HSB
Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 3

Kapitel 11

Laplace-Transformation

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 3

Kapitel 11

Inhaltsverzeichnis

11 Laplace Transformation

11.1 Einführung

Definition 11-1:

Eine Funktion $f\colon\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ heißt Laplace-transformierbar, wenn das uneigentliche Integral

$$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}:=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

mit $s=\sigma+j\omega$ für ein $\sigma\in\mathbb{R}$ konvergiert. $F(s)$ heißt dann auch die Laplace-Transformierte von f.

$F(s)$ ist nur definiert, wenn das uneigentliche Integral konvergiert. Dies ist nicht für alle Funktionen $f(t)$ der Fall. Deshalb sei zunächst eine Klasse von Funktionen definiert für die das uneigentliche Integral auf jeden Fall konvergiert für $\mathrm{Re}\{s\}=\sigma>\sigma_0$

Definition 11-2:

$f\colon\ [0,\infty)\to\mathbb{R}$ heißt Originalfunktion, falls

a) f auf jedem abgeschlossenen Intervall $[0,b]\subset[0,\infty)$ stückweise stetig ist (f hat nur endlich viele Sprungstellen auf $[0,b]$).

b) f für $t\to\infty$ höchstens exponentiell wächst, d.h.

$$\exists M>0,\ \sigma_0\geq 0,\ |f(t)|\leq Me^{\sigma_0 t}\ \forall t>0$$

Beispiel:

1) $f(t)=t^\alpha,\ \alpha\geq 0$ ist Originalfunktion, denn $f(t)=t^\alpha$ ist für $\alpha\geq 0$ stetig auf $[0,\infty)$ und es gilt

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^\alpha}{e^{\sigma t}}=0 \quad \text{für beliebiges} \quad \sigma>0$$

2) $f(t)=e^{\alpha t},\ \alpha\in\mathbb{R}$ ist Originalfunktion, denn $f(t)=e^{\alpha t}$ ist für alle $\alpha\in\mathbb{R}$ stetig auf $[0,\infty)$ und es gilt

$$e^{\alpha t} \le e^{\sigma t} \;\; \forall t \ge 0 \quad \text{für} \quad \sigma = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \alpha > 0 \\ 0 & \text{falls } \alpha \le 0 \end{cases}$$

3) $f(t) = \cos(\omega t)$ und $f(t) = \sin(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$ sind Originalfunktionen, denn $f(t) = \cos(\omega t)$ und $f(t) = \sin(\omega t)$ sind für alle $\omega \in \mathbb{R}$ stetig und es gilt

$$\left.\begin{aligned} |\cos(\omega t)| \le 1 = e^{\sigma t} \\ |\sin(\omega t)| \le 1 = e^{\sigma t} \end{aligned}\right. \quad \forall t \ge 0 \quad \text{für } \sigma = 0$$

Satz 11-1:

Ist $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Originalfunktion, dann existiert die Laplace-Transformierte

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

für alle $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0$ und das uneigentliche Integral konvergiert gleichmäßig absolut für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\{s\} > \sigma_0$.

Die Eigenschaft "Originalfunktion" ist nur ein hinreichendes Kriterium für die Existenz der Laplace-Transformierten. Es existieren auch Laplace-Transformierte die nicht zur Klasse der Originalfunktionen gehören.

Beispiel:

$f(t) = t^{\alpha}$ mit $-1 < \alpha < 0$ ist keine Originalfunktion, da $f(t)$ für $t \to 0$ unbeschränkt, aber es existiert die Laplace-Transformierte für $\mathrm{Re}\{s\} > 0$.

$$\mathcal{L}\{t^{\alpha}\} = \int_0^\infty t^{\alpha} e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{s}\right)^{\alpha} e^{-\tau} \frac{1}{s} d\tau = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty \tau^{\alpha} e^{-\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty \tau^{(\alpha+1)-1} e^{-\tau} d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},$$

wobei die Substitution $\tau = st$ mit $d\tau = s\,dt$ und die Definition der Gamma-Funktion, vgl. Kapitel 5.6, ausgenutzt wurde.

