Höhere Mathematik 2

Kapitel 8

Fourier-Analyse

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 2

Kapitel 8

Inhaltsverzeichnis

8 Fourier-Analyse

8.1 Grundlagen

<u>Problemstellung:</u>

Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Kann f durch "einfache Funktionen" approximiert werden?

Als einfache Funktionen werden z.B.

a) algebraische Polynome

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

b) trigonometrische Polynome

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$$

betrachtet.

Unter "approximieren" versteht man dabei, dass $p_n(x)$ die Funktion $f(x)$ möglichst gut annähert, d.h. der Abstand zwischen f und p_n soll auf $[a,b]$ möglichst klein sein.

Es muss also ein Abstand zwischen zwei Funktionen gemessen werden. Bei stetigen Funktionen kann das folgendermaßen geschehen.

Es sei $C([a,b]) = \{f: [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ stetig auf } [a,b]\}$ die Menge aller auf $[a,b]$ stetiger Funktionen.

$C([a,b])$ ist mit den Operationen

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{(Addition) und}$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{(Skalarmultiplikation)}$$

ein Vektorraum.

Für $f \in C([a,b])$ kann die ∞-Norm

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

mit den Normeigenschaften

$$\|f\|_\infty \geq 0,\ \|f\|_\infty = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b],$$

$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

definiert werden. $C([a,b])$ ist somit ein normierter Vektorraum.

Mit Hilfe dieser Norm kann der Abstand zwischen den Funktionen f und g durch $\|f-g\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|$ gemessen werden.

$\lim_{n\to\infty} \|f - p_n\|_\infty = 0$ bedeutet, dass p_n auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

Im $\mathbb{R}^n$ wurde bisher immer die Euklidische Norm

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$$

benutzt und über das Skalarprodukt

$$\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

folgendermaßen definiert

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}.$$

Betrachtet man nun den Vektorraum $C([a,b])$, dann wird durch

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

auf $C([a,b])$ ein Skalarprodukt definiert, denn es gilt

$$\langle f, f\rangle \geq 0,\ \langle f, f\rangle = 0 \ \Leftrightarrow \ f(x) = 0 \ \ \forall x \in [a,b],$$

$$\left.\begin{aligned}\langle \lambda f, g\rangle &= \lambda\langle f, g\rangle \\ \langle f+g, h\rangle &= \langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle\end{aligned}\right\} \quad \text{(Linearität)},$$

$$\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle \qquad \text{(Symmetrie)}.$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes wird die 2-Norm gemäß

$$\|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f\rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

definiert und es gilt

$$\|f\|_2 \ge 0,$$

$$\|\lambda f\|_2 = |\lambda|\,\|f\|_2 \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

$$\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2 \qquad \text{(Dreiecksungleichung)},$$

$$|\langle f, g\rangle| \le \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 \qquad \text{(Schwarzsche Ungleichung)}.$$

Für die 2-Norm lautet die Dreiecksungleichung

$$\sqrt{\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)^2 dx} \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

und die Schwarzsche Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right| \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}.$$

Mit der 2-Norm kann der Abstand zwischen zwei Funktionen durch

$$\|f-g\|_2 = \sqrt{\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx}$$

gemessen werden.

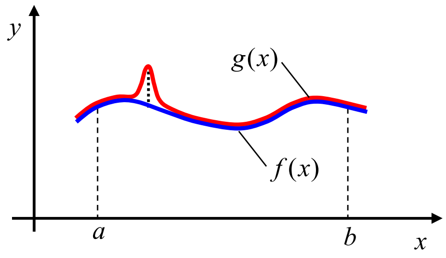
Es gilt im allgemeinen $\|f\|_2 \ne \|f\|_\infty$ und $\|f-g\|_2 \ne \|f-g\|_\infty$.

Beispiel:

1) $f(x) = x$ mit $x \in [0,1]$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |x| = 1,$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2(x)\,dx} = \sqrt{\int_0^1 x^2 dx} = \sqrt{x^3/3\Big|_0^1} = 1\big/\sqrt{3}\,.$$

2) 

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \|f-g\|_\infty & \text{groß} \\ \|f-g\|_2 & \text{klein} \end{array}$$

Satz 8-1:

Es seien $f_n \in C([a,b]),\ n \in \mathbb{N},$ und $f \in C([a,b]),$ dann gilt

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0}_{\text{gleichmäßige Konvergenz auf } [a,b]} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_2 = 0.}_{\text{Konvergenz im quadratischen Mittel auf } [\mathrm{a,b}]}$$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht.

