Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 3

Kapitel 10

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Institute of Wateracoustics, Sonar Engineering and Signal Theory
iWSS
Hochschule Bremen

Höhere Mathematik 3

Kapitel 10

Inhaltsverzeichnis

10 Gewöhnliche Differentialgleichungen 10-1

10.1 Einführung 10-1

10.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung 10-9
10.2.1 Geometrische Interpretation 10-9
10.2.2 Existenz und Eindeutigkeit 10-12
10.2.3 Trennbare Differentialgleichungen 10-18
10.2.4 Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen 10-22
10.2.5 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung 10-31
10.2.6 Exakte Differentialgleichung 10-39
10.2.7 Exakte Differentialgleichung durch integrierenden Faktor 10-41
10.2.8 Bernoullische Differentialgleichung 10-46
10.2.9 Riccatische Differentialgleichung 10-50

10.3 Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung 10-53
10.3.1 Grundlagen 10-53
10.3.2 Reduktion der Ordnung 10-66
10.3.3 Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten 10-74

10.4 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung 10-102
10.4.1 Grundlagen 10-102
10.4.2 Lineare homogene Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten 10-109

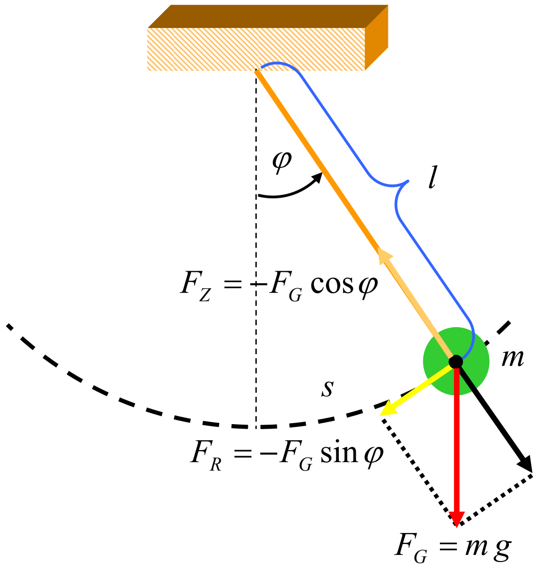
10 Gewöhnliche Differentialgleichungen

10.1 Einführung

Viele Naturgesetze lassen sich nur durch Differentialgleichungen (DGLn) formulieren, z.B.

1) Radioaktiver Zerfall
   $N'(t) = -cN(t)$

2) Mathematisches Pendel
   $F_G = mg$
   Rückführungskraft
   $F_R = -mg\sin\varphi = F$
   $s = l\varphi,\ \ s'' = l\varphi''$
   $a = s'' = l\varphi''$ Bahnbeschleunigung



Nach dem Newtonschen Gesetz gilt

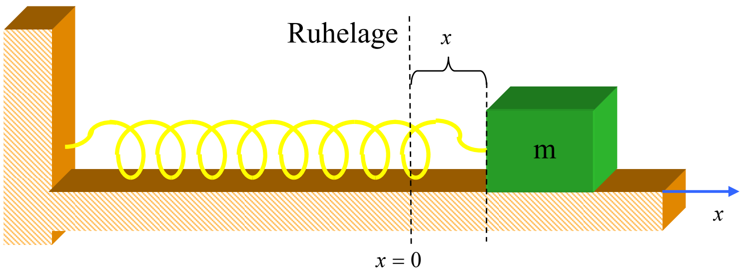
$$F = ma \;\Rightarrow\; ml\varphi'' + mg\sin\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

(nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung)

Ist φ sehr klein $\Rightarrow$ $\sin\varphi \approx \varphi$ und damit die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (Schwingungsdifferentialgleichung)

$$\varphi'' + \omega^2\varphi = 0 \text{ mit } \omega = \sqrt{g/l}.$$

3) Federschwingung
   $F_F = -cx = F$
   Also gilt nach dem Gesetz von Newton
   $ma + cx = 0.$



Mit $a = x''$ und $\omega = \sqrt{c/m}$ erhält man ebenfalls eine Schwingungsdifferentialgleichung

$$x'' + \omega^2 x = 0.$$

Bei zusätzlicher Reibung

$$F_R = -bv = -bx'$$

erhält man

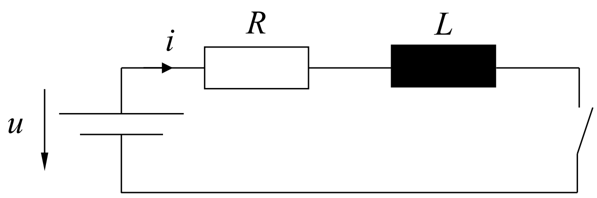
$$F_R + F_F = F, \;\; mx'' + bx' + cx = 0$$

und nach Division durch m schließlich

$$x'' + 2\delta x' + \omega^2 x = 0 \;\text{ mit }\; \delta = \frac{b}{2m}.$$

4) Einschaltvorgang

$$u = Ri + L\frac{di}{dt}, \;\; i(0) = 0$$



$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{u}{L}, \;\; i(0) = 0,$$

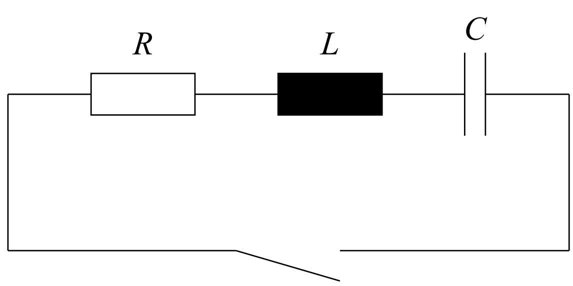
d.h. lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangsbedingung.

5) Elektrischer Schwingkreis

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

$$\Rightarrow \;\; \frac{1}{C}i + L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = 0,$$



d.h. homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

Gesucht sind jeweils die Funktionen, die auf gewissen Teilmengen des $\mathbb{R}$ die Differentialgleichung erfüllen, z.B. $N(t), \varphi(t), x(t), i(t)$.

Eine Differentialgleichung ist somit eine Gleichung für eine Funktion, in der die Funktion selbst und gewisse Ableitungen der Funktion vorkommen können.

Ist die Funktion von einer Variablen abhängig, so spricht man von einer gewöhnlichen sonst von einer partiellen Differentialgleichung.

Die höchste vorkommende Ableitung bestimmt die Ordnung der Differentialgleichung, z.B.

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

Zusätzlich zur Differentialgleichung werden oft Bedingungen an die Lösungsfunktion gestellt.

<u>Zusätzliche Bedingungen</u>

1) Anfangsbedingungen

   a) $y' = y$, Anfangsbedingung: $y(0) = 1$

   $$\frac{y'}{y} = 1 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln|y| = x + C_1$$

   $$\Rightarrow |y(x)| = e^{x+C_1} = e^{C_1} e^x = C_2 e^x,\ C_2 > 0 \Rightarrow y(x) = Ce^x,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

   wegen $y(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = e^x$.

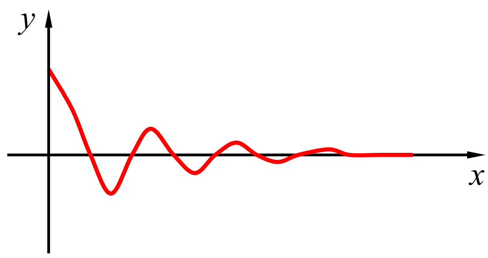
   b) $y'' + y = 0$, Anfangsbedingung: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

   $y(x) = \sin x$, $y'(x) = \cos x$, $y''(x) = -\sin x$.

2) Asymptotisches Verhalten

   $y'' + y' + y = 0$, $\lim\limits_{x \to \infty} y(x) = 0$,

   z.B. gedämpfte Schwingung.



3) Randbedingungen
$y'' + \omega^2 y = 0$, Randbedingung: $y(0) = y(l) = 0$, z.B. eingespannter Stab.

Die Fragen, die bei der Behandlung einer DGL auftreten, sind

1) Existenz
Ist die gegebene DGL lösbar? D.h. existiert eine reellwertige Funktion, die in einer gewissen Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist und dort der DGL und den zusätzlichen Bedingungen genügt?
2) Lösungsgesamtheit, Eindeutigkeit
Wie sieht die Lösungsgesamtheit der DGL aus? Existiert bei zusätzlichen Bedingungen genau eine Lösung oder existieren mehrere Lösungen?
3) Stetige Abhängigkeit von den zusätzlichen Bedingungen
Führen kleine Störungen, z.B. in den Anfangsbedingungen, nur zu geringfügig abgeänderten Werten der Lösung?
4) Lösungsmethoden
Wie bestimmt man die allgemeine Lösung einer DGL?

Definition 10-1: (*gewöhnliche DGL n-ter Ordnung*)
Es sei $n \in \mathbb{N}$, $F: D(F) \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.

1) $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ heißt gewöhnliche DGL n-ter Ordnung. Lässt sich $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ nach $y^{(n)}$ auflösen, d.h. existiert ein $f: D(f) \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ mit $y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$, so heißt diese DGL eine explizite DGL n-ter Ordnung. Sonst heißt sie implizite DGL n-ter Ordnung.

2) Eine Funktion $y \in C^n(I)$ heißt Lösung der DGL auf $I \subset \mathbb{R}$, wenn $(x, y(x), y'(x),\dots,y^{(n)}(x)) \in D(F)$ und $F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0 \quad \forall x \in I$.

3) Sind zusätzlich zur DGL noch Anfangsbedingungen $y(\xi) = \eta_0, y'(\xi) = \eta_1,\dots,y^{(n-1)}(\xi) = \eta_{n-1}$ mit $\xi \in I$ und $\eta_i \in \mathbb{R}$ gegeben, und erfüllt y als Lösung auch diese Anforderungen, so heißt y Lösung des Anfangswertproblems (AWP).

10.2 Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gegeben sei ein Anfangswertproblem (AWP) 1. Ordnung, d.h.

$$y' = f(x, y), \;\; y(\xi) = \eta.$$

10.2.1 Geometrische Interpretation

Richtungsfeld

Ist y Lösung der DGL, so muss gelten

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right).$$

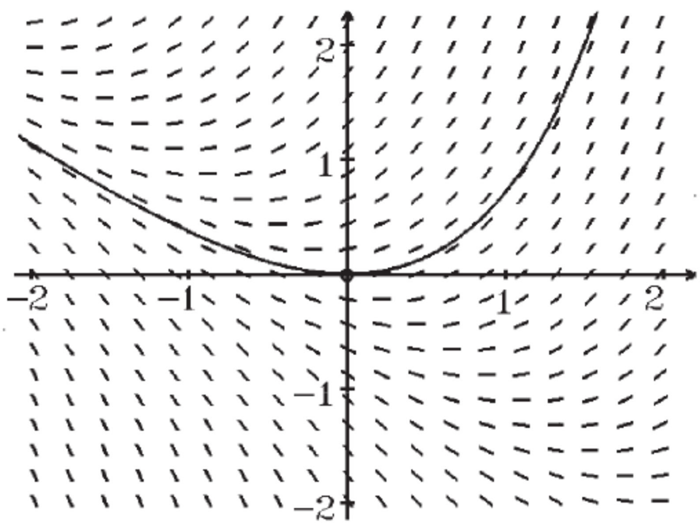
Demzufolge ist die Steigung von $y(x)$ an der Stelle x gleich $f(x,y(x))$.

Zeichnet man in möglichst vielen Punkten $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ ein Stück Tangente mit der Steigung $y' = f(x,y)$, so erhält man ein Richtungsfeld, aus dem man den ungefähren Verlauf des Lösungsgraphen ablesen kann, wenn man bei $(\xi,\eta)^T$ beginnt.

Beispiel:

$y' = x + y, \;\; y(0) = 0,$ exakte Lösung des AWP: $y(x) = e^x - 1 - x.$

Richtungsfeld



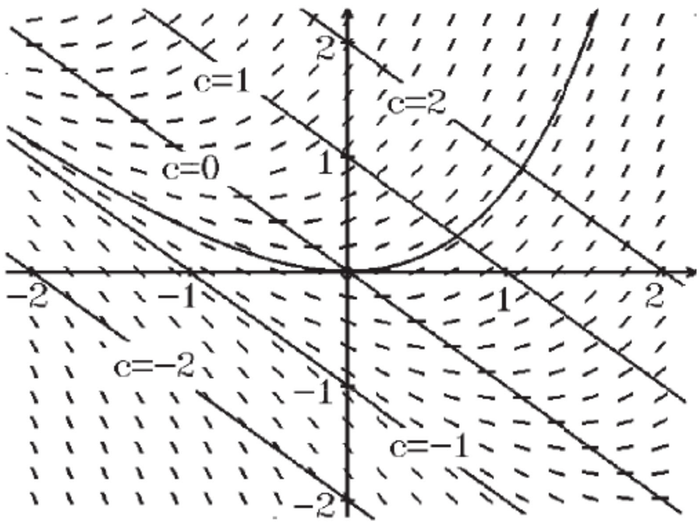
Isoklinen

Die Isoklinen sind ein Hilfsmittel, das Richtungsfeld schneller zeichnen zu können. Isoklinen sind Kurven gleicher Steigung, d.h.

$$K_C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; f(x,y) = C \right\}, \; C \in \mathbb{R}.$$

Die Isoklinen in obigem Beispiel sind

$y + x = C \;\Rightarrow\; y = C - x \;\Rightarrow$ Geraden mit der Steigung -1.