Dieses Ergebnis gilt auch für $\alpha \geq 0$. Insgesamt erhalten wir also

$$\mathcal{L}\left\{t^{\alpha}\right\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \qquad \forall\, \alpha > -1, \quad \forall\, \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0.$$

<u>Spezialfälle:</u>

$$\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \frac{\Gamma(1/2)}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0 \quad \left(\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\right)$$

$$\alpha = n \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow \mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \quad \mathrm{Re}\left\{s\right\} > 0 \quad \left(\Gamma(n+1) = n!\right)$$

z.B. $\mathcal{L}\left\{t\right\} = \frac{1}{s^2}, \mathcal{L}\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3}, \ldots, \mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

<u>Satz 11-2:</u>
Sind f_1, f_2 Originalfunktionen mit $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ für alle $\mathrm{Re}\{s\} = \sigma > \sigma_0$, dann gilt

$$f_1(t) = f_2(t) \quad \forall t > 0 \ \text{in denen } f_1 \ \text{und } f_2 \ \text{stetig.}$$

D.h. bis auf Sprungstellen stimmen f_1 und f_2 überein, wenn $F_1(s) = F_2(s)$.

Sieht man zwei Originalfunktionen, die bis auf ihre Sprungstellen übereinstimmen, als gleich an, so gilt

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\} \Rightarrow f_1(t) = f_2(t)$$

d.h. die Laplace-Transformation ist eindeutig auf der Klasse der Originalfunktionen. Es existiert also die inverse Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t) \quad \text{falls} \quad \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = F(s)$$

mit

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}\right\} = f(t).$$

11.2 Eigenschaften der Laplace-Transformation

Satz 11-3:

Sind f, f_1, f_2 Originalfunktionen, dann gilt $(s = \sigma + j\omega)$

a) Linearität

$$\mathcal{L}\{a\, f_1(t) + b\, f_2(t)\} = a\,\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\,\mathcal{L}\{f_2(t)\} = a\,F_1(s) + b\,F_2(s)$$

b) Streckung

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right) \qquad \alpha > 0 \quad \text{und} \quad \sigma/\alpha > \sigma_0$$

c) Dämpfungssatz / Verschiebungssatz

1) $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(s+\alpha) \qquad \sigma + \alpha > \sigma_0$

2) $\mathcal{L}\{f(t-\alpha)\} = e^{-\alpha s} F(s) \qquad \alpha > 0$

d) Differentiation / Integration

1) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0+)$

falls f, f' Originalfunktionen, f stetig auf $(0,\infty)$ und $f(0+)$ den rechtsseitigen Grenzwert bezeichnet

2) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - s\, f(0+) - f'(0+)$

falls f, f' und f'' Originalfunktionen, f und f' stetig auf $(0,\infty)$ und $f(0+)$ und $f'(0+)$ die rechtsseitigen Grenzwerte bezeichnet

3) $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - \cdots - sf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$

falls $f, f', \ldots, f^{(n)}$ Originalfunktionen, $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ stetig auf $(0,\infty)$ und $f(0+), f'(0+), \ldots, f^{(n-1)}(0+)$ die rechtsseitigen Grenzwerte bezeichnet

4) $\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^n F(s)}{ds^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

5) $\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \dfrac{1}{s} F(s)$

falls f und $g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ Originalfunktionen

Beweis:

a) gilt wegen der Linearität des Integrals

b) $\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \int_0^\infty f(\alpha t) e^{-st} dt$

Substitution: $\tau = \alpha t, \quad d\tau = \alpha\, dt, \quad dt = d\tau/\alpha$

$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} \frac{1}{\alpha} d\tau = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{\alpha}\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$$

c) 1) $\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t} f(t)\right\} = \int_0^\infty f(t) e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s+\alpha)$

2) $\mathcal{L}\{f(t-\alpha)\} = \int_0^\infty f(t-\alpha) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(\tau) e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau$

$$= e^{-s\alpha} \int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{-s\alpha} F(s)$$

d) 1) $\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})\, dt$

$$= -f(0+) + s\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0+)$$

denn $\lim_{t\to\infty} f(t) e^{-st} = 0$, da für $\sigma_0 < \sigma$ gilt

$$\left| f(t) e^{-st} \right| = \left| f(t) e^{-\sigma t} \right| \le M\, e^{(\sigma_0 - \sigma)t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

