradius der Potenzreihe.

Beweis:

Nur für den in Anwendungen häufigen Fall, dass $\lim_{n\to\infty} \left| a_{n+1} / a_n \right| = K$ mit $0 \le K \le \infty$ existiert.

Anwenden des Quotientenkriteriums liefert

$$\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x-x_0| \xrightarrow[n\to\infty]{} K|x-x_0|$$

Falls $K\,|x-x_0| < 1 \;\Rightarrow\;$ Konvergenz

$K\,|x-x_0| > 1 \;\Rightarrow\;$ Divergenz

$K\,|x-x_0| = 1 \;\Rightarrow\;$ es kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

Demzufolge gilt

$$r = \begin{cases} 1/K & \text{für } 0 < K < \infty \\ 0 & \text{für } K = \infty \\ \infty & \text{für } K = 0 \end{cases}$$

und damit $|x-x_0| < r \;\Rightarrow\;$ Konvergenz

$|x-x_0| > r \;\Rightarrow\;$ Divergenz

$|x-x_0| = r \;\Rightarrow\;$ es kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

Beispiel:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $\sqrt[n]{|x^n|} = \sqrt[n]{|x|^n} = |x| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x| < 1 \;\Rightarrow\;$ Konvergenzradius $r = 1$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!\,x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1 \;\Rightarrow\;$ Konvergenzradius $r = \infty$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$, $\left|\frac{(x-1)^{n+1}n}{(n+1)(x-1)^n}\right| = \frac{n}{n+1}|x-1| \xrightarrow[n\to\infty]{} |x-1| < 1$

$\Rightarrow\; r = 1 \;\Rightarrow\;$ konvergent für $|x-1| < 1$, d.h. $0 < x < 2$

$\Rightarrow\;$ divergent für $|x-1| > 1$, d.h. $x < 0$, $x > 2$

für $x = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent

$x = 2 \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konvergent (Leibniz-Kriterium)

6.2.3 Rechenregeln für Potenzreihen

Satz 6-8:

Sind $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien r_a und r_b, dann gilt

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$$
für $|x-x_0| < \min\{r_a, r_b\}$,

b) $$c\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c\, a_n (x-x_0)^n, \quad c \in \mathbb{R}$$
für $|x-x_0| < r_a$,

c) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n$$
für $|x-x_0| < \min\{r_a, r_b\}$.

Beweis:

a) und b) folgen aus Punkt b) des Satzes 6-1.

c) Potenzreihen sind im Inneren ihres Konvergenzintervalls absolut konvergent, vgl. Satz 6-7. Also folgt mit dem Cauchy-Produkt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k b_{n-k} (x-x_0)^{n-k}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n$$

die Behauptung aus Satz 6-6.

Anmerkung:

Für die Konvergenzradien der Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x-x_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)(x-x_0)^n$ aus Satz 6-8 a) und c) gilt $r \geq \min\{r_a, r_b\}$.

6.3 Gleichmäßige Konvergenz

6.3.1 Funktionenfolgen

Definition 6-3:
Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge $(f_n): I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und f eine Funktion $f: I\to\mathbb{R}$

a) Die Funktionenfolge (f_n) heißt punktweise konvergent auf I gegen f genau dann, wenn für jedes $x\in I$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Die Funktionenfolge (f_n) heißt gleichmäßig konvergent auf I gegen f genau dann, wenn für jedes beliebig kleine $\varepsilon > 0$ und für alle $x\in I$ ein gemeinsames $N_\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt

$$n > N_\varepsilon \;\Rightarrow\; \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon \text{ für alle } x\in I.$$

Beispiel:

1) $f_n : [0,1]\to\mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n$

a) Punktweise Konvergenz

Sei $x\in[0,1) \Rightarrow f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, da $|x|<1$.