Nun sollen die Funktionen $f \in C([a,b])$ durch einfache Funktionen im quadratischen Mittel approximiert werden, d.h. wir suchen

$$p_n \in C\left([a,b]\right) \text{ mit } \lim_{n\to\infty}\|p_n - f\|_2 = 0.$$

Hierfür werden zunächst Orthonormalsysteme betrachtet.

Definition 8-1: (*Orthonormalsystem*)

Es sei auf $C([a,b])$ ein Skalarprodukt $\langle f,g\rangle$ gegeben und die zugehörige Norm $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$. Sind ferner $\varphi_i \in C([a,b])$ $i \in \mathbb{N}$ mit

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases},$$

so bilden die Funktionen $\{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$ ein Orthonormalsystem bzgl. des Skalarprodukts $\langle f,g\rangle$.

Anmerkung:

$\langle \varphi_i, \varphi_i\rangle = 1$ bedeutet $\|\varphi_i\|_2 = 1$, denn

$$\|\varphi_i\|_2^2 = \langle \varphi_i, \varphi_i \rangle = 1.$$

Es soll nun $f \in C([a,b])$, durch einfache Funktionen gemäß

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x),\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in \mathbb{R}$$

approximiert werden, wobei

$$\left\{ \varphi_i \in C\big([a,b]\big):\ i \in \mathbb{N} \right\}$$

ein ONS (Orthonormalsystem) bzgl. des Skalarprodukts $\langle f, g \rangle$ sei.

<u>Frage:</u>

Für welche $\alpha_k \in \mathbb{R}$ wird $\|f - p_n(x)\|_2 = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_2$ minimal?

<u>Antwort:</u>

$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_2$ wird minimal für $\alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx.$

<u>Satz 8-2:</u>

Es sei $\left\{ \varphi_i \in C([a,b]),\ i \in \mathbb{N} \right\}$ ein Orthonormalsystem bzgl. des Skalarproduktes und $f \in C([a,b])$, dann erhält man die beste Approximation im quadratischen Mittel durch

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k(x)$$

und es gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \le \|f\|_2^2$$

<u>Beweis</u>: (nur der Besselschen Ungleichung)

$$0 \le \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\|_2^2 = \left\langle f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k ,\ f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k \right\rangle$$

$$= \langle f, f \rangle - 2\sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle \langle f, \varphi_l \rangle \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle$$

Ausnutzen von

$$\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \end{cases}$$

liefert die Besselsche Ungleichung

$$0 \leq \langle f, f \rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 \Rightarrow \|f\|_2^2 \geq \sum_{k=1}^{n} \langle f, \varphi_k \rangle^2 .$$

Hat man also auf $C([a,b])$ ein Skalarprodukt $\langle f, g \rangle$ und kennt man zu diesem Skalarprodukt ein Orthonormalsystem $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ so lautet die beste Approximation im quadratischen Mittel (i.q.M. Approximation)

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle$$

Im folgenden Kapitel wird der obige Sachverhalt am Beispiel des der Fourier-Reihe zugrundeliegenden Orthonormalsystems veranschaulicht.

8.2 Fourier-Reihe

8.2.1 Reelle Darstellung der Fourier-Reihe

<u>Satz 8-3:</u>
Die Funktionen

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) : \; k \in \mathbb{N} \right\}$$

bilden in $C([-\pi, \pi])$ ein ONS (Orthonormalsystem).

<u>Beweis</u>:
Aus dem als Übung zu führenden Beweis erhält man für $k, l \in \mathbb{N}_0$

a) $$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) \cos(lx) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \\ 1 & \text{für } k = l \neq 0 \\ 2 & \text{für } k = l = 0 \end{cases},$$

b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\sin(lx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq l \;\wedge\; k = l = 0 \\ 1 & \text{für } k = l \neq 0 \end{cases}$,

c) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(lx)\,dx = 0 \quad \forall k, l \in \mathbb{N}_0$.

Aus

$$\langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx & \text{für } \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx\right)\cos kx & \text{für } \varphi_k = \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} \\ \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\right)\sin kx & \text{für } \varphi_k = \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} \end{cases}$$

folgt:

Satz 8-4:

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodisch und stetig in $\mathbb{R}$. Die beste Approximation im quadratischen Mittel (i.q.M.) erhält man durch die trigonometrischen Polynome

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$$

mit

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,\ k = 0,1,\ldots \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,\ k = 1,2,\ldots$$

$T_n(x)$ heißt Teilsumme (Partialsumme) der Fourier-Reihe

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right)$$

von f. Die Koeffizienten a_k und b_k heißen Fourier-Koeffizienten.