10.2.2 Existenz und Eindeutigkeit

Nun wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen ein AWP 1. Ordnung lösbar bzw. eindeutig lösbar ist.

Definition 10-2: (*Lipschitzbedingung*)
Es sei $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dann genügt f auf D einer Lipschitzbedingung bzgl. y genau dann, wenn ein $L > 0$ existiert mit

$$\left| f(x,y) - f(x,\tilde{y}) \right| \le L \left| y - \tilde{y} \right| \quad \forall (x,y)^T, (x,\tilde{y})^T \in D.$$

Satz 10-1:
Existiert in $D \subset \mathbb{R}^2$ die partielle Ableitung $\partial f / \partial y$ und ist $\partial f / \partial y$ in D stetig und beschränkt mit

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \le L \quad \forall (x,y)^T \in D,$$

dann genügt f auf D einer Lipschitzbedingung bzgl. y.

Satz 10-2: (*Existenzsatz von Peano*)
Es seien $(\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0, \beta > 0$ und

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ |x-\xi| \le \alpha,\ |y-\eta| \le \beta \right\}.$$

Außerdem sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf I,

$$K = \max_{(x,y)^T \in I} |f(x,y)| \ \text{ und } \ \delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{K}\right\}.$$

Dann existiert auf

$$U_\delta(\xi) = \{\, x \in \mathbb{R} : \ |x-\xi| < \delta \}$$

mindestens eine Lösung y des AWP

$$y' = f(x,y), \quad y(\xi) = \eta.$$

Satz 10-3: (*Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf*)
Es seien $(\xi,\eta)^T \in \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0, \beta > 0$ und

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ |x-\xi| \le \alpha,\ |y-\eta| \le \beta \right\}.$$

Ferner sei $f: I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und genüge auf I einer Lipschitzbedingung bzgl. y sowie

$$K = \max_{(x,y)^T \in I} |f(x,y)| \ \text{ und } \ \delta = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{K}\right\}.$$

Dann existiert auf

$$U_\delta(\xi) = \{\, x \in \mathbb{R} : \ |x-\xi| < \delta \}$$

genau eine Lösung y des AWP

$$y' = f(x,y), \quad y(\xi) = \eta.$$

Beweis: s. Literatur

Anmerkung:

Der Satz gilt auch, wenn $\beta = \infty$ ist. Dann ist $\delta = \alpha$ und eine eindeutige Lösung y existiert auf $U_\alpha(\xi) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \left| x - \xi \right| < \alpha \right\}$.

Der konstruktive Beweis liefert gleichzeitig das iterative Lösungsverfahren von Picard-Lindelöf

$$y_0(x) \equiv \eta, \;\; y_n(x) = \eta + \int_\xi^x f\left(t, y_{n-1}(t)\right) dt, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; x \in U_\delta(\xi).$$

Beispiel: Anwenden des Verfahrens von Picard-Lindelöf

$y' = x + y, \;\; y(0) = 0$

$f(x,y) = x + y$ ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ und

$f_y(x,y) = 1$ ist stetig und beschränkt auf $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ Lipschitzbedingung bzgl. y ist erfüllt auf $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt für $\alpha = \beta = \infty$.

$\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige Lösung $y(x)$ auf $\mathbb{R}$.

Verfahren von Picard-Lindelöf

$$y_0(x) \equiv 0, \;\; y_n(x) = 0 + \int_0^x \left(t + y_{n-1}(t)\right) dt$$

$$y_1(x) = \int_0^x \left(t + 0\right) dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$y_3(x) = \int_0^x \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) dt = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$\vdots$$

$$y_n(x) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{x^k}{k!} \quad \text{(Beweis durch Induktion)}$$

$$y_n(x)=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{x^k}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}y(x)=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}-1-x=e^x-1-x.$$

$\Rightarrow\ y(x)=e^x-1-x$ ist einzige Lösung des AWP $y'=x+y,\ y(0)=0$ auf $\mathbb{R}$.

Beispiel: (*keine Eindeutigkeit*)

$y'=3y^{2/3},\ y(0)=0$

Lösungen: $y(x)\equiv 0$ und

$$y(x)=(x+C)^3,\ y(0)=0$$

$$\Rightarrow\ y(0)=C^3\ \Rightarrow\ C=0\ \Rightarrow\ y=x^3.$$

Es lassen sich noch weitere Lösungen mit $y(0)=0$ folgendermaßen konstruieren

$$y(x)=\begin{cases}0 & \text{für } x\le 0\\ x^3 & \text{für } x>0\end{cases}\quad\text{oder}\quad y(x)=\begin{cases}(x+C)^3 & \text{für } x\le -C\\ 0 & \text{für } x>-C\end{cases},\ C>0.$$

Es existieren somit unendlich viele Lösungen durch den Punkt $(0,0)^T$. Dieses AWP ist also nicht eindeutig lösbar. f genügt nicht der Lipschitzbedingung bzgl. y in $U((0,0)^T)$, denn $f_y(x,y)=2y^{-1/3}$ existiert nicht in $(0,0)^T$.

10.2.3 Trennbare Differentialgleichungen

$$y'=f(x)g(y),\ \ y(\xi)=\eta$$

Ist f stetig auf $[a,b]$ mit $\xi\in[a,b]$ und $g(y)$ stetig differenzierbar auf $[c,d]$ mit $\eta\in[c,d]$, dann ist das AWP eindeutig lösbar auf $U_\delta(\xi)$.

a) Sonderfall: Ist $g(y)=0$ für $y\in[c,d]$, so untersucht man, ob dieses y Lösung der DGL ist, z.B.

$$y'=x(y-1)\ \Rightarrow\ y(x)\equiv 1 \text{ ist Lösung der DGL auf } \mathbb{R}.$$

b) Ist $g(y)\ne 0$ auf $[c,d]$, so gilt

$$y' = f(x)\,g(y) \;\Rightarrow\; \frac{y'}{g(y)} = f(x) \;\Rightarrow\; \int \frac{y'}{g(y)}\,dx = \int f(x)\,dx + C$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C.$$

Ist G Stammfunktion von $1/g$ auf $[a,b]$ und F Stammfunktion von f auf I, dann gilt

$$G\big(y(x)\big) = F(x) + C.$$

Ist G nach y auflösbar, so liefert die Gleichung $G(y) = F(x) + C$ die Lösung der DGL $y'(x) = f(x)\,g(y)$.

Beispiel:

1) $y' = x(y-1)$

a) Sonderfall $y(x) \equiv 1$ ist Lösung auf $\mathbb{R}$.

b) $y \neq 1$

$$\Rightarrow\; \int \frac{1}{y-1}\,dy = \int x\,dx + C_1 \;\Rightarrow\; \ln|y-1| = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$\Rightarrow\; |y-1| = e^{(x^2/2)+C_1} = e^{C_1}\,e^{x^2/2} = C_2\,e^{x^2/2} \quad \text{mit } C_2 = e^{C_1} > 0$$

$$\Rightarrow\; y-1 = C_3\,e^{x^2/2} \quad \text{mit } C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\Rightarrow\; y(x) = 1 + C_3\,e^{x^2/2}$ mit $C_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ und $y(x) \equiv 1$ sind alle Lösungen der DGL

$\Rightarrow\; y(x) = 1 + Ce^{x^2/2}$ mit $C \in \mathbb{R}$ ist allgemeine Lösung auf $\mathbb{R}$.

Ist zusätzlich die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ gegeben, dann liefert

$$y(0) = 1 + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -1$$

schließlich mit

$$y(x) = 1 - e^{x^2/2}$$

die Lösung des AWP $y'(x) = x(y-1),\; y(0) = 0$ auf $\mathbb{R}$.

2) $y' = x^2 e^{-y}$

a) Sonderfall entfällt, da $e^{-y} \neq 0$.

b) $\int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int x^2 dx \;\Rightarrow\; \int e^y dy = \int x^2 dx \;\Rightarrow\; e^y = \frac{x^3}{3} + C$

$\Rightarrow\; y = \ln\left(\frac{x^3}{3} + C\right)$ ist allgemeine Lösung auf $\left\{x \in \mathbb{R} :\; \frac{x^3}{3} + C > 0\right\}$.

Die zusätzliche Anfangsbedingung $y(0) = 0$ liefert hier

$$y(0) = \ln(C) = 0 \;\Rightarrow\; C = 1$$

und damit

$$y(x) = \ln\left(\frac{x^3}{3} + 1\right)$$

als Lösung des AWP $y' = x^2 e^{-y},\; y(0) = 0$ auf $\left\{x \in \mathbb{R} :\; x > -\sqrt[3]{3}\right\}$.

10.2.4 Durch Substitution lösbare Differentialgleichungen

$$y' = f(x, y) = \tilde{f}\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right),\; y(\xi) = \eta$$

Sind f und f_y stetig auf $\bar{U}\left((\xi, \eta)^T\right) \Rightarrow$ AWP eindeutig lösbar.

A) $y' = \tilde{f}(ax + by + c),\; \alpha = \beta = 0$

<u>Substitution:</u> $u(x) = ax + by(x) + c$

$\Rightarrow\; u' = a + by' = a + b\tilde{f}(u) \;\Rightarrow$ lösbar durch Trennung der Variablen.

<u>**Beispiel:**</u>

$y' = (x + y)^2,\; y(0) = 0$

Für $f(x,y) = (x + y)^2$ gilt f, f_y sind stetig auf $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $U(0)$.

<u>Substitution:</u> $u(x) = x + y(x)$

$$u' = 1 + y' = 1 + u^2 \;\Rightarrow\; \frac{u'}{1+u^2} = 1 \;\Rightarrow\; \int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \int dx$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{1}{1+u^2}\,du = \int dx \;\Rightarrow\; \arctan u = x + C \;\Rightarrow\; u = \tan(x+C) = x + y(x)$$

$\Rightarrow\; y(x) = u - x = \tan(x+C) - x,\;\; C \in \mathbb{R}$ ist allgemeine Lösung.

$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; y(0) = \tan C = 0 \;\Rightarrow\; C = 0 \;\Rightarrow\; y(x) = \tan(x) - x$

ist die Lösung des AWP auf $U(0)$ mit $U(0) = \left\{\, x \in \mathbb{R} : |x| < \pi/2 \right\}$.

B) $y' = \tilde{f}(y/x),\;\; a = c = \beta = \gamma = 0$

Substitution: $u(x) = y(x)/x$

$$\Rightarrow\; u' = \frac{y'x - y\cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\tilde{f}(u) - u\right)$$

$\Rightarrow$ lösbar durch Trennung der Variablen.

Beispiel:

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2},\;\; y(2) = -8/3$$

Für $f(x,y) = (y^2 + 2xy)/x^2$ gilt f, f_y sind stetig auf $\bar{U}\left((2,-8/3)^T\right)$

$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $U(2)$.

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} = \tilde{f}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Substitution: $u(x) = y(x)/x$

$$\Rightarrow\; u' = \frac{1}{x}\left(\tilde{f}(u) - u\right) = \frac{1}{x}(u^2 + 2u - u) = \frac{u^2 + u}{x}$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{1}{u^2 + u}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{u(u+1)}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{u+1}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \;\Rightarrow\; \ln|u| - \ln|u+1| = \ln|x| + \tilde{C}$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln|x| + \tilde{C} \Rightarrow \left|\frac{u}{u+1}\right| = |x|e^{\tilde{C}} \Rightarrow \frac{u}{u+1} = Cx$$

$$\Rightarrow u = Cxu + Cx \Rightarrow u(1-Cx) = Cx$$

$\Rightarrow u = \dfrac{Cx}{1-Cx}$ und die Sonderfälle $u(x) \equiv 0,\ u(x) \equiv -1$ sind Lösungen.

$\Rightarrow y(x) = u(x)\,x = \dfrac{Cx^2}{1-Cx}$ und die Sonderfälle $y(x) \equiv 0,\ y(x) = -x$ sind Lösungen der DGL.

$y(2) = -8/3 \Rightarrow y(x) \equiv 0,\ y(x) = -x$ erfüllen die Anfangsbedingung nicht, aber

$$y(2) = \frac{4C}{1-2C} = -\frac{8}{3} \Rightarrow 12C = 16C - 8 \Rightarrow C = 2$$

$\Rightarrow y(x) = \dfrac{2x^2}{1-2x}$ ist Lösung des AWP auf $U(2) = (1/2, \infty)$.

C) $y' = \tilde{f}\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ mit $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0$, d.h. $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sind linear abhängig und es existiert ein λ mit $(a,b)^T = \lambda(\alpha,\beta)^T$.

Substitution: $u(x) = \alpha x + \beta y(x) + \gamma$

$$\begin{aligned} u' &= \alpha + \beta y' \\ &= \alpha + \beta \tilde{f}\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) = \alpha + \beta \tilde{f}\left(\frac{\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma) - \lambda\gamma + c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right) \\ &= \alpha + \beta \tilde{f}\left(\frac{\lambda u - \lambda\gamma + c}{u}\right) = \alpha + \beta \hat{f}(u) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ lösbar durch Trennung der Variablen.