Sei $x = 1 \Rightarrow f_n(1) = 1^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, also konvergiert (f_n) punktweise auf $[0,1]$ gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0\le x<1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

b) Gleichmäßige Konvergenz

Keine gleichmäßige Konvergenz auf [0,1], denn

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = 1 \not\to 0 \text{ für } n\to\infty$$

aber gleichmäßige Konvergenz auf $[0,q]$ mit $0 < q < 1$, denn

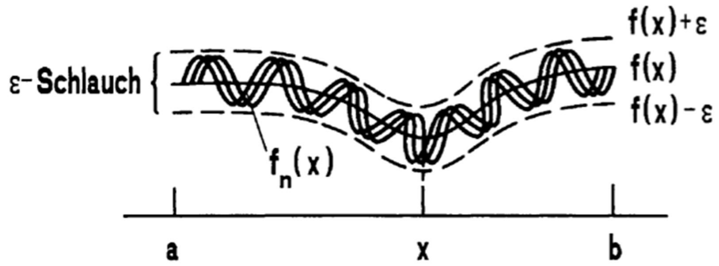
$$\sup_{x\in[0,q]} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \sup_{x\in[0,q]} \left|x^n - 0\right| = q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n / n$

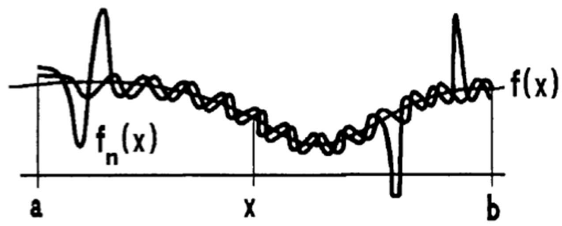
(f_n) konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, denn

$$\sup_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| x^n/n - 0 \right| = \sup_{x\in[0,1]} \left| x^n/n \right| \le 1/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Gleichmäßige Konvergenz besagt, dass für ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ ein N_ε existiert, so dass alle f_n mit $n > N_\varepsilon$ in einem "ε-Schlauch" um die Grenzfunktion f liegen müssen.



gleichmäßig



nicht gleichmäßig

Satz 6-9:

(f_n) konvergiert gleichmäßig auf I gegen $f \Rightarrow (f_n)$ konvergiert punktweise auf I gegen f. (Umkehrung gilt nicht!)

Beweis:

$$\underbrace{\sup_{x\in I} \left| f_n(x) - f(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}_{\text{gleichmäßige Konvergenz}} \Rightarrow \underbrace{\left| f_n(x) - f(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \;\; \forall x \in I}_{\text{punktweise Konvergenz}}$$

Satz 6-10:

Sind alle Funktionen f_n auf dem Intervall I stetig und konvergiert die Folge (f_n) auf I gleichmäßig gegen f, dann ist auch f stetig auf I. Also gilt für alle $x_0 \in I$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

(Grenzwerte dürfen vertauscht werden)

Beweis:

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es für beliebiges $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in I$ und $n > N_\varepsilon$. Damit erhält man für beliebige $x, x_0 \in I$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< |f_n(x) - f_n(x_0)| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da f_n stetig folgt für $x \to x_0$ auch $f(x) \to f(x_0)$.

Satz 6-11:

Konvergiert die Folge stetiger Funktionen (f_n) auf dem Intervall I gleichmäßig gegen $f: I \to \mathbb{R}$, dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Grenzwert und Integration dürfen vertauscht werden)

Beweis:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \\ &\le \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|(b-a) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Satz 6-12:

Sind die Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ stetig differenzierbar auf I und konvergiert die Folge (f_n) punktweise und die Folge der Ableitungen (f_n') gleichmäßig auf I, dann ist die Grenzfunktion

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

differenzierbar auf I und es gilt

$$f'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Beweis:

Aus der gleichmäßigen Konvergenz (f_n') folgt die Stetigkeit der Grenzfunktion $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. Die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integration, vgl. Satz 6-11, und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefern für $a, x \in I$

$$\int_a^x g(t)\,dt = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty}\big(f_n(x) - f_n(a)\big) = f(x) - f(a).$$

Wegen der Stetigkeit von $g(x)$ ist $\int_a^x g(t)\,dt$ nach x differenzierbar und es gilt

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))' = f'(x).$$

Beispiel:

1) $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}, \quad f_n'(x) = \dfrac{\cos nx}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ punktweise Konvergenz}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\cos nx}{n} - g(x) \right| \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \; f_n'(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x) \text{ gleichmäßig konvergent}$$

also gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin nx}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos nx}{n} = 0$$

2) $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$, $f_n'(x) = \dfrac{n^2 \cos n^2 x}{n} = n \cos n^2 x$ divergent

und es gilt

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2 x}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin n^2 x}{n}\right),$$

da

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^2 x}{n}\right) = \frac{d}{dx} 0 = 0 \text{ konvergent}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin n^2 x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cos n^2 x \text{ divergent.}$$

6.3.2 Funktionenreihen

Definition 6-4:

Eine Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ der Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$ heißt punktweise bzw. gleichmäßig konvergent auf I, wenn die Folge der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ punktweise bzw. gleichmäßig auf I gegen eine Grenzfunktion $s : I \to \mathbb{R}$ konvergiert, d.h.