Anmerkung:

In der Besselschen Ungleichung gilt das Gleichheitszeichen, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle f, \varphi_k \rangle^2 = \|f\|_2^2 \quad \text{mit} \quad \varphi_k \in \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(kx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(kx) : \; k \in \mathbb{N} \right\}$$

und es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx \quad \text{sowie} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0, \; \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Definition 8-2:

Eine Funktion f heißt auf $[a,b]$ stückweise stetig, wenn f bis auf endlich viele Sprungstellen, d.h. Unstetigkeitsstellen mit endlichen Grenzwerten $f(x+)$ und $f(x-)$, auf $[a,b]$ stetig ist.

Eine Funktion f heißt auf $[a,b]$ stückweise glatt, wenn f und f' auf $[a,b]$ stückweise stetig sind.

Satz 8-5:

Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodisch und stückweise glatt, dann konvergiert die Fourier-Reihe $T(x)$ punktweise gegen

$$\begin{cases} f(x) & \text{falls } f \text{ stetig in } x \\ \frac{1}{2}\big(f(x+) + f(x-)\big) & \text{falls } f \text{ in } x \text{ Sprungstelle besitzt} \end{cases}$$

und die Konvergenz ist gleichmäßig in allen abgeschlossenen Stetigkeitsintervallen.

Anmerkung:

Die Fourier-Reihe einer stückweise glatten periodischen Funktion kann gliedweise integriert werden.

Beispiel:

1) $f(x) = \sin^2 x = \frac{1}{2}\big(1 - \cos(2x)\big) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

(Additionstheorem liefert schon die fertige Fourier-Reihe)

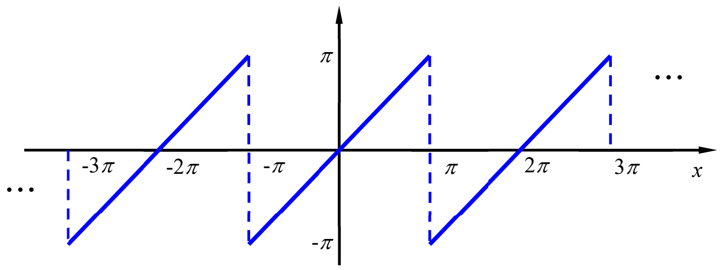
2) $f(x) = \sin^3 x = \left(\frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}\right)^3 = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

3) $f(x) = x$ für $x \in (-\pi, \pi)$ und f sei 2π-periodisch fortgesetzt.

f ist stückweise glatt auf $\mathbb{R}$ mit Sprungstellen in $x = \pi + 2m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq \pi + 2m\pi \\ 0 & \text{für } x = \pi + 2m\pi \end{cases}$$

und f ist ungerade.



Für <u>ungerade Funktionen</u> gilt

$$a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,$$

denn

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = 0$$

weil $f(x)\cos(kx)$ eine ungerade Funktion und

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

weil $f(x)\sin(kx)$ eine gerade Funktion ist.

Für <u>gerade Funktionen</u> gilt

$$b_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx,$$

denn

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = 0$$

weil $f(x)\sin(kx)$ eine ungerade Funktion und

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

weil $f(x)\cos(kx)$ eine gerade Funktion ist.

Da f ungerade, folgt $a_k = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}_0$ und

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,dx \right] = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi}{k}\cos(k\pi) + \frac{\sin(kx)}{k^2}\bigg|_0^{\pi} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{k}(-1)^{k+1} + 0 \right] = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}.$$

Damit lautet die Fourier-Reihe von f

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx).$$

Die Partialsumme

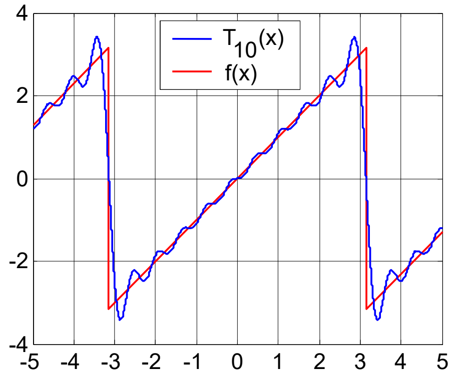
$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)$$

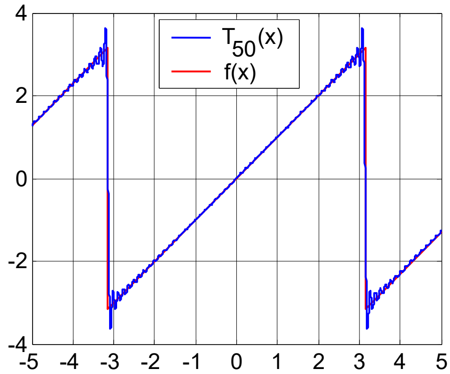
konvergiert punktweise gegen $\begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq \pi + 2m\pi \\ 0 & \text{für } x = \pi + 2m\pi \end{cases}.$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in allen abgeschlossenen Intervallen, die keine Punkte $x = \pi + 2m\pi$ enthalten. Es gilt somit

$$T(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) = x \quad \forall x \in (-\pi, \pi)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz in $[-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.