Beispiel:

$$y' = \frac{4x-2y-2}{2x-y+3},\ y(0) = 0$$

Für $f(x,y) = (4x-2y-2)/(2x-y+3)$ gilt f, f_y sind stetig auf $\bar{U}\left((0,0)^T\right)$

$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $U(0)$.

$$\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -4+4=0 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \lambda = 2$$

<u>Substitution:</u> $u(x) = 2x - y(x) + 3$

$$u' = 2 - y' = 2 - \frac{2(2x-y+3)-6-2}{2x-y+3} = 2 - \frac{2u-8}{u} = 2 - \hat{f}(u) = \frac{8}{u}$$

$$\Rightarrow \int u\,du = 8\int dx + \tilde{C} \;\Rightarrow\; \frac{u^2}{2} = 8x + \tilde{C} \;\Rightarrow\; u^2 = 16x + C$$

$$\Rightarrow u = \pm\sqrt{16x+C} \;\Rightarrow\; y(x) = 2x+3-u(x) = 2x+3\pm\sqrt{16x+C}.$$

$$y(0)=0 \;\Rightarrow\; y(0) = 3\pm\sqrt{C} = 0 \;\Rightarrow\; C = 9 \text{ und } (-)$$

$\Rightarrow$ $y(x) = 2x+3-\sqrt{16x+9}$ ist Lösung des AWP auf $U(0) = (-9/16, \infty)$.

D) $y' = \tilde{f}\left(\dfrac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ mit $\det\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$, d.h.

es existiert genau ein $(x_0, y_0)^T$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -\gamma \end{pmatrix}$.

<u>Substitution:</u> $u(x) = x - x_0$, $v(u) = y(x) - y_0$

$$\Rightarrow d\,v\big(u(x)\big)/dx = v'(u)\,u'(x) = y'(x) \;\Rightarrow\; v'(u) = y'(x)$$

$$v'(u) = \tilde{f}\left(\frac{ax+by+c-ax_0-by_0-c}{\alpha x+\beta y+\gamma-\alpha x_0-\beta y_0-\gamma}\right) = \tilde{f}\left(\frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0)}\right)$$

$$= \tilde{f}\left(\frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}\right) = \tilde{f}\left(\frac{a+b\,v/u}{\alpha+\beta\,v/u}\right) = \hat{f}\left(\frac{v}{u}\right) \Rightarrow \text{ lösbar nach B).}$$

<u>**Beispiel:**</u>

$$y' = \frac{x-y+3}{x+y+1},\quad y(0)=0$$

Für $f(x,y)=(x-y+3)/(x+y+1)$ gilt f, f_y sind stetig auf $\bar{U}\left((0,0)^T\right)$
$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $U(0)$.

$$\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$$

<u>Substitution:</u> $u(x)=x+2,\ v(u)=y(x)-1$

$$\Rightarrow v'(u)=y'(x)=\frac{x-y+3-(-2)+1-3}{x+y+1-(-2)-1-1}$$
$$=\frac{(x+2)-(y-1)}{(x+2)+(y-1)}=\frac{u-v}{u+v}=\frac{1-v/u}{1+v/u}=\hat{f}\left(\frac{v}{u}\right).$$

<u>Substitution:</u> $w(u)=v(u)/u$

$$w'=\frac{1}{u}\left(\hat{f}(w)-w\right)=\frac{1}{u}\left(\frac{1-w}{1+w}-w\right)$$
$$=\frac{1}{u}\frac{1-w-w-w^2}{1+w}=\frac{1}{u}\frac{1-2w-w^2}{1+w}$$

$$\Rightarrow \int\frac{1+w}{1-2w-w^2}\,dw=-\frac{1}{2}\int\frac{2+2w}{w^2+2w-1}\,dw=\int\frac{1}{u}\,du$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left|w^2+2w-1\right|=\ln|u|+\tilde{C}$$
$$\Rightarrow \ln\left|w^2+2w-1\right|=-2\ln|u|+\hat{C}=\ln\left|\frac{1}{u^2}\right|+\hat{C} \Rightarrow w^2+2w-1=\frac{C}{u^2}.$$

Mit $w=v/u$ folgt

$$\left(\frac{v}{u}\right)^2+2\frac{v}{u}-1=\frac{C}{u^2} \Rightarrow v^2+2uv-u^2=C \Rightarrow v=-u\pm\sqrt{C+2u^2}$$

und mit $u=x+2,\ v=y-1$ schließlich $y=1-(x+2)\pm\sqrt{C+2(x+2)^2}$.

$$y(0)=0 \Rightarrow y(0)=-1\pm\sqrt{C+8}=0 \Rightarrow C=-7 \text{ und } (+)$$
$$\Rightarrow y=-1-x+\sqrt{2(x+2)^2-7}$$

ist Lösung des AWP auf $U(0)=\left(\sqrt{7/2}-2,\infty\right)$.

10.2.5 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x), \quad y(\xi) = \eta$$

Sind a, f stetig auf $\bar{U}(\xi) = [\xi - \alpha, \xi + \beta]$, dann ist das AWP auf $U(\xi) = (\xi - \alpha, \xi + \beta)$ eindeutig lösbar, denn für

$$g(x, y) = f(x) - a(x)y$$

gilt $g, g_y = -a(x)$ sind stetig und g_y beschränkt auf $\bar{U}(\xi) \times \mathbb{R}$. Sind a, f stetig auf $\mathbb{R} \Rightarrow \alpha = \beta = \infty \Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $\mathbb{R}$.

Die rechte Seite der DGL heißt Störfunktion. Die DGL heißt homogen, wenn $f \equiv 0$, andernfalls heißt sie inhomogen.

Da die DGL linear ist, setzt sich die allgemeine Lösung aus der allgemeinen Lösung y_h der homogenen DGL

$$y' + a(x)y = 0$$

und einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen DGL

$$y' + a(x)y = f(x)$$

zusammen, also

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

1) allgemeine Lösung der homogenen DGL
   $y' = -a(x)y$

   a) Sonderfall $y(x) \equiv 0$ ist Lösung der homogenen DGL.

   b) $y(x) \neq 0$, Trennung der Variablen

   $$\Rightarrow \int \frac{1}{y}\,dy = -\int a(x)\,dx$$

   $$\Rightarrow \ln|y| = -\int a(x)\,dx + \tilde{C}$$

   $$|y| = e^{-A(x)+\tilde{C}}, \quad A(x) = \int a(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \; y_h = Ce^{-A(x)} \text{ mit } A(x) = \int a(x)\,dx \text{ und } C \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL $y' = -a(x)y$, wobei der Sonderfall $y(x) \equiv 0$ für $C = 0$ enthalten ist.

2) partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

Ansatz: Variation der Konstanten

$$y_p(x) = C(x)y_1(x), \; y_1(x) = e^{-A(x)} \;\Rightarrow\; y_p'(x) = C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x)$$

Einsetzen in die inhomogene DGL

$$y' + a(x)y = f(x)$$

liefert

$$C'(x)y_1(x) + C(x)y_1'(x) + a(x)C(x)y_1(x) = f(x)$$
$$C'(x)y_1(x) + C(x)\big(y_1'(x) + a(x)y_1(x)\big) = f(x).$$

Wegen $y_1'(x) + a(x)y_1(x) = 0$ folgt

$$C'(x)y_1(x) = f(x) \;\Rightarrow\; C'(x) = \frac{f(x)}{y_1(x)}, \; y_1(x) \neq 0 \;\Rightarrow\; C(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$$

$$\Rightarrow \; y_p(x) = y_1(x)\int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL $y' + a(x)y = f(x)$.

Also ergibt sich aus $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$ nach Einsetzen die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu

$$y(x) = y_1(x)\left(C + \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx\right), \; C \in \mathbb{R}, \; y_1(x) = \exp\big(-\int a(x)\,dx\big).$$

Die spezielle Lösung des AWP mit der Anfangsbedingung $y(\xi) = \eta$ lautet

$$y(x) = y_1(x)\left(\frac{\eta}{y_1(\xi)} + \int_\xi^x \frac{f(t)}{y_1(t)}dt\right) \text{ mit } y_1(x) = \exp\left(-\int_\xi^x a(t)\,dt\right).$$

Beispiel:

1) $y' + \sin(x)y = 2\sin x,\;\; y(0) = 0$

$a(x) = \sin x,\; f(x) = 2\sin x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $\mathbb{R}$.

allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$y_1(x) = e^{-\int \sin x\,dx} = e^{\cos x} \;\;\Rightarrow\;\; y_h(x) = Ce^{\cos x},\;\; C \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

partikuläre Lösung der inhomogenen DGL

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_1(x)}dx = \int \frac{2\sin x}{e^{\cos x}}dx = \int 2\sin x\, e^{-\cos x}dx = 2e^{-\cos x}$$

$\Rightarrow\;\; y_p(x) = C(x)y_1(x) = 2e^{-\cos x}e^{\cos x} = 2$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL, die hier aber auch leicht zu erraten gewesen wär.

$\Rightarrow\;\; y(x) = y_h(x) + y_p(x) = Ce^{\cos x} + 2$

ist allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$y(0) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; y(0) = Ce + 2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; C = -2/e$

$\Rightarrow\;\; y(x) = -2\,e^{\cos x - 1} + 2$

ist Lösung des AWP auf $\mathbb{R}$.

2) $\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{U}{L},\;\; i(0) = 0$

$a(t) \equiv R/L,\; f(t) \equiv U/L$ sind stetig auf $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $\mathbb{R}$.

allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$i_1(x) = \exp\left(-\int \frac{R}{L}dt\right) = \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \;\;\Rightarrow\;\; i_h(x) = C\exp\left(-\frac{R}{L}t\right),\;\; C \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

<u>partikuläre Lösung der inhomogenen DGL</u>

$$C(t)=\int \frac{U/L}{\exp\left(-(R/L)t\right)}\,dt=\frac{U}{L}\frac{L}{R}\exp\left(\frac{R}{L}t\right)=\frac{U}{R}\exp\left(\frac{R}{L}t\right)$$

$$\Rightarrow\; i_p(t)=C(t)\,i_1(t)=\frac{U}{R}\exp\left(\frac{R}{L}t\right)\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)=\frac{U}{R}$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

$$\Rightarrow\; i(t)=i_h(t)+i_p(t)=C\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)+\frac{U}{R}$$

ist allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$$i(0)=0\;\Rightarrow\; i(0)=C+\frac{U}{R}=0\;\Rightarrow\; C=-\frac{U}{R}$$

$$\Rightarrow\; i(t)=-\frac{U}{R}\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)+\frac{U}{R}=\frac{U}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right)$$

ist Lösung des AWP auf $\mathbb{R}$.

3) $y'+\tan(x)y=\sin x,\;\; x\in(-\pi/2,\pi/2),\;\; y(0)=1$

$a(x)=\tan x,\;\; f(x)=\sin x$ sind stetig auf $(-\pi/2,\pi/2)$

$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $(-\pi/2,\pi/2)$.

<u>allgemeine Lösung der homogenen DGL</u>

$$y_1(x)=e^{-\int \tan x\,dx}=e^{\ln(\cos x)}=\cos x\;\Rightarrow\; y_h(x)=C\cos x,\;\; C\in\mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL.

<u>partikuläre Lösung der inhomogenen DGL</u>

$$C(x)=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=-\ln\left|\cos x\right|=-\ln(\cos x)\quad \forall x\in(-\pi/2,\pi/2)$$

$$\Rightarrow\; y_p(x)=C(x)y_1(x)=-\ln(\cos x)\cos x$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

$$\Rightarrow\; y(x)=y_h(x)+y_p(x)=C\cos x-\ln\cos x\cdot\cos x=\cos x(C-\ln\cos x)$$

ist allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$y(0) = 1 \Rightarrow y(0) = C = 1$

$\Rightarrow y(x) = \cos x \left(1 - \ln \cos x\right)$ ist Lösung des AWP auf $(-\pi/2, \pi/2)$.

10.2.6 Exakte Differentialgleichung

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0 \text{ mit } f_y = g_x \text{ auf } M \subset \mathbb{R}^2$$

Hierbei muss M ein einfach zusammenhängendes Gebiet sein und $f, g \in C^1(M)$. Unter der obigen Voraussetzung $f_y = g_x$ auf M erfüllt das Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T = (f, g)^T$ die Integrabilitätsbedingung $v_{2,x} = v_{1,y}$ auf M und damit existiert auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet M ein Potential

$$u: M \to \mathbb{R} \text{ mit } u_x = f \text{ und } u_y = g.$$

Damit ist

$$u\left(x, y(x)\right) = C$$

die allgemeine implizite Lösung der exakten DGL, denn für $u(x, y(x)) = C$

erhält man durch differenzieren nach x

$$\frac{d}{dx} u\left(x, y(x)\right) = u_x\left(x, y(x)\right) + u_y\left(x, y(x)\right) y'(x) = 0.$$

Gelingt es, die Gleichung $u(x, y(x)) = C$ nach y aufzulösen, so erhält man die Lösungen y in expliziter Form.

