Abgabe: KW 18

**Aufgabe 2-1:**
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten / bestimmten Integrale mittels Substitution.

a) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$

b) $\int \left(\frac{1}{\tan^4 x} + \frac{1}{\tan^2 x}\right) dx$

c) $\int \left(\sinh^7 x + \sinh^5 x\right) dx$

d) $\int x^2 \sqrt{8x^3 - 1}\,dx$

e) $\int_{-\pi/4}^{0} \left(\frac{\tan x}{\cos x}\right)^2 dx$

f) $\int_{0}^{\ln(2)} \cosh^2 x \sinh^3 x\,dx$

**Aufgabe 2-2:**
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten / bestimmten Integrale mittels partieller Integration.

a) $\int \arctan x\,dx$

b) $\int \cos \alpha x \sin \beta x\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) $\int e^{\alpha x} \sin \beta x\,dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

d) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$

e) $\int_0^{1/2} \cosh^2 x\,dx$

f) $\int_0^{-\pi/2} x^2 \sin x\,dx$

Abgabe: KW 19

**Aufgabe 2-3:**
Berechnen Sie mit Hilfe der Partialbruchzerlegung die Integrale

a) $\int \frac{x^4-9x^2+6x+12}{(x+2)(x^2-9)}\,dx$

b) $\int \frac{2x^3-2x^2+8x-16}{x^4+64}\,dx$

c) $\int \frac{4x^4-11x^3-28x^2+114x-89}{(x-2)^3(x^2-1)}\,dx$

d) $\int \frac{2x^3+3x^2+2x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$

**Aufgabe 2-4:**
Berechnen Sie das folgende Integral vom

a) Typ $\int R\left(x,\sqrt[n]{ax+b}\right)dx$ durch Substitution der Art $t=\sqrt[n]{ax+b}$.

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{2x-1}}\,dx$$

b) Typ $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ durch Substitution der Art $t+x\sqrt{a}=\sqrt{ax^2+bx+c}$.

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$$

c) Typ $\int R\left(e^x\right)dx$ durch Substitution

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x-1}\,dx$$

d) Typ $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ durch Substitution

$$\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx$$

Abgabe: KW 20

**Aufgabe 2-5:**
Prüfen Sie nach, ob die folgenden uneigentlichen Integrale konvergent sind.

a) $\int_0^\infty \frac{x+2}{2x^4+3x^2+2}\,dx$

b) $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$

c) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ Hinweis: Führen Sie c) durch partielle Integration auf b) zurück

d) $\int_0^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3+2x+3}}\,dx$

**Aufgabe 2-6:**
Berechnen Sie – falls konvergent – die folgenden uneigentlichen Integrale.

a) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x+1}{x^4+4}\,dx$

b) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}}\,dx$

c) $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx$

d) $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx, \quad n=0,1,2,\ldots$

Abgabe: KW 21

**Aufgabe 2-7:**
Berechnen Sie die Bogenlänge des durch

a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x), \quad 0 \le x \le 3$

b) $6xy = x^4 + 3, \quad 1 \le x \le 2$

c) die Parameterdarstellung $x(t) = t\cos t - \sin t, \quad y(t) = t\sin t + \cos t + 1, \quad 0 \le t \le \pi/2$

d) die Polarkoordinatendarstellung $r(\phi) = |\sin(\phi)|, \quad 0 \le \phi \le 2\pi$

definierten Kurvenstücks.

**Aufgabe 2-8:**
Berechnen Sie das Volumen des durch

a) $(x-1)^2 \le y \le x+1, \quad 0 \le x \le 3$ um die $x$-Achse definierten Rotationskörpers

b) $x^2 + y^2 = r^2, \quad 0 < a \le y \le r$ um die $y$-Achse definierten Rotationskörpers.

**Aufgabe 2-9:**
Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche des durch

a) $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x), \quad 0 \le x \le 3$

b) $y = \cosh x, \quad -a \le x \le a$

definierten Rotationskörpers.

Abgabe: KW 22

**Aufgabe 2-10:**
Untersuchen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums das Konvergenzverhalten der Reihen

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{k^5 - 4} - 2}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{2} \Big/ k^3$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \ln\left(2^k + 1\right)$

**Aufgabe 2-11:**
Untersuchen Sie mit Hilfe des Quotienten- oder Wurzelkriteriums das Konvergenzverhalten der Reihen

a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^k}}{k!}$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{25^k (k!)^3}{(3k)!}$

Abgabe: KW 23

**Aufgabe 2-12:**
Untersuchen Sie mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums das Konvergenzverhalten der Reihen

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \cos(k\pi) \frac{k}{k+1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \ln k}$

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin\left(k\,\pi/2\right)}{\ln k}$

**Aufgabe 2-13:**
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k^k} x^{2k+1}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k}\right)^{k^2} \frac{x^{2k}}{3}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha k}}{(k+1)!} x^k, \quad \alpha > 0$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + k^2 4^k) x^k$

e) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{(5k-1)!} x^{2k}$

Abgabe: KW 24

**Aufgabe 2-14:**
Geben Sie für die folgenden Funktionen die Potenzreihenentwicklungen um Null an.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

**Aufgabe 2-15:**
Entwickeln Sie die folgenden Funktionen nach Potenzen von $(x - x_0)$ .

a) $f(x) = \dfrac{1}{6+2x}, \quad x_0 = 2$

b) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 2$

**Aufgabe 2-16:**
Berechnen Sie unter Verwendung von Potenzreihenentwicklungen die folgenden bestimmten Integrale

a) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1+x^3}\, dx, \quad |a| < 1$

b) $\displaystyle\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \mathrm{si}(t)\, dt = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt$

c) $\displaystyle\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$

d) $\displaystyle\int_0^{1/2} \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) dx$

Abgabe: KW 25

**Aufgabe 2-17:**
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(x,y,z) = e^{x-2yz} + x^2 \sin(x-y)\cos z$$

im $\mathbb{R}^3$ differenzierbar ist und berechnen Sie an der Stelle $(1,1,0)^T$

a) den Gradienten,

b) die Richtungsableitung in Richtung zum Nullpunkt,

c) die Richtung, in der die Richtungsableitung ihren Maximalwert annimmt.