Gibbsches Phänomen

An den Sprungstellen treten starke Überschwingungen auf, die auch bei hohem Grad n nicht kleiner werden, sondern nur näher an die Sprungstelle heranrücken.

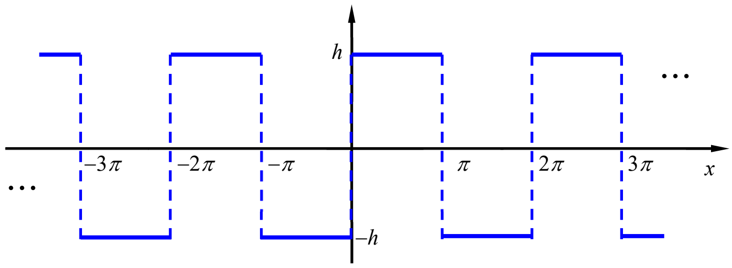
Aus der Parsevalschen Gleichung folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4) $f(x) = h$ für $x \in (0, \pi)$, f sei ungerade und f sei 2π-periodisch fortgesetzt. f ist stückweise stetig und stückweise glatt in $\mathbb{R}$ mit Sprungstellen in $x = m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow T(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq m\pi \\ 0 & \text{für } x = m\pi \end{cases}.$$

Da f ungerade, folgt $a_k = 0 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0$ und



$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx$$

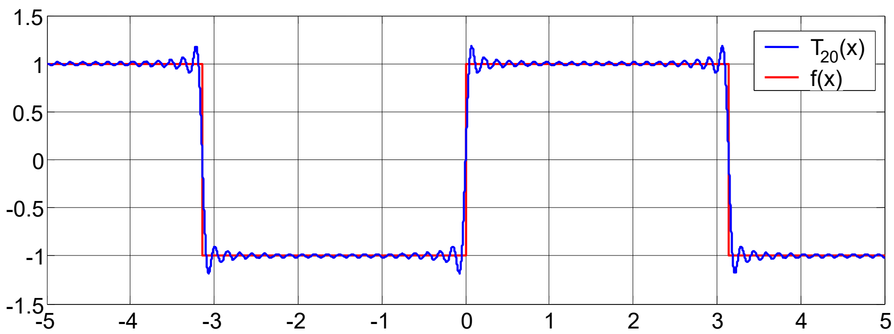
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin(kx)\,dx$$

$$= \frac{2h}{\pi}\left.\frac{-\cos(kx)}{k}\right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2h}{k\pi}\big(1-\cos(k\pi)\big) = \frac{2h}{k\pi}\big(1-(-1)^k\big) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ gerade} \\ \dfrac{4h}{k\pi} & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Damit lautet die Fourier-Reihe von f

$$T(x) = \frac{4h}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin\big((2k+1)x\big)}{2k+1}.$$



Aus der Parsevalschen Gleichung

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

folgt für $h = 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k\pi}\big(1-(-1)^k\big)\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2k+1)\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dx = \left.\frac{x}{\pi}\right|_{-\pi}^{\pi} = 2 \;\Rightarrow\; \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ist f nicht 2π-periodisch, sondern T-periodisch mit $T > 0$, so kann man die Fourier-Reihe mit Hilfe einer Transformation erhalten.

Es sei $g(x) := f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$.

$$\Rightarrow \ g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x)$$

$\Rightarrow$ g ist 2π-periodisch mit der Fourier-Reihe

$$\tilde{T}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\big),$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\cos(kx)\,dx$$

und

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\sin(kx)\,dx.$$

Die Substitution $t = Tx/(2\pi)$ mit $dt = T/(2\pi)\,dx$ und $\omega = 2\pi/T$ liefert

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt.$$

Demzufolge ergibt sich die Fourier-Reihe der T-periodischen Funktion f zu

$$T(t) = \tilde{T}(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)\big)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(k\omega t)\,dt \ \text{ und } \ b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin(k\omega t)\,dt.$$