Beispiel:

$(1 + y^2 + 3x^2 y) + (2xy + x^3 - 1)\,y' = 0$

Mit $f(x) = 1 + y^2 + 3x^2 y$ und $g(x) = 2xy + x^3 - 1$ gilt auf $\mathbb{R}^2$

$$f_y = 2y + 3x^2 = g_x.$$

Da der $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängendes Gebiet ist, ist die gegebene DGL exakt und es existiert ein Potential $u(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$.

$u_x = f \Rightarrow u(x,y) = \int (1 + y^2 + 3x^2 y)\,dx + h_1(y) = x + xy^2 + x^3 y + h_1(y)$

$$u_y = g \;\Rightarrow\; u(x,y) = \int (2xy + x^3 - 1)\,dy + h_2(x) = xy^2 + x^3y - y + h_2(x)$$

$\Rightarrow\; u(x,y) = xy^2 + x^3y - y + x$ ist Potential auf $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow\; u(x,y) = x - y + xy^2 + x^3y = C$ ist allgemeine implizite Lösung der DGL.

Auflösen nach y liefert schließlich die Lösungen in expliziter Form.

10.2.7 Exakte Differentialgleichung durch integrierenden Faktor

$$f(x,y) + g(x,y)y' = 0 \;\text{ mit }\; f_y \neq g_x$$

Diese DGL ist nicht exakt. Man kann versuchen, diese DGL durch Multiplikation mit einem Faktor (integrierenden Faktor) zu einer exakten DGL zu machen, d.h.

$$\mu(x,y)f(x,y) + \mu(x,y)g(x,y)y' = 0.$$

Damit diese DGL exakt ist, muss gelten

$$(\mu f)_y = (\mu g)_x \;\Leftrightarrow\; \mu_y f + \mu f_y = \mu_x g + \mu g_x \;\Leftrightarrow\; g\mu_x - f\mu_y = (f_y - g_x)\mu.$$

Dies ist eine partielle DGL 1. Ordnung für den integrierenden Faktor μ.

Hier werden wir diese partielle DGL nur für zwei Spezialfälle lösen.

1) μ ist nur von x abhängig, d.h. $\mu(x)$

$$\Rightarrow\; g\mu'(x) = (f_y - g_x)\mu(x) \;\Rightarrow\; \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{f_y - g_x}{g}$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\,dx = \int \frac{f_y - g_x}{g}\,dx \;\Rightarrow\; \ln|\mu(x)| = \int \frac{f_y - g_x}{g}\,dx$$

$$\Rightarrow\; \mu(x) = \exp\left(\int \frac{f_y - g_x}{g}\,dx\right).$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $(f_y - g_x)/g$ unabhängig von y ist.

2) μ ist nur von y abhängig, d.h. $\mu(y)$

$$\Rightarrow\; -f\,\mu'(y) = (f_y - g_x)\mu(y) \;\Rightarrow\; \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{g_x - f_y}{f}$$

$$\Rightarrow\; \int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}\,dy = \int \frac{g_x - f_y}{f}\,dy \;\Rightarrow\; \ln\left|\mu(y)\right| = \int \frac{g_x - f_y}{f}\,dy$$

$$\Rightarrow\; \mu(y) = \exp\left(\int \frac{g_x - f_y}{f}\,dy\right).$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn $(g_x - f_y)/f$ unabhängig von x ist.

Beispiel:

$(1-xy) + (xy - x^2)y' = 0, \quad y(1) = 0$

Mit $f(x,y) = 1 - xy$ und $g(x,y) = xy - x^2$ gilt

$$y' = -f(x,y)/g(x,y) = F(x,y).$$

F und F_y sind stetig auf $\bar{U}((1,0)^T)$ $\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $U(1)$.

Da $f_y - g_x = -x - (y - 2x) = x - y \not\equiv 0 \;\Rightarrow$ DGL nicht exakt.

$\dfrac{f_y - g_x}{g} = \dfrac{x - y}{x(y - x)} = -\dfrac{1}{x}$ ist unabhängig von y

$\Rightarrow\; \mu(x) = e^{-\int (1/x)\,dx} = e^{-\ln|x|} = \dfrac{1}{x}$ ist für $x > 0$ integrierender Faktor.

Somit ist die DGL

$$\frac{1}{x}(1 - xy) + \frac{1}{x}(xy - x^2)y' = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{x} - y\right) + (y - x)y' = 0, \;\; x \neq 0$$

exakt. Wegen

$$u_x(x,y) = \frac{1}{x} - y \;\text{ und }\; u_y(x,y) = y - x$$

folgt

$$u(x,y) = \int \left(\frac{1}{x} - y \right) dx + h_1(y) = \ln|x| - xy + h_1(y)$$

$$u(x,y) = \int (y - x)\, dy + h_2(x) = \frac{y^2}{2} - xy + h_2(x)$$

$$\Rightarrow \; u(x,y) = \frac{y^2}{2} - xy + \ln|x| \text{ ist Potential}$$

$$\Rightarrow \; u(x,y) = \frac{y^2}{2} - xy + \ln|x| = \tilde{C} \;\Rightarrow\; y^2 - 2xy + 2\ln|x| = C$$

ist allgemeine implizite Lösung für $x \neq 0$.

Auflösen nach y liefert mit

$$y(x) = x \pm \sqrt{x^2 + C - 2\ln|x|} = x \pm \sqrt{x^2 + C - \ln x^2}$$

die expliziten Lösungen der DGL für $x^2 > \ln x^2 - C$.

Aus der Anfangsbedingung $y(1) = 0$ folgt dann mit

$y(1) = 1 \pm \sqrt{1 + C} = 0 \;\Rightarrow\; C = 0$ und $(-)$

schließlich

$y(x) = x - \sqrt{x^2 - \ln x^2}$ ist Lösung des AWP auf $(0, \infty)$.

($x^2 > \ln x^2$ ist für alle $x > 0$ erfüllt)

10.2.8 Bernoullische Differentialgleichung

$$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha, \;\; y(\xi) = \eta, \;\; \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

f, g stetig auf $[a,b]$ mit $\xi \in [a,b]$ $(\alpha = 0, \alpha = 1 \;\Rightarrow$ lineare DGL).

Sonderfall: $y(x) \equiv 0$ ist Lösung der DGL für $\alpha > 0$.

Die Substitution $u(x) = y^{1-\alpha}(x)$ führt für u auf die lineare DGL

$$u' = (1-\alpha) f(x) u + (1-\alpha)\, g(x),$$

denn

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}(f\,y + g\,y^{\alpha})$$
$$= (1-\alpha)f\,y^{1-\alpha} + (1-\alpha)g = (1-\alpha)f\,u + (1-\alpha)g.$$

Beispiel:

$y' = -2xy - x^3y^3, \;\; y(0) = 1, \;\; \alpha = 3$

Mit $F(x,y) = -2xy - x^3y^3$ gilt

F, F_y sind stetig auf $\mathbb{R}^2 \;\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $U(0)$.

$y(x) \equiv 0$ ist Lösung der DGL, erfüllt aber nicht die Anfangsbedingung.

Substitution $u = y^{1-\alpha} = y^{-2}$ führt mit $f(x) = -2x$ und $g(x) = -x^3$ zu

$$u' = (1-\alpha)(-2x)u + (1-\alpha)(-x^3) = 4xu + 2x^3,$$

d.h. linear DGL in u.

allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$u' - 4xu = 0, \;\; u_1 = e^{\int 4x\,dx} = e^{2x^2} \;\Rightarrow\; u_h = Ce^{2x^2}.$

partikuläre Lösung der inhomogenen DGL:

$$C(x) = \int \frac{2x^3}{e^{2x^2}}\,dx = -\frac{1}{4}(2x^2+1)e^{-2x^2}$$

$$\Rightarrow\; u_p(x) = C(x)u_1(x) = -\frac{1}{4}(2x^2+1)e^{-2x^2}e^{2x^2} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\; u(x) = u_h(x) + u_p(x) = Ce^{2x^2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}.$$

Da $y^2(x) = 1/u(x)$

$$\Rightarrow \; y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{Ce^{2x^2} - x^2/2 - 1/4}} \quad \text{und} \quad y(x) \equiv 0$$

sind alle Lösungen der inhomogenen DGL.

$$y(0) = 1 \;\Rightarrow\; y(0) = \pm \frac{1}{\sqrt{C - 1/4}} = 1 \;\Rightarrow\; C = \frac{5}{4} \;\text{ und }\; (+)$$

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{5e^{2x^2} - 2x^2 - 1}} \quad \text{ist Lösung des AWP auf } \mathbb{R},$$

($5e^{2x^2} > 1 + 2x^2$ ist erfüllt für alle $x \in \mathbb{R}$).

10.2.9 Riccatische Differentialgleichung

$$y' = f(x)y + g(x)y^2 + h(x), \quad y(\xi) = \eta$$

f, g, h stetig auf $[a,b]$ mit $\xi \in [a,b]$.

Die allgemeine Lösung der Riccatischen DGL kann bestimmt werden, wenn eine Lösung y_p bekannt ist. Sei also y_p eine Lösung der gegebenen DGL, dann führt der Ansatz

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{u(x)}$$

auf weitere Lösungen der DGL.

Für die unbekannte Funktion u erhält man die lineare DGL

$$u' = -\big(f(x) + 2g(x)y_p(x)\big)u - g(x),$$

denn

$$y' = y_p' - \frac{u'}{u^2} = f\left(y_p + \frac{1}{u}\right) + g\left(y_p + \frac{1}{u}\right)^2 + h = f\,y_p + \frac{f}{u} + g\,y_p^2 + \frac{2g\,y_p}{u} + \frac{g}{u^2} + h$$

und da

$$y_p' = f\,y_p + g\,y_p^2 + h \;\Rightarrow\; -\frac{u'}{u^2} = \frac{f + 2g\,y_p}{u} + \frac{g}{u^2}$$

folgt nach Multiplikation mit $-u^2$

$$u' = -(f + 2g\,y_p)u - g.$$

Beispiel:

$y' = -(2x+1)y + y^2 + (1 + x + x^2),\ \ y(0) = 1/2$

$f(x) = -(2x+1),\ g(x) = 1,\ h(x) = 1 + x + x^2$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Mit $F(x,y) = -(2x+1)y + y^2 + (1 + x + x^2)$ und F, F_y stetig auf $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ AWP ist eindeutig lösbar auf $U(0)$.

$y_p(x) = x$ ist Lösung der DGL, erfüllt aber nicht die Anfangsbedingung.

$y = y_p + 1/u$ führt für u auf die lineare DGL

$u' = -\big(-(2x+1) + 2x\big)u - 1 \;\Rightarrow\; u' = u - 1 \;\Rightarrow\; u' - u = -1.$

<u>allgemeine Lösung der homogenen DGL</u>

$u' - u = 0,\ \ u_1 = e^{\int dx} = e^x \;\Rightarrow\; u_h(x) = Ce^x.$

<u>partikuläre Lösung der inhomogenen DGL</u>

$u_p(x) = 1$

$\Rightarrow\ u(x) = u_p(x) + u_h(x) = 1 + Ce^x$

$$\Rightarrow\ y(x) = y_p(x) + \frac{1}{u(x)} = x + \frac{1}{1 + Ce^x}$$

$y(0) = 1/2 \;\Rightarrow\; y(0) = 1/(1 + C) = 1/2 \;\Rightarrow\; C = 1$

$\Rightarrow\ y(x) = x + \dfrac{1}{1 + e^x}$ ist Lösung des AWP auf $\mathbb{R}$.

10.3 Lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

10.3.1 Grundlagen

Definition 10-3:

a) $L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$ heißt lineare DGL n-ter Ordnung in Normalform, d.h. die Ableitungen $y^{(k)}$ $(k = 1,\ldots,n)$ und die Funktion y kommen nur in linearer Form vor und die Koeffizientenfunktion von $y^{(n)}$ ist identisch 1.

Ferner seien die Koeffizientenfunktionen a_i $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ und die Funktion $f(x)$ der rechten Seite auf einem gemeinsamen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert und stetig.

b) Ist $f(x) \equiv 0$, so heißt die DGL homogene lineare DGL. Sind alle Koeffizientenfunktionen a_i $(i = 0,1,\ldots,n-1)$ konstant, so heißt die DGL lineare DGL mit konstanten Koeffizienten.

Satz 10-4:

Gegeben sei eine lineare DGL n-ter Ordnung $L[y] = f(x)$ mit a_i, f stetig auf I, dann gilt:

a) Mit y_1 und y_2 ist auch jede Linearkombination $c_1y_1 + c_2y_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ Lösung der homogenen linearen DGL $= 0$ auf I.

b) Die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen DGL $L[y] = f(x)$ ist von der Form $y = y_h + y_p$, wobei y_h die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL $L[y] = 0$ und y_p eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen DGL $L[y] = f(x)$ ist.