2) $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0+) = s\left(s\,\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0+)\right) - f'(0+)$

$$= s^2 F(s) - s\,f(0+) - f'(0+)$$

3) durch (n−1)-malige Anwendung der obigen Schritte erhält man

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - \cdots - sf^{(n-2)}(0+) - f^{(n-1)}(0+)$$

4) $\dfrac{d^n F(s)}{ds^n} = \dfrac{d^n}{ds^n}\displaystyle\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial s^n}\left(f(t)e^{-st}\right)dt$

$$= \int_0^\infty f(t)(-1)^n t^n e^{-st} dt = (-1)^n \int_0^\infty f(t)t^n e^{-st} dt$$

$$= (-1)^n \mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}$$

5) $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau \Rightarrow g'(t) = f(t)$ und $g(0) = 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0+) = s\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

Beispiel:

1) $\mathcal{L}\{1\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty = \frac{1}{s}$

$$\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$\mathcal{L}\left\{t^n e^{\alpha t}\right\} = \dfrac{n!}{(s-\alpha)^{n+1}}$ insbesondere gilt $\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\right\} = \dfrac{1}{s-\alpha}$

2) $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{L}\{e^{jt}\} - \mathcal{L}\{e^{-jt}\}\right)$ da $\mathcal{L}\{e^{\pm jt}\} = \frac{1}{s \mp j}$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j} - \frac{1}{s+j}\right) = \frac{1}{2j}\frac{s+j-s+j}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{\sin(\beta t)\} = \frac{1}{\beta}\frac{1}{(s/\beta)^2+1} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{\alpha t}\sin(\beta t)\right\} = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \mathcal{L}\{\sin' t\} = s\mathcal{L}\{\sin t\} - \sin(0+) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{t\sin(\beta t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\sin(\beta t)\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\beta}{s^2+\beta^2}\right) = \frac{2\beta s}{(s^2+\beta^2)^2}$$

Satz 11-4: (*Grenzwertsätze*)
Sind f und f' Originalfunktionen, dann gilt mit $s = \sigma + j\omega$

a) $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \mathcal{L}\{f(t)\} = \lim\limits_{\sigma\to\infty} F(s) = 0$

b) Anfangswertsatz:

$\lim\limits_{t\to 0+} f(t) = \lim\limits_{\sigma\to\infty} sF(s)$, falls f stetig auf $(0,\infty)$

c) Endwertsatz:

$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$, falls f stetig auf $(0,\infty)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ existiert

Beweis: s. Übung

δ-Distribution (verallgemeinerte Funktion)

$$f_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad 0 \le t < c,\ t > c + 1/h \\ h, & \text{falls} \quad c < t < c + 1/h \end{cases}, \qquad u(t) = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad t > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad t < 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{f_h(t)\} = h\left(\mathcal{L}\{u(t-c)\} - \mathcal{L}\{u(t-c-1/h)\}\right)$$

$$= h\left(\frac{1}{s}e^{-sc} - \frac{1}{s}e^{-s(c+1/h)}\right) = \frac{h}{s}e^{-sc}\left(1 - e^{-s/h}\right) = e^{-sc}\,\frac{1-e^{-s/h}}{s/h}$$

$$\lim_{h\to\infty}\mathcal{L}\{f_h(t)\} = e^{-sc}\lim_{h\to\infty}\frac{1-e^{-s/h}}{s/h} = e^{-sc}\lim_{u\to 0}\frac{1-e^{-u}}{u} = e^{-sc}\lim_{u\to 0}\frac{e^{-u}}{1} = e^{-sc}$$

Da $\lim\limits_{h\to\infty}\left(f_h(t)\right) = \left.\begin{cases} 0 & \text{falls} \ \ t \ne \mathrm{c} \\ \infty & \text{falls} \ \ t = \mathrm{c} \end{cases}\right\} = \delta(t-c)$ die δ-Distribution liefert, ist

$$\mathcal{L}\{\delta(t-c)\} = e^{-cs}$$

die Laplace-Transformierte der δ-Distribution.