8.2.2 Komplexe Darstellung der Fourier-Reihe

Die Fourier-Reihe einer T-periodischen Funktion kann auch in komplexer Form dargestellt werden.

$$T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega t} dt$$

Hierbei gilt für $k \geq 0$ und $b_0 := 0$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k),$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) = c_k^*,$$

$$a_k = c_k + c_{-k} = 2\,\mathrm{Re}(c_k),$$

$$b_k = j(c_k - c_{-k}) = -2\,\mathrm{Im}(c_k).$$

Beweis:

Für $k \geq 0$ gilt

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \big(\cos(k\omega t) - j \sin(k\omega t)\big) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt = \frac{a_k}{2} - j \frac{b_k}{2},$$

$$c_{-k} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \big(\cos(k\omega t) + j \sin(k\omega t)\big) dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t)\, dt + j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega t)\, dt = \frac{a_k}{2} + j \frac{b_k}{2}.$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

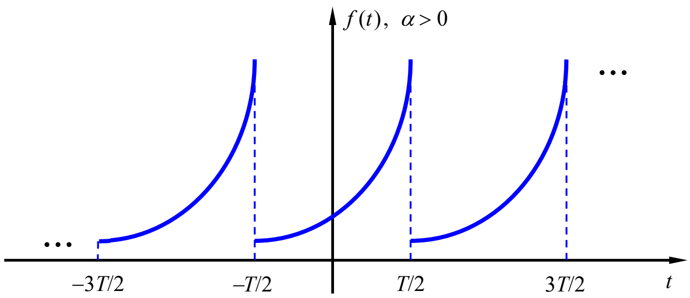
$$a_k = c_k + c_{-k} = c_k + c_k^* = 2\,\mathrm{Re}(c_k),$$

$$-jb_k = c_k - c_{-k} \;\Rightarrow\; b_k = j(c_k - c_{-k}) = j(c_k - c_k^*) = -2\,\mathrm{Im}(c_k),$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} &= c_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-jk\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\big(\cos(k\omega t) - j\sin(k\omega t)\big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\big(\cos(k\omega t) + j\sin(k\omega t)\big) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\big((c_k + c_{-k})\cos(k\omega t) + j(c_k - c_{-k})\sin(k\omega t)\big) \\
&= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k\cos(k\omega t) + b_k\sin(k\omega t)\big).
\end{aligned}$$

Beispiel:

$f(t) = e^{\alpha t}$ für $t \in (-T/2, T/2)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und f sei T-periodisch fortgesetzt. f ist stückweise stetig und stückweise glatt.



$$\Rightarrow\; T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega t} = \begin{cases} f(t) & \text{für } t \neq \dfrac{T}{2} + kT \\ \dfrac{1}{2}\left(e^{\alpha T/2} + e^{-\alpha T/2}\right) & \text{für } t = \dfrac{T}{2} + kT \end{cases}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,e^{-jk\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{\alpha t} e^{-jk\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{(\alpha-jk\omega)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\left.\frac{e^{(\alpha-jk\omega)t}}{\alpha-jk\omega}\right|_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{(\alpha-jk\omega)T/2}-e^{-(\alpha-jk\omega)T/2}}{T(\alpha-jk\omega)}$$

$$= \frac{\alpha+jk\omega}{T(\alpha^2+k^2\omega^2)}\left(e^{\alpha T/2}e^{-jk\pi}-e^{-\alpha T/2}e^{jk\pi}\right)$$

$$= \frac{2(\alpha+jk\omega)(-1)^k}{T(\alpha^2+k^2\omega^2)}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\alpha T/2}-e^{-\alpha T/2}\right)$$

$$= \frac{2}{T}\sinh\left(\alpha\frac{T}{2}\right)\frac{(\alpha+jk\omega)(-1)^k}{\alpha^2+k^2\omega^2},$$

wobei $e^{\pm jk\pi} = \cos k\pi = (-1)^k$ ausgenutzt wurde.