Beweis:

a) Sei $L[y_1] = L[y_2] = 0$ (L ist ein linearer Operator)

$$\Rightarrow L[c_1y_1 + c_2y_2] = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)(c_1y_1 + c_2y_2)^{(k)}$$

$$= c_1\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_1^{(k)} + c_2\sum_{k=0}^{n} a_k(x)y_2^{(k)} = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0.$$

b) Sei $L[y_h]=0$ und $L[y_p]=f(x)$

$\Rightarrow L[y_h+y_p]=L[y_h]+L[y_p]=f(x)$

$\Rightarrow y_h+y_p$ ist Lösung der inhomogenen DGL.

Ist nun y eine beliebige Lösung der inhomogenen DGL und y_h die allgemeine Lösung der homogenen DGL, so gilt $L[y-y_h]=L[y_p]=f(x) \Rightarrow y_p = y-y_h$ ist eine spezielle partikuläre Lösung der inhomogenen DGL.

Das Lösen einer linearen inhomogenen DGL besteht also aus zwei Schritten:

1. Bestimmen der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen DGL.
2. Bestimmen einer beliebigen partikulären Lösung der inhomogenen DGL.

<u>Satz 10-5:</u> (*Existenz- und Eindeutigkeitssatz*)
Es seien $a_i, f:\ (a,b)\to\mathbb{R}$ stetig auf (a,b), $i=0,1,\ldots,n-1$, $\xi\in(a,b)$, $\eta_0,\ldots,\eta_{n-1}\in\mathbb{R}$ fest, dann existiert genau eine Lösung der linearen DGL.

$$L[y]=y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(\xi)=\eta_0,\ y'(\xi)=\eta_1,\ldots,y^{(n-1)}(\xi)=\eta_{n-1}.$$

<u>Definition 10-4:</u>
Die Funktionen $y_1,\ldots,y_n:\ I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

a) heißen linear abhängig auf I, wenn es Konstanten $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{R}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass gilt

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x)=0\ \ \forall x\in I,$$

b) heißen linear unabhängig auf I, wenn sie nicht linear abhängig sind, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n}c_iy_i(x)=0\ \ \forall x\in I\ \Rightarrow\ c_1=c_2=\cdots=c_n=0.$$

Beispiel:

$y_1(x) = x^3, \; y_2(x) = |x|^3$

$\Rightarrow \; y_1, y_2$ sind linear abhängig auf $(0,\infty)$, denn

$y_1(x) - y_2(x) = 0 \;\; \forall x \in (0,\infty)$,

aber y_1, y_2 sind linear unabhängig auf $\mathbb{R}$, denn

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } x = 1 & \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0 \\ \phantom{\text{für }} x = -1 & \Rightarrow \; -c_1 + c_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

$\Rightarrow \; y_1, y_2$ sind linear unabhängig auf $\mathbb{R}$

Definition 10-5:

Sei $y_i \in C^{(n-1)}(I)$, $i = 1,\ldots,n$, so heißt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Wronski-Determinante der Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Satz 10-6:

Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ Lösungen der linearen, homogenen DGL n-ter Ordnung $L[y] = 0$ auf (a,b), dann sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ linear unabhängig auf (a,b) genau dann, wenn $W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in (a,b)$.

Beispiel:

$y_1(x)=1,\ \ y_2(x)=x,\ \ y_3(x)=e^x$

sind linear unabhängig auf $\mathbb{R}$, denn

$$\left.\begin{array}{l} c_1\cdot 1+c_2\cdot x+c_3\cdot e^x=0\ \Rightarrow\ c_1=0 \\ c_1\cdot 0+c_2\cdot 1+c_3\cdot e^x=0\ \Rightarrow\ c_2=0 \\ c_1\cdot 0+c_2\cdot 0+c_3\cdot e^x=0\ \Rightarrow\ c_3=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \text{ linear unabhängig}$$

$$W(x)=\det\begin{pmatrix}1 & x & e^x\\ 0 & 1 & e^x\\ 0 & 0 & e^x\end{pmatrix}=e^x>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

$W(x)$ immer $\neq 0$, also linear unabhängig.

Satz 10-7:

Es seien $a_i:\ (a,b)\to\mathbb{R}$ stetig auf (a,b), $i=0,1,\ldots,n-1$, dann hat die lineare, homogene DGL n-ter Ordnung

$$L[y]=y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=0$$

auf (a,b) genau n linear unabhängige Lösungen $y_1,y_2,\ldots,y_n$. Jede Lösung von $L[y]=0$ ist eine Linearkombination dieser y_i und somit ist

$$y_h=\sum_{i=1}^{n}C_i\,y_i(x),\ \ C_i\in\mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der homogenen DGL.

Anmerkung:

Man nennt n linear unabhängige Lösungen $y_i\ (i=1,\ldots,n)$ von $L[y]=0$ Fundamentalsystem, da jede Lösung von $L[y]=0$ sich als Linearkombination dieser y_i darstellen lässt.

Hat man ein Fundamentalsystem der linearen, homogenen DGL gefunden, so ist nun noch eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL zu bestimmen. Man kann sich eine partikuläre Lösung evtl. durch Erraten verschaffen. Ein systematisches Vorgehen zur Bestimmung einer partikulären Lösung liefert die Methode der Variation der Konstanten.

Satz 10-8: (*Variation der Konstanten*)
Bilden die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ auf (a,b) ein Fundamentalsystem der linearen, homogenen DGL n-ter Ordnung $L[y]=0$, so ist

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\, y_i(x) \;\text{ mit }\; C_i(x) = \int \frac{W_i(x,f)}{W(x)}\,dx \;\text{ für }\; i = 1,\ldots,n$$

eine partikulär Lösung der linearen, inhomogenen DGL $L[y]=f$. Hierbei ist $W(x)$ die Wronski-Determinante von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und $W_i(x,f)$ die Determinante der Matrix, die entsteht, wenn man in der Matrix von $W(x)$ die i-te Spalte durch $(0,\ldots,0,f(x))^T$ ersetzt, also

$$W_i(x,f) = \det\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_{i-1}(x) & 0 & y_{i+1}(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_{i-1}'(x) & 0 & y_{i+1}'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \cdots & y_{i-1}^{(n-2)}(x) & 0 & y_{i+1}^{(n-2)}(x) & \cdots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_{i-1}^{(n-1)}(x) & f(x) & y_{i+1}^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Anmerkung:
Die Berechnung von y_p nach diesem Satz ist nicht immer sehr einfach, da die zu berechnenden Integrale unangenehm sein können. Wenn man einen speziellen Ansatz für y_p machen kann, z.B. bei linearen DGL mit konstanten Koeffizienten und rechten Seiten der Form

$$f(x) = q(x)\, e^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \cos \beta x \\ \sin \beta x \end{Bmatrix},$$

so sollte man auf die Variation der Konstanten verzichten.

Beispiel:

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6x\, y' - 6\, y = 2x^3$$

In Normalform lautet diese lineare, inhomogene DGL 3. Ordnung

$$y''' + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

mit $a_2(x) = -\dfrac{3}{x},\ a_1(x) = \dfrac{6}{x^2},\ a_0(x) = -\dfrac{6}{x^3}$ und $f(x) = 2,$

wobei $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ und $f(x)$ stetig auf $(-\infty, 0)$ bzw. $(0, \infty)$. Mit

$$y_1(x) = x,\ \ y_2(x) = x^2,\ \ y_3(x) = x^3$$

sind drei Lösungen der homogenen DGL bekannt, die wegen

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{pmatrix} = x \det\begin{pmatrix} 2x & 3x^2 \\ 2 & 6x \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} x^2 & x^3 \\ 2 & 6x \end{pmatrix} = 2x^3$$

und damit $W(x_0) \neq 0$ für $x_0 \in (0, \infty)$ ein Fundamentalsystem bilden. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet somit

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x) = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3.$$

Die partikuläre Lösung $y_p(x)$ gewinnt man nun durch Anwenden der Methode der Variation der Konstanten wie folgt, vgl. Satz 10-8. Bestimmen der Determinanten

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{pmatrix} = 2x^3, \qquad W_1(x,2) = \det\begin{pmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 2 & 2 & 6x \end{pmatrix} = 2x^4,$$

$$W_2(x,2) = \det\begin{pmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{pmatrix} = -4x^3, \quad W_3(x,2) = \det\begin{pmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2x^2$$

liefert die Koeffizienten

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x,f)}{W(x)}\,dx = \int \frac{2x^4}{2x^3}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x,f)}{W(x)}\,dx = \int \frac{-4x^3}{2x^3}\,dx = -2\int dx = -2x$$

$$C_3(x) = \int \frac{W_3(x,f)}{W(x)}\,dx = \int \frac{2x^2}{2x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x$$

und damit die partikuläre Lösung der inhomogenen linearen DGL

$$y_p(x) = \sum_{i=1}^{3} C_i(x)\,y_i(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^3 + x^3 \ln x = -\frac{3}{2}x^3 + x^3 \ln x.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet dann schlussendlich

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 x + C_2 x^2 + \left(C_3 - \frac{3}{2} + \ln x\right)x^3,\ \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

10.3.2 Reduktion der Ordnung

Gegeben sei die lineare DGL in Normalform

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

mit $a_i(x)$, $(i = 0,\ldots,n-1)$ und $f(x)$ stetig auf (a,b). Außerdem sei eine Lösung y_1 der zugehörigen homogenen DGL bekannt. Gesucht ist nun die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

Der Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$ führt auf eine lineare DGL $(n-1)$-ter Ordnung in v', denn aus

$$\begin{aligned}
y(x) &= v(x)y_1(x)\\
y'(x) &= v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x)\\
y''(x) &= v''(x)y_1(x) + 2v'(x)y_1'(x) + v(x)y_1''(x)\\
&\ \vdots\\
y^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} v^{(n-k)}(x)\,y_1^{(k)}(x)
\end{aligned}$$

folgt nach Multiplikation der 1. Gleichung mit $a_0(x)$, der 2. Gleichung mit $a_1(x),\ldots$, der n-ten Gleichung mit $a_{n-1}(x)$ und anschließender Summation

$$L[y] = y_1 v^{(n)} + \tilde{a}_{n-1}(x) v^{(n-1)} + \cdots + \tilde{a}_1(x) v' + v L[y_1] = f(x)$$

sowie wegen $L[y_1] = 0$ schließlich

$$y_1 v^{(n)} + \tilde{a}_{n-1}(x) v^{(n-1)} + \cdots + \tilde{a}_1(x) v' = f(x)$$

eine lineare DGL in v'. Kann man diese DGL allgemein lösen und ist $v(x)$ die allgemeine Lösung dieser DGL, dann ist $y(x) = v(x) y_1(x)$ die allgemeine Lösung der ursprünglichen linearen DGL n-ter Ordnung.

Beispiel:
Gegeben sei die lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung in Normalform

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x)$$

mit $a_0(x), a_1(x)$ und $f(x)$ stetig auf (a,b) sowie eine Lösung $y_1(x)$ der zugehörigen homogenen DGL.

Ansatz: (*Reduktion der Ordnung*)

$$y = v\, y_1,\ \ y' = v' y_1 + v y_1',\ \ y'' = v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1''$$

in die DGL eingesetzt liefert

$$v'' y_1 + 2v' y_1' + v y_1'' + a_1 (v' y_1 + v y_1') + a_0 v y_1 = f(x),$$

nach Umsortieren

$$y_1 v'' + (2 y_1' + a_1 y_1) v' + (y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) v = f(x)$$

und nach Ausnutzen von

$$L[y_1] = 0 \ \Rightarrow\ y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1 = 0$$

schließlich die in v' lineare, inhomogene DGL 1. Ordnung

$$v'' + \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x) \right) v' = \frac{f(x)}{y_1(x)} \ \text{ (falls } y_1(x) \neq 0).$$

Gemäß Kapitel 10.2.5 ergibt sich die allgemeine Lösung der homogenen DGL über

$$v_h'(x) = Ce^{-A(x)} \quad \text{mit} \quad A(x) = \int \left(2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + a_1(x) \right) dx = 2\ln|y_1(x)| + \int a_1(x)\,dx$$

nach Umformen zu

$$v_h'(x) = C\,\frac{e^{-\int a_1(x)\,dx}}{y_1^2(x)} = C\,v_1'(x).$$

Mittels Variation der Konstanten erhält man die partikuläre Lösung

$$v_p'(x) = C(x)\,v_1' = \int \frac{f(x)/y_1(x)}{v_1'(x)}\,dx\; v_1'(x).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet somit

$$v'(x) = v_h'(x) + v_p'(x).$$

Nach Integration, d.h.

$$v(x) = \int \left(v_h'(x) + v_p'(x) \right) dx$$

ergibt sich die allgemeine Lösung der linearen, inhomogenen DGL 2. Ordnung in y schließlich zu

$$y(x) = v(x)\,y_1(x).$$

Nun sei mit

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

eine konkrete lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung gegeben. In Normalform lautet diese DGL

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

mit $a_1(x) = -\dfrac{2x}{1-x^2}$, $a_0(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$ und $f(x) = \dfrac{2}{1-x^2}$.