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x).$$

Beispiel:

$f_k : (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = x^k$

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

a) punktweise Konvergenz

$$s_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-x} = s(x)$$

$\Rightarrow$ (s_n) konvergiert punktweise auf $(-1,1)$ gegen s mit $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

b) gleichmäßige Konvergenz

$$\sup_{x\in(-1,1)} \left|s_n(x) - s(x)\right| \geq \left|s_n\left(1-\frac{1}{n}\right) - s\left(1-\frac{1}{n}\right)\right| = \left|\frac{1-\left(1-1/n\right)^{n+1}}{1-\left(1-1/n\right)} - \frac{1}{1-\left(1-1/n\right)}\right|$$

$$= n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} \not\to 0, \text{ da } \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$\Rightarrow$ keine gleichmäßige Konvergenz auf $(-1,1)$, aber gleichmäßige Konvergenz auf $[-q,q]$ für alle $q \in (0,1)$ fest, denn

$$\sup_{x\in[-q,q]} \left|s_n(x) - s(x)\right| = \sup_{x\in[-q,q]} \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right|$$

$$= \sup_{x\in[-q,q]} \frac{\left|x\right|^{n+1}}{\left|1-x\right|} \leq \frac{q^{n+1}}{1-q} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

da $\left|1-x\right| = 1-x \geq 1-q \quad \forall x \in [-q,q]$.

<u>Satz 6-13:</u>

(*Majorantenkriterium für gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen*)
Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Reihe von Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen mit $b_k > 0$. Gilt $\left|f_k\right| \leq b_k$ für alle $k \geq n_0 \in \mathbb{N}_0$ und für alle $x \in I$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ konvergiert gleichmäßig auf } I.$$

Beweis:

Da $\left|f_k(x)\right| \leq b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert punktweise auf I (Majorantenkriterium für unendliche Zahlenreihen).

Ist $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ der Grenzwert für jedes $x \in I$, d.h. $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ konvergiert punktweise auf I gegen $s(x)$ und bezeichnet $t_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, dann gilt für $m > n \geq n_0$

$$\left|s_m(x) - s_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \left|f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} b_k = t_m - t_n.$$

Da $\left|t_m - t_n\right| < \varepsilon$ für alle $m, n > N_\varepsilon$ gilt $\left|s_m(x) - s_n(x)\right| < \varepsilon$ für alle $m, n > N_\varepsilon$ und alle $x \in I.$ Aus $s_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} s(x)$ und der Stetigkeit der Betragsfunktion folgt $\left|s(x) - s_n(x)\right| < \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$ und alle $x \in I.$

$\Rightarrow$ (s_n) konvergiert gleichmäßig auf I gegen s.

Beispiel:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn

$\left|\dfrac{\sin kx}{k^2}\right| \leq \dfrac{1}{k^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ ist konvergent.

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + x^2}$ konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, denn

$\left|\dfrac{(-1)^k}{k^2 + x^2}\right| \leq \dfrac{1}{k^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ ist konvergent.

3) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ sei eine Potenzreihe um x_0 mit dem Konvergenzradius $r > 0$, dann konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig auf

jedem Intervall $I_q = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \le q\}$ mit $0 < q < r$, denn

$|a_k (x - x_0)^k| \le |a_k q^k|$ $\forall x$ mit $|x - x_0| \le q$, $\forall k \in \mathbb{N}_0$ und

$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k q^k|$ ist konvergent, da

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k q^k$ absolut konvergent für $0 < q < r$.

Satz 6-14:

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ konvergiert gleichmäßig auf jedem abgeschlossenen Teilintervall des Konvergenzintervalls

$$I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Satz 6-15:

Sind alle Funktionen $f_k : I \to \mathbb{R}$ einer unendlichen Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetig auf I und konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ gleichmäßig auf I

$\Rightarrow$ $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ ist stetig auf I und es gilt $\forall x_0 \in I$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = f(x_0)$$

(Grenzwert und unendliche Summe dürfen vertauscht werden)

Beweis:

Die Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ sind stetig auf I (endliche Summe stetiger Funktionen) und s_n konvergiert gleichmäßig auf I gegen $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ also ist $s = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$ wegen des Satzes 6-10 stetig auf I.