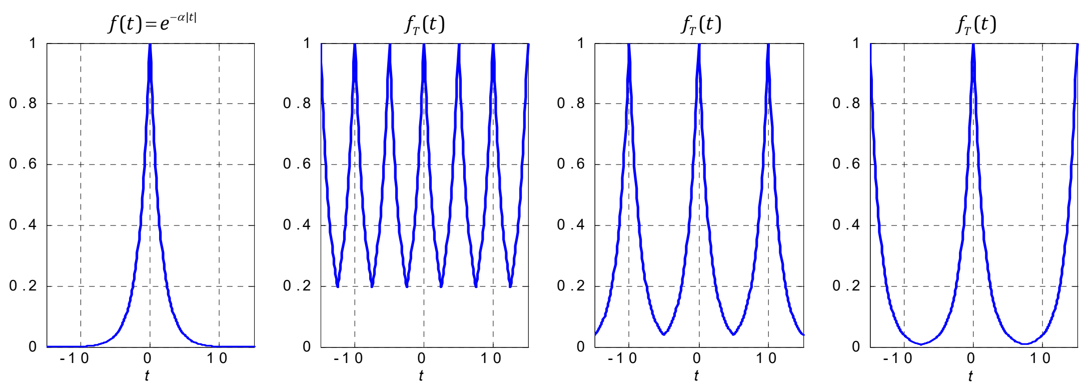
8.3 Fourier-Integral

Es stellt sich nun die Frage, ob nichtperiodische Funktionen in harmonische Schwingungen zerlegt werden können.

Hierzu führt man eine periodische Funktion $f_T(t)$ ein, indem man den Ausschnitt von $f(t)$ über $-T/2 < t < T/2$ periodisch wiederholt, d.h.

$$f_T(t) = f(t) \qquad -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

und $\quad f_T(t+T) = f_T(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$



Offensichtlich gilt

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t).$$

Für $f_T(t)$ existiert die komplexe Fourier-Reihe

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega t}$$

mit $\Omega = 2\pi/T$ und den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-jk\Omega t} dt.$$

Beim Grenzübergang, d.h. $T \to \infty$, strebt Ω und damit der Abstand zweier benachbarter Frequenzen

$$\Delta\omega = (k+1)\Omega - k\Omega = \Omega$$

gegen null. Das Linienspektrum geht dabei in ein kontinuierliches Spektrum (Dichtespektrum) über. Mit nun $\Delta\omega$ für Ω und $T = 2\pi/\Omega$ kann c_k und $f_T(t)$ durch

$$c_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t)\, e^{-jk\Delta\omega t} dt$$

und

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{2\pi}{\Delta\omega} e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega$$

ausgedrückt werden. Für alle $\omega = k\Delta\omega$, für die

$$\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t)\, e^{-jk\Delta\omega t} dt$$

endlich bleibt, folgt, dass beim Grenzübergang $\Delta\omega \to 0$ auch $c_k \to 0$ aber

$$\frac{2\pi c_k}{\Delta\omega} \xrightarrow[T\to\infty]{} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

strebt. $F(\omega)$ bezeichnet man als die Fourier-Transformierte von $f(t)$.

Die Fourier-Reihe geht beim Grenzübergang $\Delta\omega \to 0$, d.h. $T \to \infty$, in das Integral

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{2\pi}{\Delta\omega} e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

über, das als Umkehrintegral der Fourier-Transformation bezeichnet wird.

Definition 8-3:
Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt Fourier-transformierbar, wenn der Cauchy-sche-Hauptwert

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left\{f(t)\right\} := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$ existiert. In diesem Falle heißt $F(\omega)$ Fourier-Transformierte von *f*. Die inverse Fourier-Transformation von $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ lautet

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega,$$

wenn das Integral als Cauchyscher-Hauptwert für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert. Man nennt das Paar $\left(f(t), F(\omega)\right)$ eine Fourier-Transformationskorrespondenz und schreibt kurz

$$f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega).$$

Beispiel:

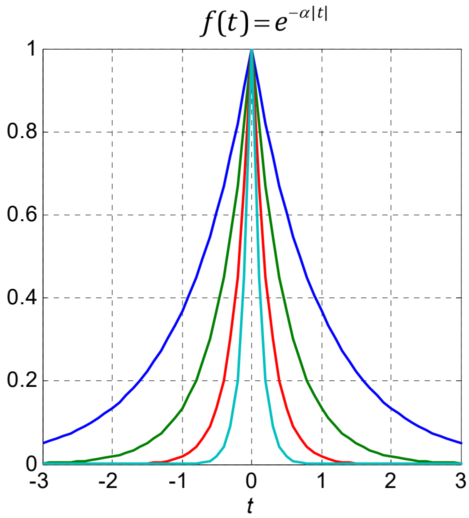
$f(t) = A e^{-\alpha|t|},\;\; \alpha > 0$