Da $a_1(x), a_0(x), f(x)$ stetig auf $(-1,1)$ und $0 \in (-1,1)$ existiert eine eindeutige Lösung auf $(-1,1)$. Die Lösung $y_1(x) = x$ der homogenen DGL liefert mit dem Ansatz $y(x) = v(x)\,y_1(x)$ die DGL

$$v'' + \left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{1-x^2}\right) v' = \frac{2}{x(1-x^2)}.$$

Mit der Lösung der zugehörigen homogenen DGL

$$v_h'(x) = \frac{C}{x^2} e^{-\int \frac{-2x}{1-x^2} dx} = \frac{C}{x^2} e^{-\ln(1-x^2)} = \frac{C}{x^2(1-x^2)}$$

und der partikulären Lösung der DGL

$$v_p'(x) = \frac{1}{x^2(1-x^2)} \int \frac{2}{x(1-x^2)} \Big/ \frac{1}{x^2(1-x^2)} \, dx = \frac{1}{x^2(1-x^2)} \int 2x \, dx = \frac{1}{1-x^2}$$

ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$v'(x) = \frac{C}{x^2(1-x^2)} + \frac{1}{1-x^2}.$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} v(x) &= C \int \frac{1}{x^2(1-x^2)} dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx \\ &= C\left(\int \frac{1}{x^2} dx + \int \frac{1}{1-x^2} dx\right) + \int \frac{1}{1-x^2} dx = -\frac{C}{x} + \frac{(C+1)}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + C_2 \end{aligned}$$

und nach Einsetzen in den Ansatz $y(x) = v(x) y_1(x)$ mit

$$y(x) = v(x)\, x = -C + (C+1)\, x \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C_2 x$$

bzw. umgeformt mit

$$\begin{aligned} y(x) &= 1 + (C+1)\left(x \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right) + C_2 x \\ &= 1 + C_1\left(x \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right) + C_2 x, \;\; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

die allgemeine Lösung der gegebenen linearen inhomogenen DGL 2. Ordnung auf $(-1,1)$.

$$y(0)=0 \;\Rightarrow\; y(0)=1-C_1=0 \;\Rightarrow\; C_1=1$$

$$y'(0)=0 \;\Rightarrow\; y'(0)=C_1\left\{\ln\sqrt{\frac{1+0}{1-0}}+0\cdot\left.\left(\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)'\right|_{x=0}\right\}+C_2=0 \;\Rightarrow\; C_2=0$$

$\Rightarrow\; y(x)=x\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ ist Lösung des AWP auf $(-1,1)$.

10.3.3 Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

A) Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$L[y]=y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=0$$

mit $a_i\in\mathbb{R},\; i=0,1,\ldots,n-1$, d.h. konstante Koeffizienten.

Gesucht: Fundamentalsystem

Der Ansatz

$$y(x)=e^{\lambda x},\;\; \lambda\in\mathbb{C}$$

liefert mit

$$y^{(n)}=\lambda^n e^{\lambda x}$$

nach Einsetzen

$$\begin{aligned} L[y]&=\lambda^n e^{\lambda x}+a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x}+\cdots+a_1\lambda e^{\lambda x}+a_0e^{\lambda x}\\ &=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)\,e^{\lambda x}=0, \end{aligned}$$

wobei

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

das so genannte charakteristische Polynom der DGL $L[y] = 0$ bezeichnet. Für $\lambda = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ folgt wegen

$$\left|e^{\lambda x}\right| = \left|e^{\alpha x + j\beta x}\right| = \left|e^{\alpha x} e^{j\beta x}\right| = e^{\alpha x}\left|e^{j\beta x}\right| = e^{\alpha x} \cdot 1 \neq 0$$

schließlich

$$L[y] = 0 \;\Leftrightarrow\; p(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \text{ ist Nullstelle von } p(\lambda).$$

Demzufolge ist $y(x) = e^{\lambda x}$ Lösung von $L[y] = 0$ genau dann, wenn λ Nullstelle von $p(\lambda)$ ist.

Ist λ komplexe Nullstelle, so ist $y(x) = e^{\lambda x}$ eine komplexe Lösung. Dann sind aber auch $\mathrm{Re}\{e^{\lambda x}\}$ und $\mathrm{Im}\{e^{\lambda x}\}$ reelle Lösungen, vgl. folgenden Satz.

<u>Satz 10-9:</u>
$w(x) = u(x) + jv(x)$ ist komplexe Lösung der DGL $L[y] = 0$ genau dann, wenn $u(x)$ und $v(x)$ reelle Lösungen der DGL $L[y] = 0$ sind.

<u>Beweis:</u>

$L[w] = L[u + jv] = L[u] + jL[v] = 0 \;\Leftrightarrow\; L[u] = L[v] = 0.$

Ferner ist $\lambda = \alpha + j\beta$ Nullstelle von $p(\lambda)$, so ist auch $\lambda^* = \alpha - j\beta$ eine Nullstelle von $p(\lambda)$ (da Polynomkoeffizienten reell), also sind

$$y(x) = e^{(\alpha \pm j\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x \pm j\sin\beta x)$$

komplexe Lösungen. Hieraus ergeben sich die reellen Lösungen zu

$$\mathrm{Re}\left\{e^{(\alpha \pm j\beta)x}\right\} = e^{\alpha x}\cos\beta x \;\text{ und }\; \mathrm{Im}\left\{e^{(\alpha \pm j\beta)x}\right\} = \pm e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Da $(+e^{\alpha x}\sin\beta x)$ und $(-e^{\alpha x}\sin\beta x)$ linear abhängig auf $\mathbb{R}$, erhält man also als reelle Lösungen

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \;\text{ und }\; e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Besitzt $p(\lambda)$ n verschiedene (komplexe) Nullstellen, so findet man über den Ansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

n verschiedene reelle Lösungen die auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig sind.

Nun sei der Fall betrachtet, dass λ l-fache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist. In diesem Fall gilt

$$p^{(k)}(\lambda) = 0,\ \ k = 0,1,\ldots,l-1.$$

Da offensichtlich

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\frac{d^i}{dx^i}e^{\lambda x}\right) = \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}e^{\lambda x}\right) = \frac{d^i}{dx^i}\left(x^k e^{\lambda x}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned}\frac{d^k}{d\lambda^k}L[e^{\lambda x}] &= \frac{d^k}{d\lambda^k}\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i}(e^{\lambda x}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\frac{d^i}{dx^i}(e^{\lambda x})\right)\\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{\lambda x})\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dx^i}(x^k e^{\lambda x}) = L[x^k e^{\lambda x}].\end{aligned}$$

Andererseits ist wegen $L[e^{\lambda x}] = p(\lambda)e^{\lambda x}$

$$\begin{aligned}L[x^k e^{\lambda x}] &= \frac{d^k}{d\lambda^k}L[e^{\lambda x}]\\ &= \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(p(\lambda)\,e^{\lambda x}\right) \qquad \text{(verallgemeinerte Produktregel)}\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} p^{(i)}(\lambda)\,x^{k-i}e^{\lambda x} = 0\end{aligned}$$

für $k = 0,1,\ldots,l-1$, da $p^{(i)}(\lambda) = 0$ für $i = 0,1,\ldots,l-1$.

Also gilt:
Ist λ eine l-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so ist

$$y_k = x^k e^{\lambda x}$$

Lösung von $L[y] = 0$ für $k = 0,1,\ldots,l-1$.

Satz 10-10:
Gegeben sei die lineare homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \;\; a_i \in \mathbb{R}.$$

a) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ l-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so sind

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \ldots, x^{l-1} e^{\lambda x}$$

Lösungen von $L[y] = 0$.

b) Ist $\lambda = \alpha + j\beta \in \mathbb{C}$ l-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so sind

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\; x e^{\alpha x} \cos \beta x,\; \ldots,\; x^{l-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\; x e^{\alpha x} \sin \beta x,\; \ldots,\; x^{l-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Lösungen von $L[y] = 0$.

c) Mittels a) und b) erhält man insgesamt n linear unabhängige Lösungen auf $\mathbb{R}$ und damit ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$.

Beispiel:

1) $y''' - 7y' + 6y = 0$

der Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ führt auf das charakteristische Polynom

$p(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\; \lambda_2 = 2,\; \lambda_3 = -3$ sind Nullstellen

$\Rightarrow \left\{ e^x, e^{2x}, e^{-3x} \right\}$ bilden Fundamentalsystem

$\Rightarrow y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$
ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

2) $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

das charakteristische Polynom lautet

$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^3$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ (einfache Nullstelle), $\lambda_2 = -1$ (3fache Nullstelle)

$$\Rightarrow \left\{e^x, e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\right\} \text{ bilden Fundamentalsystem}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x} + c_4x^2e^{-x} \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

3) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16) = \lambda(\lambda^2 + 4)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ (einfache Nullstelle)}, \ \lambda_{2,3} = \pm j2 \text{ (2fache Nullstelle)}$$

$$\operatorname{Re}\left\{e^{j2x}\right\} = \cos 2x, \ \operatorname{Im}\left\{e^{j2x}\right\} = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \left\{1, \cos 2x, \sin 2x, x\cos 2x, x\sin 2x\right\} \text{ bilden Fundamentalsystem}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x + c_4x\cos 2x + c_5x\sin 2x \quad \text{mit } c_i \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

4) $y^{(4)} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$

das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda^2 + \lambda + 1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (2fache Nullstelle)}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\exp\left(\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right)\right\} = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$\operatorname{Im}\left\{\exp\left(\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right)\right\} = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow \left\{e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), xe^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right\}$$

bilden Fundamentalsystem

$$\Rightarrow \; y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + (c_3 + c_4 x)e^{-\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

5) $y'' + ay' + by = 0$ (Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, z.B. Schwingkreis)

das charakteristische Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

<u>1. Fall:</u> (*Kriechfall*)

$a^2 > 4b \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$ (einfache reelle Nullstellen)

$\Rightarrow\; y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

<u>2. Fall:</u> (*aperiodischer Grenzfall*)

$a^2 = 4b \Rightarrow \lambda_{1,2} = -a/2$ (doppelte reelle Nullstelle)

$\Rightarrow\; y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda_1 x}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

<u>3. Fall:</u> (*Schwingungsfall*)

$a^2 < 4b \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ (einfache komplexe Nullstelle)

$\Rightarrow\; y(x) = \left(c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)\right)e^{-ax/2}$ mit $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ und $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

Die allgemeine Lösung kann auch durch

$$y(x) = Ae^{-ax/2}\sin(\omega x + \varphi) \quad \text{mit} \quad A, \varphi \in \mathbb{R}$$

ausgedrückt werden, wobei $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ und $\tan\varphi = c_2/c_1$.

B) Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Mit $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,\ldots,n-1$ und $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf I.

Gesucht: partikuläre Lösung y_p mit $L[y_p] = f(x)\ \ \forall x \in I$.

Beispiel:
Elektrischer Schwingkreis mit zusätzlicher Erregung erzeugt eine erzwungene Schwingung

$$Li''(t) + Ri'(t) + \frac{1}{C}i(t) = f(t)$$

- die Lösungen der homogenen DGL sind die Eigenschwingungen des Schwingkreises
- man spricht von Resonanz, wenn Erregerschwingung und Eigenschwingungsfrequenz übereinstimmen

Für spezielle Erregungen, d.h. "rechte Seiten" wird nun ein Ansatz angegeben, der auf eine partikuläre Lösung führt.

Die rechte Seite sei von der Form

$$f(x) = q(x)\,e^{\alpha x}\begin{Bmatrix}\cos\beta x\\ \sin\beta x\end{Bmatrix},$$

wobei $q(x)$ ein Polynom bezeichnet. Ersetzt man die rechte Seite durch die komplexe Funktion

$$\tilde{f}(x) = q(x)e^{(\alpha+j\beta)x}$$

dann führt der komplexe Ansatz

$$w_p(x) = x^l r(x)e^{(\alpha+j\beta)x}\quad (\operatorname{grad} r = \operatorname{grad} q)$$

auf eine partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \begin{cases}\operatorname{Re}\{w_p(x)\} & \text{falls } \cos\beta x \text{ auf rechter Seite}\\ \operatorname{Im}\{w_p(x)\} & \text{falls } \sin\beta x \text{ auf rechter Seite}\end{cases},$$

wobei

$l = 0$, falls $(\alpha + j\beta)$ keine Nullstelle
$l > 0$, falls $(\alpha + j\beta)$ l-fache Nullstelle

des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ ist.

Im Fall

$\beta = 0$ ist der Ansatz reell und es gilt $y_p(x) = w_p(x)$,
$\beta \neq 0$ kann auch Alternativ der reelle Ansatz

$$y_p(x) = x^l e^{\alpha x}\left(r_1(x)\cos\beta x + r_2(x)\sin\beta x\right)$$

angewendet werden, wobei grad r_1 = grad r_2 = grad q.

Beispiel:

1) $y'' + y = 2x^2$

homogene Lösung:

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j$

$\mathrm{Re}\left\{e^{jx}\right\} = \cos x$, $\mathrm{Im}\left\{e^{jx}\right\} = \sin x$

$\Rightarrow y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

partikuläre Lösung:

$\alpha = 0$, $\beta = 0$, $q(x) = 2x^2$,

$\alpha + j\beta = 0$ ist keine Nullstelle von $p(\lambda) \Rightarrow$ keine Resonanz $(l = 0)$.