**Aufgabe 2-18:**
Zeigen Sie, dass die Funktionen

a) $f(x,y) = x \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

b) $f(x,y) = x \ln\left(\sqrt{\frac{x+y}{y}}\right)$

auf $D = \left\{(x,y)^T : x > 0, y > 0\right\}$ differenzierbar sind und die partielle Differentialgleichung

$$x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = f(x,y)$$

erfüllen.

Abgabe: KW 26

**Aufgabe 2-19:**

Gegeben seien die Funktionen

1) a) $\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ b) $\mathbf{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie die Funktionalmatrix, Funktionaldeterminante und die Divergenz von $\mathbf{f}(x,y)$ bzw. $\mathbf{f}(x,y,z)$. Nach Einführen von Polar- bzw. Zylinderkoordinaten erhält man

2) a) $\mathbf{h}(r,\phi) = \mathbf{f}(r\cos\phi, r\sin\phi)$ b) $\mathbf{h}(r,\phi,z) = \mathbf{f}(r\cos\phi, r\sin\phi, z)$ .

Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Funktionalmatrix von $\mathbf{h}(r,\phi)$ bzw. $\mathbf{h}(r,\phi,z)$ .

**Aufgabe 2-20:**

Approximieren Sie die folgenden Funktionen um $(x_0, y_0)$ durch Taylor-Polynome 2. Ordnung.

a) $f(x,y) = xy - \cos x - \sin y, \quad (x_0, y_0)^T = (\pi/2, \pi/2)^T$

b) $f(x,y) = e^{xy}, \quad (x_0, y_0)^T = (1,1)^T$ ,

c) $f(x,y) = \ln\left(x^2 + y\right), \quad (x_0, y_0)^T = (0,1)^T$ .

d) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}, \quad (x_0, y_0)^T = (1,1)^T$ .

Abgabe: KW 27

**Aufgabe 2-21:**

a) Bestimmen Sie für die Funktion

$$f(x,y)=\sin(x+y)+x\cos y$$

das Taylor-Polynom um $(x_0,y_0)^T=(0,\pi)^T$ vom Grad $\leq 3$.

b) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x,y)=x^2y+y^2+xy$$

nach Potenzen von $(x+1)$ und $(y-1)$.

**Aufgabe 2-22:**

Geben Sie Lage und Art der relativen Extrema der folgenden Funktionen an.

a) $f(x,y)=(y-x^2)e^{-2y}$

b) $f(x,y)=x^3-12xy+8y^3$

c) $f(x,y)=x^2-\frac{1}{2}x^4+y^2-2y+10$

d) $f(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}-4x+y$

e) $f(x,y)=\sin x\sin y$

Abgabe: KW 28

**Aufgabe 2-23:**

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Fourier-Reihe.

a) $f(x) = \cosh x, \quad |x| < \pi \quad$ und $\quad f(x) = f(x - 2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = |\sin x|$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{für } \; 1 \le x < 2 \\ x & \text{für } \; -1 \le x < 1 \\ -2 - x & \text{für } \; -2 \le x < -1 \end{cases} \quad$ und $\; f(x) = f(x - 4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

**Aufgabe 2-24:**

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi] .$$

Setzen Sie diese Funktion so zu einer $2\pi$ - periodischen Funktion

$$f(x) = f(x - 2\pi) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

fort, dass die zugehörige Fourier-Reihe

a) nur aus Sinus-Gliedern

b) nur aus Kosinus-Gliedern

besteht. Berechnen Sie für beide Fälle die Fourier-Reihe von $f(x)$.

Abgabe: KW 29

**Aufgabe 2-25:**

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Fourier-Reihe in komplexer Darstellung.

a) $f(x)=\begin{cases} A & \text{für } T/2-\tau \le t < T/2 \\ -A & \text{für } T/2 \le t < T/2+\tau \\ 0 & \text{für alle übrigen } t\in[0,T) \end{cases}$ und $f(t)=f(t-T) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

b) $f(t)=A\cos(\omega_0 t)$ für $0\le t<\dfrac{\pi}{\omega_0}=T$ und $f(t)=f(t-T) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

c) $f(t)=e^{-\beta t}$ für $t\in(-T/2,T/2)$ mit $\beta\ne 0$ und $f(t)=f(t-T) \quad \forall t\in\mathbb{R}$

**Aufgabe 2-26:**

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der folgenden Funktionen.

a) $f(t)=\begin{cases} 1-|t|/T & \text{für } -T\le t\le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $f(t)=1_{(0,T]}(t)-1_{[-T,0)}(t)=\begin{cases} 1 & \text{für } 0<t\le T \\ -1 & \text{für } -T\le t<0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

c) $f(t)=e^{-\alpha t^2}$ $\left(\text{Hinweis: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}\right)$

d) $f(t)=\begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{für } |t|\le \pi/\omega_0 = T_0/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$