Satz 6-16:

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ mit dem Konvergenzradius $r > 0$ ist stetig auf ihrem Konvergenzintervall

$$I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Beweis:

Es sei $x \in I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$, dann existiert ein q mit $0 < q < r$ und $x \in I_q = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \le q\}$. Auf I_q gilt wegen Satz 6-14 gleichmäßige Konvergenz, $f_k(x) = a_k(x - x_0)^k$ ist stetig auf I_q für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $\Rightarrow$ die Grenzfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ ist stetig in x. Da $x \in I$ beliebig $\Rightarrow$ f ist stetig auf I.

Beispiel:

1) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$ ist stetig auf $(-1,1)$.

2) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

3) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k^2 + x^2}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

4) $\sin x$, $\cos x$, e^x sind stetig auf $\mathbb{R}$, da ihre Potenzreihen alle den Konvergenzradius $r = \infty$ besitzen.

Satz 6-17:

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ stetiger Funktionen f_k auf I gleichmäßig gegen $f: I \to \mathbb{R}$, dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

(Summation und Integration dürfen vertauscht werden, d.h. gleichmäßig konvergente Funktionenreihen darf man gliedweise integrieren)

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus dem entsprechenden Satz für Funktionenfolgen mit Hilfe der Partialsummenfolge.

Da eine Potenzreihe auf jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzintervalls $I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ gleichmäßig konvergiert, darf die Potenzreihe auf I gliedweise integriert werden und es gilt

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b (x - x_0)^k\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left. \frac{(x - x_0)^{k+1}}{k+1} \right|_a^b.$$

Beispiel:

1) $(\ln(1-x))' = \dfrac{-1}{1-x} = -\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad |x| < 1$

$$\Rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \int x^k\,dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} + C = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} + C.$$

Für $x = 0$ folgt

$$\ln 1 = 0 = 0 + C \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad |x| < 1.$$

2) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{1-(-x^2)} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k},\ |x|<1$

$$\Rightarrow\ \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int x^{2k}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+C.$$

Für $x=0$ folgt

$$\arctan 0 = 0 = 0 + C \ \Rightarrow\ C=0 \ \Rightarrow\ \arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1},\ |x|<1.$$

3) $e^{-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{k!},\ x\in\mathbb{R}$

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^x t^{2k}dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}x^{2k+1},\ x\in\mathbb{R}$$

ist Stammfunktion von $f(x)=e^{-x^2}$.

Satz 6-18:

Sind alle Funktionen f_k auf I stetig differenzierbar, konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ auf I punktweise gegen $f(x)$ und konvergiert die Reihe der Ableitungen $\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x)$ auf I gleichmäßig dann ist $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ differenzierbar auf I und es gilt

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x).$$

(Differentiation und Summation dürfen vertauscht werden)

Beweis:

Die Behauptung folgt sofort aus dem entsprechenden Satz für Funktionenfolgen mit Hilfe der Partialsummenfolge.

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ mit dem Konvergenzradius $r > 0$ konvergiert auf $I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$.

Die Reihe der Ableitungen $\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_0)^{k-1}$ ist wieder eine Potenzreihe mit dem gleichen Konvergenzradius r, denn mit dem Quotientenkriterium folgt für die Potenzreihe

$$\left| \frac{a_{k+1}(x-x_0)^{k+1}}{a_k (x-x_0)^k} \right| = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x-x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} K|x-x_0| < 1 \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{K}$$

und für die Reihe der Ableitungen

$$\left| \frac{(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k}{k\, a_k (x-x_0)^{k-1}} \right| = \frac{k+1}{k} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x-x_0| \xrightarrow[k\to\infty]{} K|x-x_0| < 1 \;\Rightarrow\; r = \frac{1}{K}.$$

Da eine Potenzreihe nach Satz 6-14 auf jedem abgeschlossenen Teilintervall ihres Konvergenzintervalls $I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ gleichmäßig konvergiert, ist die Reihe der Ableitungen gleichmäßig konvergent auf jedem abgeschlossenen Teilintervall von I.

Also gilt der folgende Satz für Potenzreihen.

Satz 6-19:

Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ ist in ihrem Konvergenzintervall $I = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$ stetig differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_0)^{k-1}$$

und gleichem Konvergenzradius r.