T-periodische Funktion

Es sei f eine T-periodische Originalfunktion, dann gilt

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)e^{-st}dt$$

Substitution: $\quad t = \tau + nT, \quad dt = d\tau$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{n=0}^\infty \int_0^T f(\tau + nT)e^{-s(\tau+nT)}d\tau = \sum_{n=0}^\infty e^{-snT}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Da

$$\sum_{n=0}^\infty (e^{-sT})^n = \frac{1}{1-e^{-sT}} \quad \text{für} \quad \mathrm{Re}\{s\} = \sigma > 0$$

lautet die Laplace-Transformierte einer T-periodischen Orginalfunktion

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T f(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

Beispiel:

$$f(t)=\begin{cases}1, & \text{falls} \quad 0<t<1\\ 0, & \text{falls} \quad 1<t<2\end{cases} \qquad \text{mit} \quad T=2-\text{periodisch fortgesetzt}$$

$$\int_0^2 f(t)\,e^{-st}dt=\int_0^1 e^{-st}dt$$

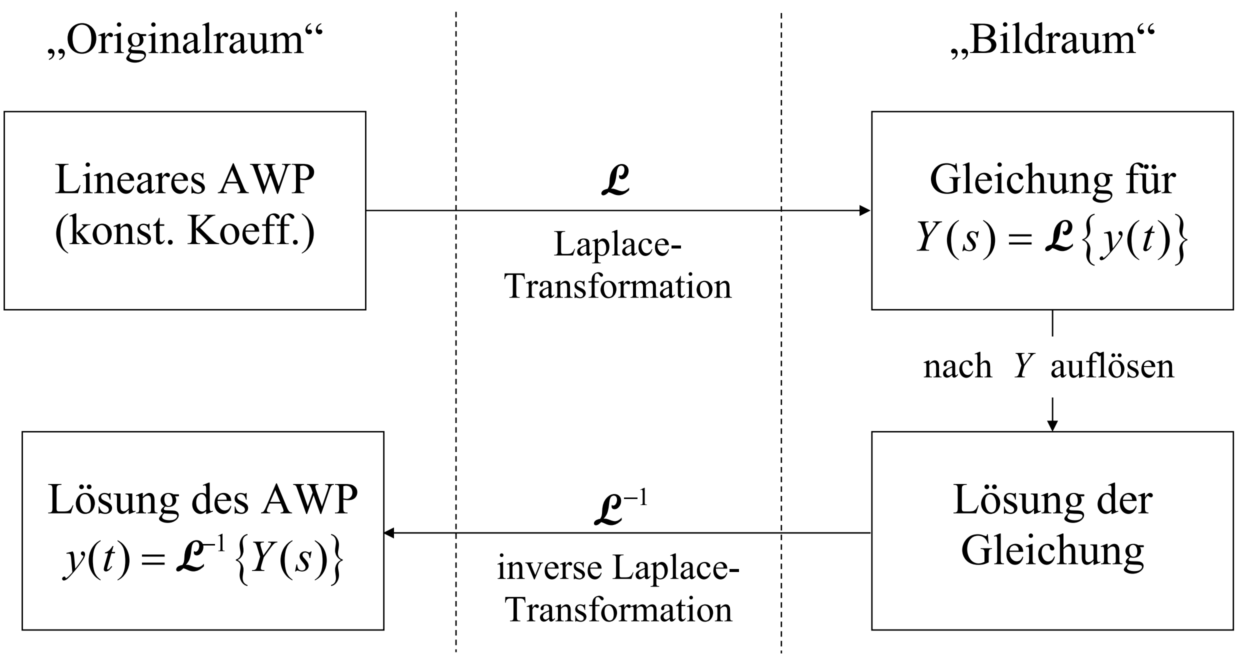
$$=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1=\frac{1}{s}\left(1-e^{-s}\right)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\,\frac{1-e^{-s}}{s}$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-s})(1+e^{-s})}\,\frac{1-e^{-s}}{s}=\frac{1}{s(1+e^{-s})}$$

11.3 Anwendung der Laplace-Transformation

Mit Hilfe der Laplace-Transformation kann eine Methode zur Lösung von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten gewonnen werden. Die Vorgehensweise ist im folgenden schematisch dargestellt.