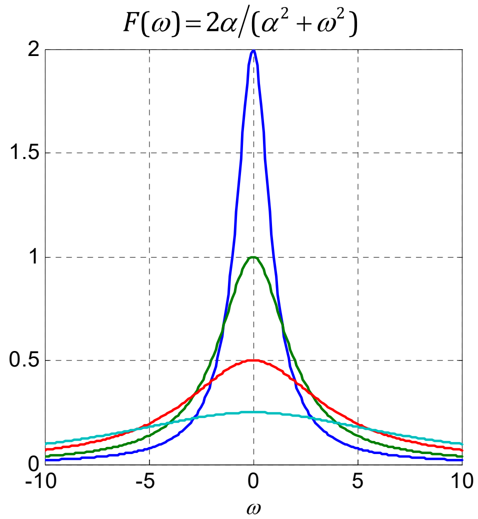
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = A\left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt \right\}$$

$$= A\left\{ \int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha - j\omega)t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{(-\alpha - j\omega)t} dt \right\} = A\left\{ \left.\frac{e^{(\alpha - j\omega)t}}{\alpha - j\omega}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(-\alpha - j\omega)t}}{-\alpha - j\omega}\right|_{0}^{\infty} \right\}$$

$$= A\left\{ \frac{1}{\alpha - j\omega} - \frac{1}{-\alpha - j\omega} \right\} = A\frac{\alpha + j\omega + (\alpha - j\omega)}{\alpha^2 + \omega^2} = A\frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

Unvereinbarkeit von strenger Zeit- und Frequenzbegrenzung





Die heuristische Herleitung stellt noch keinen Beweis für das Fourier-Transformationspaar dar, dafür ist zunächst die Zulässigkeit der Grenzübergänge und deren Vertauschbarkeit zu überprüfen.

Definition 8-4:

Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt absolut integrierbar, wenn sie auf jedem endlichen Intervall stückweise stetig ist und $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt<\infty$ gilt.

Satz 8-6:

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, so existiert die Fourier-Transformierte $F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}\ \forall\omega\in\mathbb{R}$. $F(\omega)$ ist dann beschränkt und stetig auf $\mathbb{R}$.

Anmerkung:

Es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,d\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$$

sowie

$$\lim_{\omega\to\infty}F(\omega)=0 \quad\text{und}\quad \lim_{\omega\to-\infty}F(\omega)=0.$$

Satz 8-7:
Ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ absolut integrierbar, in jedem endlichen Intervall stückweise glatt und gilt die Mittelwerteigenschaft

$$f(t)=\frac{1}{2}\big(f(t+)+f(t-)\big)$$

für alle $t\in\mathbb{R}$, dann ist mit $f(t)$ auch $F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}$ Fourier-transformierbar und es gilt

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi}F(-\omega)\right\}=f(t)\ \ \forall t\in\mathbb{R},$$

d.h. die Korrespondenz

$$f(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{F}\{f(t)\}$$

ist umkehrbar eindeutig.

Rechenregeln
Es seien f und g absolut integrierbar, dann gilt

1) Linearität

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ \alpha F(\omega)+\beta G(\omega)\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

2) Konjugation

$$f(t)^*\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(-\omega)^*,\quad f(-t)^*\ \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(\omega)^*$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^* e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)e^{j\omega t}\right)^* dt=\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}dt\right)^*=F(-\omega)^*$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)^* e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)^* e^{j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(\tau)e^{-j\omega\tau}\right)^* d\tau=\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right)^*=F(\omega)^*$$

3) Streckung

$$f(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad a \neq 0$$

<u>*Beweis*</u>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-j\omega t}dt = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau & a>0 \\ \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{\infty}^{-\infty} f(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau & a<0 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\frac{\omega}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

4) Verschiebung im Zeitbereich

$$f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega)e^{-j\omega a}$$

<u>*Beweis*</u>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-j\omega(\tau+a)}d\tau = e^{-j\omega a}F(\omega)$$

5) Verschiebung im Frequenzbereich

$$e^{j\Omega t}f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(\omega-\Omega) \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

<u>*Beweis*</u>:

$$F(\omega-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\Omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(t)e^{j\Omega t}\right)e^{-j\omega t}dt$$

6) Symmetrien

$f(-t) = f(t) \Leftrightarrow F(-\omega) = F(\omega)$ d.h. f und F sind gerade

$f(-t) = -f(t) \Leftrightarrow F(-\omega) = -F(\omega)$ d.h. f und F sind ungerade

Beweis:

f gerade: $\quad F(\omega) = 2\int_0^\infty f(t)\cos\omega t\, dt$

f ungerade: $\quad F(\omega) = -2j\int_0^\infty f(t)\sin\omega t\, dt$

Zudem kann mithilfe der Zerlegung von $f(t)$ in den geraden Anteil

$f_g(t) := \frac{1}{2}\big(f(t) + f(-t)\big)$

und den ungeraden Anteil

$f_u(t) := \frac{1}{2}\big(f(t) - f(-t)\big)$

die folgende Aussage für reelle $f(t)$ bewiesen werden.