Beispiel:

1) $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x},\ |x|<1$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\,x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \frac{1}{(1-x)^2},\ |x|<1$$

$$\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} k\,x^k = \frac{x}{(1-x)^2},\ |x|<1$$

Analog kann man durch mehrmalige Differentiation geschlossene Ausdrücke für $\sum_{k=1}^{\infty} k^m x^k$ für $|x|<1$ und $m\in\mathbb{N}$ erhalten.

2) $f(x)=e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!},\ x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow\ f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\,x^{k-1}}{k!}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=e^x$$

3) $(\sin x)'=\dfrac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}=\cos x$$

$$(\cos x)'=\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2k\,x^{2k-1}}{(2k)!}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k-1}}{(2k-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}=-\sin x$$

$\Rightarrow$ $\sin x$ und $\cos x$ sind stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $(\sin x)'=\cos x$ und $(\cos x)'=-\sin x\ \ \forall x\in\mathbb{R}$.

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x=0\end{cases}$

Potenzreihe von f:

$$f(x)=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k} \quad \text{mit} \quad r=\infty$$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2k}{(2k+1)!}x^{2k-1}=-\frac{2}{3!}x+\frac{4}{5!}x^3-\ldots$$

$$\Rightarrow \; f'(0)=0$$

$$f''(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\,2k\,(2k-1)}{(2k+1)!}x^{2k-2}=-\frac{2}{3!}+\frac{12}{5!}x^2-\ldots$$

$$\Rightarrow \; f''(0)=-2/3!<0 \;\Rightarrow\; \text{relatives Maximum in } x=0$$

6.4 Taylor-Entwicklung

6.4.1 Taylor-Formel

Satz 6-20: (*Taylor-Formel, Taylor-Polynom*)
Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar auf (a,b) und $x_0\in(a,b)$. Dann lässt sich f durch das Taylor-Polynom T_{n,x_0} vom Grad $\leq n$ und das Restglied R_{n,x_0} gemäß

$$f(x)=T_{n,x_0}(x)+R_{n,x_0}(x)$$

mit

$$T_{n,x_0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \text{und} \quad R_{n,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

darstellen, wobei

$$\xi=x_0+\delta(x-x_0),\;\; 0<\delta<1$$

zwischen x_0 und x liegt.

Beweis:

$n = 0$: $\Rightarrow$ Mittelwertsatz

$n > 0$: Es sei $t \in [a,b]$ und $x \neq x_0$ fest,

$$g(t) := f(x) - T_{n,t}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$\Rightarrow g(x) = 0,\; g(x_0) = f(x) - T_{n,x_0}(x) = R_{n,x_0}(x),$$

$$g'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$\Rightarrow g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Sei $G(t) := g(t) - g(x_0)\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1}$, $(x \neq x_0)$

$$\Rightarrow G(x_0) = 0,\; G(x) = g(x) = 0.$$

Da G auf $[a,b]$ differenzierbar und damit auch stetig, folgt aus dem Satz von Rolle

$\exists \xi \in (a,b)$ mit $G'(\xi) = 0$

$$G'(\xi) = g'(\xi) + g(x_0)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = 0$$

$$\Rightarrow g(x_0)\frac{(n+1)(x-\xi)^n}{(x-x_0)^{n+1}} = -g'(\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

$$\Rightarrow g(x_0) = R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Beispiel:

$n = 1$: $T_{1,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Tangente in $\left(x_0, f(x_0)\right)$, f wird durch T_{1,x_0} linearisiert.

$n = 2$: $T_{2,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$

Parabel durch den Punkt $\left(x_0, f(x_0)\right)$, an der Stelle x_0 gleiche 1-te und 2-te Ableitung wie f.

In der Nähe von x_0 ist $\left|R_{n,x_0}\right|$ "klein", also T_{n,x_0} eine "gute Annäherung" an f und somit $f(x) \approx T_{n,x_0}(x)$ für $|x - x_0| < \varepsilon$, denn für

$$\left|x - x_0\right| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \left|R_{n,x_0}(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right| \cdot \varepsilon^{n+1}.$$

Beispiel:

1) $f(x) = e^x \;\Rightarrow\; f^{(k)}(x) = e^x$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$,

sei $x_0 = 0 \;\Rightarrow\; f^{(k)}(0) = e^0 = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$\xi = 0 + \delta(x - 0) = \delta x$ mit $0 < \delta < 1$