Beispiel:

1) $y'' + 5y' + 4y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$$\mathcal{L}\{\,y''\} + 5\mathcal{L}\{\,y'\} + 4\mathcal{L}\{\,y\} = \mathcal{L}\{\,t\}$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0+) - y'(0+) + 5\left[sY(s) - y(0+)\right] + 4Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

mit den Anfangsbedingungen erhält man

$$s^2 Y(s) + 5sY(s) + 4Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+5s+4)} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\,Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+5s+4)}\right\}$$

Um die inverse Laplace-Transformierte zu berechnen, führt man eine Partialbruch-Zerlegung durch.

$$\frac{1}{s^2(s^2+5s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1} + \frac{D}{s+4}$$

$$D = \left.\frac{1}{s^2(s+1)}\right|_{s=-4} = -\frac{1}{48}, \quad C = \left.\frac{1}{s^2(s+4)}\right|_{s=-1} = \frac{1}{3}, \quad B = \left.\frac{1}{(s+1)(s+4)}\right|_{s=0} = \frac{1}{4}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$A + C + D = 0 \Rightarrow A = -C - D = \frac{1}{48} - \frac{16}{48} = -\frac{5}{16}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+5s+4)}\right\} = -\frac{5}{16}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \frac{1}{48}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}$$

$$\Rightarrow y(t) = -\frac{5}{16}u(t) + \frac{1}{4}t\,u(t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{48}e^{-4t}u(t)$$

$$= \left(-\frac{5}{16} + \frac{1}{4}t + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-4t}\right)u(t)$$

2) $y'' + ky/m = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0$

$s^2 Y(s) - sy(0+) - y'(0+) + k\,Y(s)/m = 0$

mit den Anfangsbedingungen erhält man

$$Y(s)\left(s^2 + \frac{k}{m}\right) = v_0 \quad \Rightarrow \quad Y(s) = \frac{v_0}{s^2 + k/m} = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{\sqrt{k/m}}{s^2 + k/m}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) u(t)$$

3) $y'' + y = \delta(t - \pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

$s^2 Y(s) - s\,y(0+) - y'(0+) + Y(s) = e^{-\pi s}$

$Y(s)(s^2 + 1) = e^{-\pi s}$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \sin(t - \pi)\, u(t - \pi) = -\sin t \; u(t - \pi)$$

11.4 Faltungseigenschaft

Definition 11-3:

Sind f und g zwei Originalfunktionen, dann heißt

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - u)\, g(u)\, du$$

die Faltung von f und g.

Es gilt

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

denn

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = -\int_t^0 f(v)\, g(t-v)\, dv$$

$$= \int_0^t g(t-v)\, f(v)\, dv = (g * f)(t),$$

wobei die Substitution $v = t - u$ mit $dv = -\,du$ ausgenutzt wurde.

Satz 11-5:
Sind f und g zwei Originalfunktionen, dann gilt

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)\cdot G(s)$$

Beweis:

$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} =$$
$$= \int_0^\infty\left(\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,du\right)e^{-st}dt = \int_0^\infty\left(\int_0^t f(t-u)\,g(u)\,e^{-st}du\right)dt$$
$$= \int_0^\infty\left(\int_u^\infty f(t-u)\,g(u)\,e^{-st}dt\right)du = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(v)\,g(u)\,e^{-s(v+u)}dv\right)du$$
$$= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(v)\,e^{-sv}dv\right)g(u)e^{-su}\,du = \int_0^\infty f(v)\,e^{-sv}dv\cdot\int_0^\infty g(u)\,e^{-su}du$$
$$= \mathcal{L}\{f(t)\}\cdot\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)\cdot G(s),$$

wobei die Substitution $v = t-u$ mit $dv = dt$ ausgenutzt wurde.

Beispiel:

1) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{t\}\cdot\mathcal{L}\{\sin t\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{t*\sin t\}\right\} = t*\sin t$$
$$= \int_0^t (t-v)\sin v\,dv = (t-v)(-\cos v)\Big|_0^t - \int_0^t(-1)(-\cos v)\,dv$$
$$= t\,u(t) - \int_0^t \cos v\,dv = t\,u(t) - \sin v\Big|_0^t = (t-\sin t)\,u(t),$$

wobei die Korrespondenzen

$$\frac{1}{s^2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ t\,u(t) \quad\text{und}\quad \frac{1}{s^2+1}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \sin t\,u(t)$$

ausgenutzt wurden.

2) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2-1)(s^2-4)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\sinh t\}\cdot\mathcal{L}\{\sinh(2t)\}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\sinh t * \sinh(2t)\}\right\} = \sinh t * \sinh(2t)$$

$$= \int_0^t \sinh(t-v)\sinh(2v)\,dv$$

mit Hilfe von $\sinh x \sinh y = \frac{1}{2}\big(\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\big)$ erhält man

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2-1)(s^2-4)}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cosh(t+v) - \cosh(t-3v)\right] dv$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sinh(t+v)\Big|_0^t + \frac{1}{3}\sinh(t-3v)\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sinh(2t) - 2\sinh t\right] u(t)$$

3) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}\right\} = \frac{1}{\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\beta}{(s^2+\beta^2)}\cdot\frac{\beta}{(s^2+\beta^2)}\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\sin(\beta t)\}\cdot\mathcal{L}\{\sin(\beta t)\}\right\}$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\mathcal{L}\{\sin(\beta t) * \sin(\beta t)\}\right\} = \frac{1}{\beta^2}\sin(\beta t) * \sin(\beta t)$$

$$= \frac{1}{\beta^2}\int_0^t \sin\big(\beta(t-v)\big)\sin(\beta v)\,dv$$

mit Hilfe von $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big)$ erhält man

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2}\right\} = \frac{1}{2\beta^2}\int_0^t \left[\cos\left(\beta(t-2v)\right) - \cos(\beta t)\right] dv$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\left[\left.\frac{\sin\left(\beta(t-2v)\right)}{-2\beta}\right|_0^t - v\,\cos(\beta t)\Big|_0^t\right]$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\left[\frac{1}{2\beta}\left(\sin(\beta t) - \sin(-\beta t)\right) - t\cos(\beta t)\right] u(t)$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\left[\frac{\sin(\beta t)}{\beta} - t\cos(\beta t)\right] u(t)$$

4) $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s^2+2s+5)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)+2}{((s+1)^2+4)^2}\right\} = e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s^2+2^2)^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s^2+2s+5)^2}\right\} = e^{-t}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+2^2)^2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+2^2)^2}\right\}\right)$$

$$= e^{-t}\left(\frac{1}{4}t\sin(2t) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin(2t) - t\cos(2t)\right)\right) u(t)$$

$$= \frac{e^{-t}}{8}\left(\sin(2t) + 2t\left(\sin(2t) - \cos(2t)\right)\right) u(t),$$

wobei die Korrespondenzen

$$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{u(t)}{2\beta^2}\left(\frac{\sin(\beta t)}{\beta} - t\cos(\beta t)\right) \quad \text{vgl. Bsp. 3 auf S. } 11-26/27$$

und

$$\frac{s}{(s^2+\beta^2)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{t\sin(\beta t)}{2\beta} u(t) \quad \text{vgl. Bsp. 2 auf S. } 11-13$$

ausgenutzt wurden.

Aufgabe 11-1: Berechnen Sie die Laplace-Transformierten der Funktionen

a) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$ und $g(t) = \int_0^t \dfrac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$

b) $f(t) = \sinh(\alpha t)$ und $g(t) = \cosh(\alpha t)$

sowie die inverse Laplace-Transformierte von

c) $F(s) = \dfrac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

Aufgabe 11-2: Berechnen Sie die Laplace-Transformierte der Zeitfunktionen

a) $$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t - T/2}{T} & : \text{ für } 0 < t < T \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

b) $$f(t) = \begin{cases} t/T & : \text{ für } 0 < t < T \\ 2 - t/T & : \text{ für } T < t < 2T \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 11-3: Es seien f und f' Originalfunktionen. Beweisen Sie für $s = \sigma + j\omega$ die folgenden Grenzwertsätze.

a) $\lim\limits_{\sigma\to\infty} F(s) = 0$

b) $\lim\limits_{t\to 0+} f(t) = \lim\limits_{\sigma\to\infty} sF(s)$, falls f stetig auf $(0,\infty)$ (Anfangswertsatz)

c) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{s\to 0} sF(s)$, falls f stetig auf $(0,\infty)$ und $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ existiert (Endwertsatz)

Aufgabe 11-4: Lösen Sie die folgenden AWP's mit Hilfe der Laplace-Transformation

a) $y'' - 4y = 2\sinh t,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

b) $y'' + y = 1_{(0,2\pi)}(t),\quad y(0) = y'(0) = 0$

c) $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}\sin x,\quad y(0) = y'(0) = 0$

d) $y'' - y = t,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$