$$f(t) = f_g(t) + f_u(t) \;\Rightarrow\; f_g(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \operatorname{Re} F(\omega),\;\; f_u(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; j\operatorname{Im} F(\omega)$$

Beweis:

$f(t) = f_g(t) + f_u(t)$

$$F(\omega) = 2\int_0^\infty f_g(t)\cos\omega t\, dt - 2j\int_0^\infty f_u(t)\sin\omega t\, dt$$

7) Differentiation im Zeitbereich

Ist zudem f stetig und f' absolut integrierbar, dann gilt

$f'(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; j\omega F(\omega).$

Beweis:

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t}dt = f(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$= \big(f(t)\cos\omega t - jf(t)\sin\omega t\big)\Big|_{-\infty}^{\infty} + j\omega\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = j\omega F(\omega)$$

8) Integration im Zeitbereich

Seien $f(t) = g'(t)$ und $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,d\tau \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{j\omega}F(\omega).$$

Beweis:

$$F(\omega) = \mathcal{F}\left\{f(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{g'(t)\right\} = j\omega\,G(\omega)$$

9) Differentiation im Frequenzbereich

Ist auch tf absolut integrierbar, dann gilt

$$t f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; jF'(\omega).$$

Beweis:

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{F'(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F'(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}F(\omega)\,e^{j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - jt\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = -jt\,f(t)$$

10) Integration im Frequenzbereich

Seien $F(\omega) = G'(\omega)$ und $G(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega)\,d\Omega$ mit $F(\omega)$ und $G(\omega)$

Fourier-transformierbar gemäß Satz 8-7, dann gilt

$$\frac{1}{t}f(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; -j\int_{-\infty}^{\omega} F(\Omega)\,d\Omega.$$

Beweis:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} = \mathcal{F}^{-1}\left\{G'(\omega)\right\} = -jt\,g(t)$$

11) Faltung im Zeitbereich

$$\big(f * g\big)(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega)\cdot G(\omega), \text{ wobei}$$

$$\big(f * g\big)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau.$$

Beweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right) e^{-j\omega t} dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)\, e^{-j\omega t} dt\right) d\tau =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, G(\omega)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau\right) G(\omega) = F(\omega)\cdot G(\omega)$$

12) Faltung im Frequenzbereich

Sind $F(\omega)$ und $G(\omega)$ gemäß Satz 8-7 Fourier-transformierbar, dann gilt

$$f(t)\cdot g(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{1}{2\pi}\big(F * G\big)(\omega), \text{ wobei}$$

$$\big(F * G\big)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\, G(\omega-\Omega)\, d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega-\Omega)\, G(\Omega)\, d\Omega.$$

Beweis:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\, G(\omega-\Omega)\, d\Omega\right) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega-\Omega)\, e^{j\omega t} d\omega\right) d\Omega =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\, g(t)\, e^{j\Omega t} d\Omega = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega)\, e^{j\Omega t} d\Omega\right) g(t) = f(t)\cdot g(t)$$

Aufgabe 8-1: Berechnen Sie die Fourier-Reihen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \cos(x + \pi/4)$

b) $f(x) = \sin(x + \pi/6)$

Aufgabe 8-2: Berechnen Sie die Fourier-Reihe der 2π–periodisch fortgesetzten Funktion

$$f(x) = x^2 \quad \text{für } x \in (-\pi, \pi].$$

Aufgabe 8-3: Berechnen Sie die Fourier-Reihe der T-periodischen Funktion die im Intervall $(-T, 0)$ durch die Funktion $f(t) = -t/T$ gegeben ist.

Aufgabe 8-4: Berechnen Sie die Fourier-Reihen der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = \left|\cos\left(\frac{\pi}{T} t\right)\right|$

b) $f(x) = |\sin(x/2)|$

Aufgabe 8-5: Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte von $g(t) = f(at)e^{jbt}$ falls die Fourier-Transformierte von $f(t)$ bekannt und $a > 0$ ist.

Aufgabe 8-6: Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der folgenden Funktionen.

a) $f(t) = 1_{(-T/2,T/2)}(t)$, $\quad 1_{(-T/2,T/2)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in (-T/2, T/2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $g(t) = 1_{(-T/2,T/2)}(t)\cos(\omega_0 t)$

Aufgabe 8-7: Beweisen Sie die Parsevalsche-Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega.$$

(Hinweis: Faltungs- und Konjugationsregel anwenden)