Für $x \in [0,1]$ gilt folglich

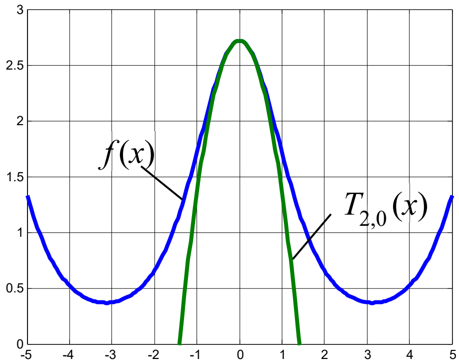
$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|R_{n,0}(x)\right| = \frac{e^\xi}{(n+1)!} |x|^{n+1} \le \frac{e}{(n+1)!}, \text{ da } \xi = \delta x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0,1]} \left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = \max_{x \in [0,1]} \left|R_{n,0}(x)\right| \le \frac{e}{(n+1)!}.$$

z.B. $n=7$: $$\max_{x\in[0,1]}\left|e^x-\sum_{k=0}^{7}\frac{x^k}{k!}\right|=\max_{x\in[0,1]}\left|R_{7,0}(x)\right|\le\frac{3}{8!}\le 0{,}000075$$

z.B. $x=1$: $$\left|e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{7!}\right)\right|=\left|e-2{,}718253\right|\le 0{,}000075$$

2) $$f(x)=e^{\cos x}\;\Rightarrow\; f(0)=e$$
$$f'(x)=-\sin x\, e^{\cos x}\;\Rightarrow\; f'(0)=0$$
$$f''(x)=(-\cos x+\sin^2 x)e^{\cos x}\;\Rightarrow\; f''(0)=-e$$
$$f'''(x)=(\sin x+3\sin x\cos x-\sin^3 x)e^{\cos x}$$
$$=\sin x(1+3\cos x-\sin^2 x)e^{\cos x}$$
$$=\sin x(\cos^2 x+3\cos x)e^{\cos x}$$
$$=\sin x\cos x(\cos x+3)e^{\cos x}=\frac{1}{2}\sin(2x)(\cos x+3)e^{\cos x}$$



$$\Rightarrow\; T_{2,0}(x)=f(0)+f'(0)\,x+\frac{f''(0)}{2}x^2=e-\frac{e}{2}x^2$$

und für $|x|\le\pi/8$ die Restgliedabschätzung

$$\max_{|x|\le\frac{\pi}{8}}\left|e^{\cos x}-\left(e-\frac{e}{2}x^2\right)\right|=\max_{|x|\le\frac{\pi}{8}}\left|R_{2,0}(x)\right|$$
$$\le\frac{1}{3!}\left|\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)(1+3)e\right|\left(\frac{\pi}{8}\right)^3\le\frac{e}{3\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{8}\right)^3\le 0{,}04.$$

Allgemein gilt:

$$\max_{x\in[a,b]}\left|f(x)-T_{n,x_0}(x)\right|=\max_{x\in[a,b]}\left|R_{n,x_0}(x)\right|$$
$$\le\frac{1}{(n+1)!}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|\max_{x\in[a,b]}\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

6.4.2 Taylor-Reihe

Satz 6-21: (*Taylor-Reihe*)
Es sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar auf (a,b) und $x_0\in(a,b)$. Gilt jetzt für das Restglied R_{n,x_0}

$$\lim_{n\to\infty} R_{n,x_0}(x)=0,$$

dann heißt

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

Taylor-Reihe von f um x_0, d.h. f lässt sich um x_0 in eine Potenzreihe entwickeln.

Beweis:
Die Partialsummen der Taylor-Reihe sind die Taylor-Polynome $T_{n,x_0}(x)$. Da $f(x)=T_{n,x_0}(x)+R_{n,x_0}(x)$ und $\lim\limits_{n\to\infty}R_{n,x_0}(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}T_{n,x_0}(x)=f(x)$.