Ansatz: $w_p(x) = x^l r(x) e^{(\alpha + j\beta)x} = a + bx + cx^2 = y_p(x)$

$$\Rightarrow y_p'(x) = b + 2cx,$$
$$y_p''(x) = 2c.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$2c + a + bx + cx^2 = 2x^2.$$

Nach Koeffizientenvergleich

$$c = 2,\ b = 0,\ a = -2c = -4$$

ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$y_p(x) = -4 + 2x^2.$$

$\Rightarrow\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - 4 + 2x^2$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

2) $y'' + y' = 1 + x$

<u>homogene Lösung:</u>

$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1) = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow\ y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 + c_2 e^{-x}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

<u>partikuläre Lösung:</u>

$\alpha = 0,\ \beta = 0,\ q(x) = 1 + x,$

$\alpha + j\beta = 0$ ist einfache Nullstelle von $p(\lambda) \Rightarrow$ (einfache) Resonanz $(l = 1)$.

Ansatz: $w_p(x) = x^l r(x) e^{(\alpha + j\beta)x} = x(a + bx) = ax + bx^2 = y_p(x)$

$$\Rightarrow\ y_p'(x) = a + 2bx,$$

$$y_p''(x) = 2b.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$2b + a + 2bx = 1 + x.$$

Nach Koeffizientenvergleich

$$b = 1/2,\ a = 1 - 2b = 0$$

ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$y_p(x) = x^2/2.$$

$\Rightarrow\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + x^2/2$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

3) $y'' - 2y' + y = e^x$

<u>homogene Lösung:</u>

$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1$ ist doppelte Nullstelle

$\Rightarrow\; y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + x c_2 e^{\lambda_1 x} = c_1 e^x + c_2 x e^x$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

<u>partikuläre Lösung:</u>

$\alpha = 1,\; \beta = 0,\; q(x) \equiv 1,$

$\alpha + j\beta = 1$ ist doppelte Nullstelle von $p(\lambda) \Rightarrow$ (2fache) Resonanz $(l = 2)$.

Ansatz: $w_p(x) = x^l r(x) e^{(\alpha + j\beta)x} = a x^2 e^x = y_p(x)$

$$\Rightarrow\; y_p'(x) = a(2x + x^2)e^x$$

$$y_p''(x) = a(2 + 2x + 2x + x^2)e^x = a(2 + 4x + x^2)e^x.$$

Einsetzen in die DGL und Division durch e^x liefert

$$a(2 + 4x + x^2) - 2a(2x + x^2) + x^2 a = 1$$

$$(a - 2a + a)x^2 + (4a - 4a)x + 2a = 1 \;\Rightarrow\; a = 1/2.$$

Die partikuläre Lösung lautet somit

$$y_p(x) = x^2 e^x / 2.$$

$$\Rightarrow\; y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2} x^2 \right) e^x$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

4) $y'' - y = -4xe^{-x}$

<u>homogene Lösung:</u>

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1,\; \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow\; y_h(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

partikuläre Lösung:

$\alpha = -1,\ \beta = 0,\ q(x) = -4x$

$\alpha + j\beta = -1$ ist einfache Nullstelle von $p(\lambda) \Rightarrow$ (einfache) Resonanz $(l = 1)$.

Ansatz: $w_p(x) = x^l r(x) e^{(\alpha + j\beta)x} = x(a + bx)e^{-x} = (ax + bx^2)e^{-x} = y_p(x)$

$$\Rightarrow\ y_p'(x) = (a + 2bx - ax - bx^2)e^{-x} = \left(a + (2b - a)x - bx^2\right)e^{-x}$$

$$y_p''(x) = \left(2b - a - 2bx - a - (2b - a)x + bx^2\right)e^{-x}$$

$$= \left(2(b - a) - (4b - a)x + bx^2\right)e^{-x}.$$

Einsetzen in die DGL und Division durch e^{-x} liefert

$$2(b - a) - (4b - a)x + bx^2 - ax - bx^2 = -4x$$

$$2(b - a) - 4bx = -4x.$$

Nach Koeffizientenvergleich

$$b = 1,\ a = b = 1$$

ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$y_p(x) = (x + x^2)e^{-x}.$$

$\Rightarrow\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + (c_2 + x + x^2)e^{-x}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

5) $y'' + y' + y = \cos 2x$

homogene Lösung:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{Re}\left\{\exp\left(\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right)\right\} = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$\operatorname{Im}\left\{\exp\left(\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x\right)\right\} = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

$$\Rightarrow\ y_h(x)=\left(c_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)\exp\left(-\frac{x}{2}\right)\ \text{ mit }\ c_i\in\mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

<u>partikuläre Lösung:</u>

$\alpha=0,\ \beta=2,\ q(x)\equiv 1,$

$\alpha+j\beta=j2$ ist keine Nullstelle von $p(\lambda)$ $\Rightarrow$ keine Resonanz $(l=0)$.

Ansatz: $w_p(x)=x^l r(x)e^{(\alpha+j\beta)x}=a\,e^{j2x}$

$$\Rightarrow\ w_p'(x)=j2ae^{j2x}$$

$$w_p''(x)=j^2 4ae^{j2x}=-4ae^{j2x}.$$

Einsetzen in die DGL und Division durch e^{j2x} liefert

$$-4a+j2a+a=1$$

$$(-3+j2)a=1$$

$$\Rightarrow\ a=\frac{1}{-3+j2}=\frac{-3-j2}{13}=-\frac{3}{13}-j\frac{2}{13}.$$

Die partikuläre Lösung lautet somit

$$w_p(x)=\left(-\frac{3}{13}-j\frac{2}{13}\right)e^{j2x}=\left(-\frac{3}{13}-j\frac{2}{13}\right)\left(\cos 2x+j\sin 2x\right)$$

$$y_p(x)=\operatorname{Re}\left\{w_p(x)\right\}$$

$$=-\frac{3}{13}\cos 2x+\frac{2}{13}\sin 2x=\frac{2\sin 2x-3\cos 2x}{13}.$$

$$\Rightarrow\ y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

$$=\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)e^{-\frac{x}{2}}+\frac{2\sin 2x-3\cos 2x}{13}\ \text{ mit }\ c_i\in\mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

Superpositionsprinzip

Lässt sich die rechte Seite in der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x)$$

darstellen und ist $y_{p,k}$ partikuläre Lösung von $L[y] = f_k(x)$, dann ist

$$y_p(x) = \sum_{k=1}^{m} y_{p,k}(x)$$

partikuläre Lösung von

$$L[y] = \sum_{k=1}^{m} f_k(x),$$

denn

$$L[y_p] = L\left[\sum_{k=1}^{m} y_{p,k}(x)\right] = \sum_{k=1}^{m} L[y_{p,k}] = \sum_{k=1}^{m} f_k(x),$$

da L linear.

Beispiel:

1) $y'' + y = 3e^{2x} + 2x^2$

homogene Lösung:

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm j$

$\mathrm{Re}\left\{e^{jx}\right\} = \cos x,\;\; \mathrm{Im}\left\{e^{jx}\right\} = \sin x$

$\Rightarrow\; y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

partikuläre Lösungen:

Ansatz für $3e^{2x}$: $w_{p,1}(x) = y_{p,1}(x) = ae^{2x}$ (keine Resonanz)

$$\Rightarrow\; y'_{p,1}(x) = 2ae^{2x}$$

$$y''_{p,1}(x) = 4ae^{2x}.$$

Einsetzen in die DGL und Division durch e^{2x} liefert

$$4a + a = 3 \;\Rightarrow\; a = 3/5 \;\Rightarrow\; y_{p,1}(x) = 3e^{2x}/5.$$

Ansatz für $2x^2$: $\quad w_{p,2}(x) = y_{p,2}(x) = a + bx + cx^2$

$$\Rightarrow\; y'_{p,2}(x) = 2cx + b$$

$$y''_{p,2}(x) = 2c.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$2c + cx^2 + bx + a = 2x^2 \;\Rightarrow\; c = 2,\; b = 0,\; a = -4$$

$$\Rightarrow\; y_{p,2}(x) = 2x^2 - 4.$$

Die partikuläre Lösung lautet somit

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = 3e^{2x}/5 + 2x^2 - 4.$$

$$\Rightarrow\; y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{3}{5}e^{2x} + 2x^2 - 4 \;\text{ mit }\; c_i \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

2) $y'' + 2y' + y = 2\cosh x = e^x + e^{-x}$

homogene Lösung:

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -1$ doppelte Nullstelle

$\Rightarrow\; y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$ mit $c_i \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

partikuläre Lösungen:

Ansatz für e^x: $\quad w_{p,1}(x) = y_{p,1}(x) = ae^x$ (keine Resonanz)

$$\Rightarrow\; y'_{p,1}(x) = ae^x$$

$$y''_{p,1}(x) = ae^x.$$

Einsetzen in die DGL und Division durch e^x liefert

$$a + 2a + a = 1 \;\Rightarrow\; a = 1/4 \;\Rightarrow\; y_{p,1}(x) = e^x/4.$$

Ansatz für e^{-x}: $\quad w_{p,2}(x) = y_{p,2}(x) = ax^2 e^{-x}$ (doppelte Resonanz)

$$y'_{p,2}(x) = a(2x - x^2)e^{-x}$$

$$y''_{p,2}(x) = a(2 - 2x - 2x + x^2)e^{-x} = a(2 - 4x + x^2)e^{-x}.$$

Einsetzen in die DGL und Division durch e^{-x} liefert

$$a(2 - 4x + x^2) + 2a(2x - x^2) + ax^2 = 1$$

$$a(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2) = 1$$

$$\Rightarrow\ a = \frac{1}{2}\ \Rightarrow\ y_{p,2}(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$$

Die partikuläre Lösung lautet somit

$$y_p(x) = y_{p,1}(x) + y_{p,2}(x) = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}.$$

$$\Rightarrow\ y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}x^2 e^{-x}\ \text{ mit }\ c_i \in \mathbb{R}$$

ist die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL auf $\mathbb{R}$.

10.4 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung

10.4.1 Grundlagen

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem

$$y_1'(x) = a_{11}(x)y_1(x) + \ldots + a_{1n}(x)y_n(x) + b_1(x)$$

$$\vdots$$

$$y_n'(x) = a_{n1}(x)y_1(x) + \ldots + a_{nn}(x)y_n(x) + b_n(x)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y_1(\xi) = \eta_1, \ldots, y_n(\xi) = \eta_n,\ \ \xi \in [a,b],\ \ \eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}.$$

In Vektorschreibweise erhält das lineare DGL-System die Gestalt

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$$

und

$$\mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T,\ \ \xi \in [a,b],\ \ \eta_1, \ldots, \eta_n \in \mathbb{R}$$

mit

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ \mathbf{A}(x)=\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix},\ \mathbf{b}(x)=\begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{A}(x)$ die Koeffizientenmatrix und $\mathbf{b}(x)$ die rechte Seite des linearen DGL-Systems bezeichnet.

Das lineare DGL-System heißt homogen, wenn $\mathbf{b}(x) \equiv \mathbf{0}$, sonst inhomogen.

Sind alle Funktionen $a_{ij}, b_i : [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ stetig so gilt für lineare DGL-Systeme der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Satz 10-11: (*Existenz- und Eindeutigkeitssatz für lineare DGL-Systeme*)
Sind alle Koeffizientenfunktionen $a_{ij}(x)$ und alle Funktionen der rechten Seite $b_i(x)$ stetig auf $[a,b]$ mit $\xi \in (a,b)$, so besitzt das lineare DGL-System auf (a,b) genau ein Lösungssystem $y_1, y_2, \ldots, y_n$ mit $y_1(\xi) = \eta_1$, $y_2(\xi) = \eta_2, \ldots, y_n(\xi) = \eta_n$.

Zusammenhang zwischen DGL n-ter Ordnung und DGL-System

Die DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \text{ mit } y(\xi)=\eta_1,\ y'(\xi)=\eta_2, \ldots, y^{(n-1)}(\xi)=\eta_n$$

geht durch Einführen der Funktionen

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ y_3 = y'', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$$

in das DGL-System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \text{ mit } y_1(\xi)=\eta_1,\ y_2(\xi)=\eta_2, \ldots, y_n(\xi)=\eta_n \end{aligned}$$

über.

Beispiel:

Für eine lineare, inhomogene DGL n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(\xi) = \eta_1,\; y'(\xi) = \eta_2, \ldots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n$$

ergibt sich das lineare inhomogene DGL-System 1. Ordnung zu

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2 \\
y_2' &= y_3 \\
&\vdots \\
y_{n-1}' &= y_n \\
y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - a_2(x)y_3 \cdots - a_{n-1}(x)y_n + f(x)
\end{aligned}$$

mit $\quad y_1(\xi) = \eta_1,\; y_2(\xi) = \eta_2, \ldots, y_n(\xi) = \eta_n$

bzw. in Vektorschreibweise zu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \;\text{ mit }\; \mathbf{y}(\xi) = \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T,$$

wobei

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix},\; \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \cdots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix},\; \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Der zwischen linearem DGL-System 1. Ordnung und linearer DGL n-ter Ordnung bestehende Zusammenhang motiviert sofort die folgenden Aussagen, siehe hierzu Kapitel 10.3.1.