Beispiel:

1) $f(x)=e^x,\ \left|R_{n,0}(x)\right|=\dfrac{e^{\delta x}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le K\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

mit $K=\begin{cases}e^x: & \text{falls } x\ge 0\\ 1\ : & \text{falls } x<0\end{cases},$

da $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|x|^n}{n!}$ konvergiert $\Rightarrow \dfrac{|x|^n}{n!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$

2) $f(x)=\ln(1-x),\ x_0=0$

$$f'(x)=\frac{-1}{1-x},\ f''(x)=\frac{-1}{(1-x)^2},\ \ldots,\ f^{(k)}(x)=\frac{-(k-1)!}{(1-x)^k}$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!}=-\frac{(k-1)!}{k!}=-\frac{(k-1)!}{k\cdot(k-1)!}=-\frac{1}{k},\ f(0)=0$$

$$\left|R_{n,0}(x)\right| = \frac{n!}{(1-\xi)^{n+1}} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ für } |x|<1 \text{ (ohne Beweis)}$$

$$\Rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \ |x|<1, \text{ zudem gilt}$$

$$\ln(1+x) = \ln\big(1-(-x)\big) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, \ |x|<1.$$

3) $f(x) = (1+x)^{\alpha}, \ \alpha \in \mathbb{R}$ fest, $x > -1, \ x_0 = 0$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},$$

da $\binom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$

$$\Rightarrow \frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k} \ \Rightarrow \ \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{\alpha}{k}$$

$$\left|R_{n,0}(x)\right| = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}|x|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ für } |x|<1 \text{ (ohne Beweis)}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \ |x|<1$$

z.B.: $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \ldots \ |x|<1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{2k} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{5}{16}x^6 + \ldots \ |x|<1$$

denn $\binom{-1/2}{k} = \dfrac{(-1)^k}{2^k} \cdot \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2k-1)}{k!}$

Zusammenhang zwischen Taylor-Reihe und Potenzreihe

Sei $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ mit Konvergenzradius $r > 0$, dann ist f als Potenzreihe im Konvergenzintervall $I=\{x\in\mathbb{R}:\ |x-x_0|<r\}$ differenzierbar mit $f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k (x-x_0)^{k-1}$ und dem gleichen Konvergenzradius r. f' ist also wieder eine Potenzreihe mit dem gleichen Konvergenzintervall I, also auch auf I differenzierbar mit $f''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k\,(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2}$ und dem gleichen Konvergenzradius r. Also folgt allgemein:

$f\in C^{\infty}(I)$, d.h. f ist beliebig oft differenzierbar auf I, mit

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\, a_k (x-x_0)^{k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-x_0)^{k-n} \\ &= n!a_n + (n+1)!a_{n+1}(x-x_0) + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2}(x-x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = a_n \ \Rightarrow\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Die Taylor-Reihe um x_0 stimmt mit der ursprünglichen Potenzreihe überein. Die Koeffizienten der Potenz- bzw. Taylor-Reihe sind also eindeutig bestimmt. Demzufolge kann man die Taylor-Reihe einer Funktion nicht nur über ihre Ableitungen im Punkt x_0, sondern oft auch durch bekannte Potenzreihen z.B. durch Substitution, Addition, Multiplikation, Division etc. bestimmen.

Beispiel:

1) $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty} x^k,\ |x|<1,$ einfache Substitution liefert

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k},\ |x|<1.$$

2) $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$ um $x_0 = 1$ entwickeln,

$$\frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2+3(x-1)+3} = \frac{1}{5+3(x-1)} = \frac{1}{5}\frac{1}{1+3(x-1)/5}$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{3}{5}(x-1)\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^k}{5^{k+1}}(x-1)^k$$

mit $\left|\dfrac{3}{5}(x-1)\right| < 1 \Rightarrow |x-1| < \dfrac{5}{3} = r.$

3) $f(x) = e^x$ um $x_0 = 2$ entwickeln,

$$e^x = e^{x-2+2} = e^2 e^{x-2}$$

$$= e^2 \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-2)^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) $f(x) = \operatorname{artanh} x$ um $x_0 = 0$ entwickeln, Addition von Potenzreihen liefert

$$\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2}\big(\ln(1+x) - \ln(1-x)\big)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}x^k\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k}x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}, \quad |x| < 1.$$

5) $f(x) = \dfrac{4}{3+2x-x^2}$ um $x_0 = 0$ entwickeln, Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{4}{3+2x-x^2} = \frac{4}{(1+x)(3-x)}$$

$$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3-x}$$

$$= \frac{1}{1-(-x)} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-x/3}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^k + \frac{1}{3^{k+1}}\right)x^k, \ |x| < 1.$$

6) $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ um $x_0 = 0$ entwickeln,

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \mathrm{Re}\left\{e^{(\alpha+j\beta)x}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+j\beta)^k x^k}{k!}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}\left\{(\alpha+j\beta)^k\right\}x^k}{k!}$$

mit $\alpha + j\beta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, e^{j\varphi}$, $\varphi = \arg(\alpha+j\beta)$ und demzufolge

$\mathrm{Re}\left\{(\alpha+j\beta)^k\right\} = \mathrm{Re}\left\{(\alpha^2+\beta^2)^{k/2}e^{jk\varphi}\right\} = (\alpha^2+\beta^2)^{k/2}\cos k\varphi$ gilt

$$e^{\alpha x}\cos\beta x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha^2+\beta^2)^{k/2}\cos k\varphi}{k!}x^k, \ x \in \mathbb{R}.$$

z.B.: $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow \varphi = \arg(1+j) = \dfrac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \ e^x\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k/2}\cos(k\pi/4)}{k!}x^k, \ x \in \mathbb{R}.$$

7) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$ um $x_0=0$ entwickeln,

a) Multiplikation von Potenzreihen

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}x^l\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}x^l x^{k-l}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}x^k\right)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k,\ \ |x|<1.$$

b) Differentiation von Potenzreihen

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{\infty}x^k,\ \ |x|<1,$$

Differenzieren auf beiden Seiten liefert

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}k\,x^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k.$$

8) Division von Potenzreihen

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k}{\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k}=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{k}b_l c_{k-l}\right)x^k.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_0=b_0c_0$$
$$a_1=b_0c_1+b_1c_0$$
$$a_2=b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0$$
$$a_3=b_0c_3+b_1c_2+b_2c_1+b_3c_0$$
$$\vdots$$

Hieraus lassen sich $c_0,c_1,c_2,\ldots$ sukzessive berechnen. Die Konvergenz der resultierenden Potenzreihe muss gesondert untersucht werden.

Exemplarisch wird nun $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ um $x_0 = 0$ entwickelt.

Mit den Reihen

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

und dem Ansatz

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned}
0 &= 1 \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_0 = 0\\
1 &= 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_1 = 1\\
0 &= 1 \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 - \tfrac{1}{2!} \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_2 = 0\\
-\tfrac{1}{3!} &= 1 \cdot c_3 + 0 \cdot c_2 - \tfrac{1}{2!} \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_3 = \tfrac{1}{3}\\
0 &= 1 \cdot c_4 + 0 \cdot c_3 - \tfrac{1}{2!} \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 + \tfrac{1}{4!} \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_4 = 0\\
\tfrac{1}{5!} &= 1 \cdot c_5 + 0 \cdot c_4 - \tfrac{1}{2!} \cdot c_3 + 0 \cdot c_2 + \tfrac{1}{4!} \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_5 = \tfrac{2}{15}\\
0 &= 1 \cdot c_6 + 0 \cdot c_5 - \tfrac{1}{2!} \cdot c_4 + 0 \cdot c_3 + \tfrac{1}{4!} \cdot c_2 + 0 \cdot c_1 - \tfrac{1}{6!} \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_6 = 0\\
-\tfrac{1}{7!} &= 1 \cdot c_7 + 0 \cdot c_6 - \tfrac{1}{2!} \cdot c_5 + 0 \cdot c_4 + \tfrac{1}{4!} \cdot c_3 + 0 \cdot c_2 - \tfrac{1}{6!} \cdot c_1 + 0 \cdot c_0 && \Rightarrow\ c_7 = \tfrac{17}{315}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

die Reihenentwicklung

$$f(x) = \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

Aufgabe 6-1: Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit Hilfe des Majorantenkriteriums.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2-2}}$

Aufgabe 6-2: Stellen Sie mit dem Quotienten- oder Wurzelkriterium die Konvergenz bzw. Divergenz der folgenden Reihen fest.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$

Aufgabe 6-3: Weisen Sie mit dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die Konvergenz der folgenden alternierenden Reihen nach.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+3^n}$

Aufgabe 6-4: Bestimmen Sie für die folgenden Potenzreihen den Konvergenzradius.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

Aufgabe 6-5: Darf die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^4 x)}{n^2}$$

gliedweise integriert und gliedweise differenziert werden?

Aufgabe 6-6: Geben Sie für die Funktionen

a) $f(x) = x^2 e^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

die Potenzreihenentwicklungen um Null an.

Aufgabe 6-7: Entwickeln Sie folgende Funktionen nach Potenzen von $(x - x_0)$.

a) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 2$

b) $f(x) = e^x,\ x_0 = 3$

Aufgabe 6-8: Berechnen Sie unter Verwendung von Potenzreihenentwicklungen die folgenden bestimmten Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$