Satz 10-12:

1) Die allgemeine Lösung des linearen inhomogenen DGL-Systems $\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x)$ setzt sich aus der allgemeinen Lösung $\mathbf{y}_h$ des zugehörigen homogenen DGL-Systems und einer partikulären Lösung $\mathbf{y}_p$ des inhomogenen DGL-Systems zusammen, d.h.
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_h + \mathbf{y}_p.$$

2) Sind $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ n linear unabhängige Lösungen des homogenen Gleichungssystems auf (a,b), d.h. $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ ist ein Fundamentalsystem, dann lautet die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems
$$\mathbf{y}_h = C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2 + \ldots + C_n\mathbf{y}_n = \sum_{i=1}^{n} C_i\,\mathbf{y}_i, \; C_i \in \mathbb{R}.$$

3) Die n Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ des homogenen DGL-Systems sind linear unabhängig auf (a,b), wenn für die Wronski-Determinante gilt
$$W(x) = \det\left(\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\right) \neq 0 \;\text{ für ein }\; x_0 \in (a,b).$$

4) Bilden die n Lösungen $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ des homogenen DGL-Systems ein Fundamentalsystem, dann liefert die Methode der Variation der Konstanten mit
$$\mathbf{y}_p(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,\mathbf{y}_i(x) \;\text{ mit }\; C_i(x) = \int \frac{W_i(x,\mathbf{b})}{W(x)}\,dx \;\text{ für }\; i = 1, \ldots, n$$
eine partikuläre Lösung des inhomogenen DGL-Systems. Hierbei ist
$$W_i(x,\mathbf{b}) = \det\left(\mathbf{y}_1(x), \ldots, \mathbf{y}_{i-1}(x), \mathbf{b}(x), \mathbf{y}_{i+1}(x), \ldots, \mathbf{y}_n(x)\right)$$
für $i = 1,..,n$.

Bei der Lösung linearer DGL-Systeme besteht die Hauptschwierigkeit im Auffinden eines Fundamentalsystems für das zugehörige homogene DGL-System. Sind die Koeffizientenfunktionen konstant, so lässt sich diese Aufgabe geschlossen rezeptartig lösen.

10.4.2 Lineare homogene Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei das lineare homogene DGL-System 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y},$$

wobei

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T, \ \mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \ \text{und} \ a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Der Lösungsansatz

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}e^{\lambda x}, \ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \ \lambda \in \mathbb{C}$$

führt mit

$$\mathbf{y}' = \lambda \mathbf{v} e^{\lambda x}$$

wegen $e^{\lambda x} \neq 0$ auf die Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

und damit auf eine Eigenwert- und Eigenvektorbestimmung für die Matrix $\mathbf{A}$. Ist nun $\mathbf{v}_i$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert λ_i, so ist

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i x}$$

wegen

$$\mathbf{y}_i' = \lambda_i \mathbf{v}_i e^{\lambda_i x} = \mathbf{A}\mathbf{v}_i e^{\lambda_i x} = \mathbf{A}\mathbf{y}_i$$

tatsächlich eine Lösung des linearen homogenen DGL-Systems.

Somit folgt aus den bekannten Sätzen der linearen Algebra:

1) Da die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, sind auch die Lösungen

   $$\mathbf{y}_i = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i x}$$

   linear unabhängig auf $\mathbb{R}$.

2) Besitzt $\mathbf{A}$ n verschiedene Eigenwerte, so hat man mit

$$\left\{\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x}, \ldots, \mathbf{v}_n e^{\lambda_n x}\right\}$$

ein Fundamentalsystem gefunden.

3) Ist λ komplexer Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit zugehörigem komplexen Eigenvektor $\mathbf{v}$, dann ist auch λ^* Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit zugehörigem Eigenvektor $\mathbf{v}^*$ und

$$\mathbf{v}e^{\lambda x} \text{ und } \mathbf{v}^* e^{\lambda^* x}$$

sind zwei komplexe Lösungen.

Da Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung reelle Lösungen des linearen homogenen DGL-Systems sind, erhält man daraus die zwei linear unabhängigen reellen Lösungen

$$\mathrm{Re}\left\{\mathbf{v}e^{\lambda x}\right\} \text{ und } \mathrm{Im}\left\{\mathbf{v}e^{\lambda x}\right\}.$$

4) Ist λ ein k-facher Eigenwert von $\mathbf{A}$ mit $l \leq k$ linear unabhängigen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l$, d.h. $\dim E_\lambda = l$, dann sind

a) neben $\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda x}, \ldots, \mathbf{y}_l(x) = \mathbf{v}_l e^{\lambda x}$ mit $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots, l$ die folgenden $m = k - l$ Funktionen Lösungen.

$$\mathbf{y}_{l+1}(x) = \left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_{l+1} x + \mathbf{v}_{l+1}\right) e^{\lambda x}$$

$$\mathbf{y}_{l+2}(x) = \left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^2 \mathbf{v}_{l+2} \frac{x^2}{2!} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_{l+2} x + \mathbf{v}_{l+2}\right) e^{\lambda x}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}_{l+m}(x) = \left((\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^m \mathbf{v}_{l+m} \frac{x^m}{m!} + \ldots + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_{l+m} x + \mathbf{v}_{l+m}\right)$$

mit $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})^{i+1} \mathbf{v}_{l+i} = \mathbf{0}$ für $i = 1, \ldots, m$.

b) neben $\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda x}$ mit $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$,

die folgenden $k-1$ Funktionen Lösungen.

$$\mathbf{y}_2(x) = \left(\mathbf{v}_1 x + \mathbf{v}_2\right) e^{\lambda x}$$

$$\mathbf{y}_3(x) = \left(\mathbf{v}_1 \frac{x^2}{2!} + \mathbf{v}_2 x + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda x}$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{y}_k(x) = \left(\mathbf{v}_1 \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + \mathbf{v}_{k-1} x + \mathbf{v}_k\right)$$

mit $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, k$.

Durch die in a) bzw. b) beschriebenen Berechnungsvorschriften erhält man zum k-fachen Eigenwert insgesamt k linear unabhängige Lösungen.

Beispiel:

1) $y_1' = 3y_1 - y_2$
$y_2' = 4y_1 - 2y_2$ oder in Vektorschreibweise $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ sind einfache Eigenwerte.

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

zu λ_1: $\begin{pmatrix} 3-\lambda_1 & -1 \\ 4 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0.$

zu λ_2: $\begin{pmatrix} 3-\lambda_2 & -1 \\ 4 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \neq 0.$

Die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems lautet somit

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 x} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2) $y_1' = 2y_1 + y_2 + 2y_3$
$y_2' = y_1 + 2y_2 + 2y_3$ oder in Vektorschreibweise $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \mathbf{y}$
$y_3' = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3$

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2(1-\lambda) & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & -2(1-\lambda) & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 & 2 \\ 1 & 6-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\big((2-\lambda)(6-\lambda) - 5\big)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 7)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 7)$$

$\Rightarrow\ \lambda_1 = 1$ zweifacher und $\lambda_2 = 7$ einfacher Eigenwert.

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

zu λ_1: $\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda_1 & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \ \dim E_{\lambda_1} = 2$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ sind zwei linear unabhängige Eigenvektoren zu λ_1.

zu λ_2: $\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda_2 & 2 \\ 2 & 2 & 5-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0.$

Die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems lautet somit

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_1 x} + C_3 \mathbf{v}_3 e^{\lambda_2 x} =$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{x} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{7x}, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

3) $y_1' = y_1 + 2y_2 + 3y_3$

$y_2' = 2y_2 + y_3$ oder in Vektorschreibweise $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}$

$y_3' = 2y_2 + 3y_3$

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - 2\big)$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda - 4)$$

$\Rightarrow \ \lambda_1 = 1$ zweifacher und $\lambda_2 = 4$ einfacher Eigenwert.

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

zu λ_1: $\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda_1 & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \ \mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0, \ \dim E_{\lambda_1} = 1,$ d.h. es existiert ein linear unabhängiger Eigenvektor.

Zur Ermittlung 2er unabhängiger Lösungen ist nun das in 4b) skizzierte Verfahren anzuwenden, d.h. man hat den Vektor $\mathbf{v}_2$ durch Lösen des folgenden Gleichungssystems zu bestimmen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1.$$

Anwenden der Gauß-Elimination liefert

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

zu λ_2: $\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 & 3 \\ 0 & 2-\lambda_2 & 1 \\ 0 & 2 & 3-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ \mathbf{v}_3 = \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0.$

Die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems lautet somit

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x) &= C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \left(\mathbf{v}_1 x + \mathbf{v}_2 \right) e^{\lambda_1 x} + C_3 \mathbf{v}_3 e^{\lambda_2 x} \\ &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{x} + C_2 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{x} + C_3 \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} e^{4x}, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4) $y_1' = 2y_1 + y_2 - y_3$
$y_2' = y_2 - y_3$ oder in Vektorschreibweise $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}$
$y_3' = y_2 + y_3$

Berechnung der Eigenwerte

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 1\right) = (2-\lambda)\left(\lambda - (1+j)\right)\left(\lambda - (1-j)\right)$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_{2,3} = 1 \pm j$ sind einfache Eigenwerte.

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren

zu λ_1: $\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda_1 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0$

$\Rightarrow \mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x}$ ist Lösung des DGL-Systems.

zu λ_2: $\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda_2 & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-j & 1 & -1 \\ 0 & -j & -1 \\ 0 & 1 & -j \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1-j & 1 & -1 \\ 0 & -j & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \neq 0.$

Die komplexe Lösung lautet somit

$$\mathbf{w}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+j)x} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ 1 \end{pmatrix} (\cos x + j \sin x) e^{x}.$$

Bilden des Real- und Imaginärteils liefert die reellen Lösungen

$$\mathbf{y}_2(x) = \operatorname{Re}\{\mathbf{w}(x)\} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^{x}, \quad \mathbf{y}_3(x) = \operatorname{Im}\{\mathbf{w}(x)\} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^{x}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems lautet somit

$$\mathbf{y}(x) = C_1 \mathbf{y}_1(x) + C_2 \mathbf{y}_2(x) + C_3 \mathbf{y}_3(x)$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} e^{x} + C_3 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} e^{x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 10-1: Lösen Sie das folgende AWP mit Hilfe der Trennung der Variablen

a) $y' = \dfrac{y^2+1}{2xy(x+1)}, \quad y(1) = 1.$

b) $y' = \dfrac{\sin y}{x}, \quad y(1/2) = \dfrac{\pi}{2}.$

Aufgabe 10-2: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung mit Hilfe der Substitutionsmethode für $x \neq 0$.

a) $y' = e^{-y/x} + \dfrac{y}{x}.$

b) $y' = \cos(x+y).$

Aufgabe 10-3: Lösen Sie das folgende AWP mit Hilfe der Substitutionsmethode

a) $y' = (x-y)^2 + 1, \quad y(0) = 1.$

b) $y' = \dfrac{x^2+5y^2}{3xy}, \quad y(1) = 1$

Aufgabe 10-4: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der linearen inhomogen Differentialgleichung 1. Ordnung

a) $\left(1+x^2\right)y' + x\,y = x\ .$

b) $y' = -2y\cos x + \cos x \quad$ für $\quad x \in \left(-\pi/2, \pi/2\right)$

Aufgabe 10-5: Lösen Sie das folgende AWP der linearen inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung

a) $y' + \dfrac{1}{x}y = 1 + x, \quad y(1) = 0$

b) $y' - \dfrac{3}{1+x}y = 3(1+x), \quad y(0) = 0$

Aufgabe 10-6: Bestimmen Sie für die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten die allgemeinen Lösungen

a) $y'' + 2y' + y = 0$ b) $y'' + \omega^2 y = 0$ c) $y'' + y' + y = 0$

d) $y'' + 3y' + 2y = 0$ e) $y'' - \omega^2 y = 0$

Aufgabe 10-7: Berechnen Sie für die folgenden linearen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten die allgemeinen Lösungen mit Hilfe der Ansatzmethode

a) $y'' + y = \sin x$

b) $y'' + y = x \cdot \sin x \cdot e^x$

Aufgabe 10-8: Lösen Sie das Anfangswertproblem

a) $y'' - 4y' + 3y = e^{3x} \sin x, \quad y(0) = y'(0) = 0$

b) $y'' + 3y' - 4y = 12x + 25\cos(2x), \quad y(0) = 5/4, \; y'(0) = 2$

mit Hilfe der Ansatzmethode für inhomogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Aufgabe 10-9: Ermitteln Sie für die folgenden linearen inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten die allgemeinen Lösungen durch Variation der Konstanten

a) $y'' + 2y' + y = -e^{-x}x^{-2}$

b) $y'' - 4y' + 4y = 9x\,e^{2x} \ln x$

Aufgabe 10-10: Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

a) $$\begin{aligned} y_1' + y_2' - y_1 &= 2x + 1 \\ 2y_1' + 2y_2' + y_1 &= x \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y_1' + 2y_1 + 3y_2 &= 0 \\ 3y_1 + y_2' + 2y_2 &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

Aufgabe 10-11: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$y_1' = y_2 - y_3, \quad y_2' = y_3 - y_1, \quad y_3' = y_1 - y_2$$

Aufgabe 10-12: Berechnen Sie die Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10-13: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3x}.$$