Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 3

Kapitel 12

Differenzengleichungen, *z*-Transformation

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

INSTITUTE OF WATERACOUSTICS, SONAR ENGINEERING AND SIGNAL THEORY
HOCHSCHULE BREMEN

Höhere Mathematik 3

Kapitel 12

Inhaltsverzeichnis

12 Differenzengleichungen, *Z*-Transformation,

In diesem Kapitel wollen wir eine weitere Transformation, die *Z*-Transformation behandeln. Mit Hilfe der *Z*-Transformation können lineare Differenzengleichungen gelöst werden.

12.1 Einführung in Differenzengleichungen

Gegeben sei das Anfangswertproblem (AWP)

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

Die (eindeutige) Lösung dieses AWP lautet

$$y(t) = e^t.$$

Wir führen für dieses Anfangswertproblem eine Diskretisierung durch, d.h. ausgehend vom Startpunkt $t_0 = 0$ betrachten wir die Lösungsfunktion $y(t)$ dieses AWP an den Zeitpunkten $t_n = nh$ (hierbei ist h die Schrittweite).

Es gilt $t_{n+1} = t_n + h$. Für $y(t_n)$ schreiben wir kurz $y_n = y(t_n)$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten der Diskretisierung.

<u>1. Möglichkeit</u>

Ersetzen wir die Ableitung $y'(t_n)$ durch den Differenzenquotienten

$$y'(t_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h},$$

so erhalten wir (nach Multiplikation mit h) anstelle des AWP die folgende Differenzengleichung

$$y_{n+1} - y_n = hy_n, \; y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} - (1+h)y_n = 0, \; y_0 = 1.$$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf

$$\lambda^n \left(\lambda - (1+h)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 + h \quad \Rightarrow \quad y_n = c(1+h)^n, \quad c \in \mathbb{R},$$

ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung. Mit der Anfangsbedingung

$$y_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = c\,(1+h)^0 = c = 1.$$

Also gilt

$$y_n = (1+h)^n, \quad (n \geq 0),$$

ist die (eindeutige) Lösung der gegebenen Differenzengleichung. Es gilt für $t = nh$

$$\lim_{h\to 0} y_n = \lim_{h\to 0}(1+h)^n = \lim_{h\to 0}(1+h)^{t/h} = \left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right)^t = \left(\lim_{u\to\infty}(1+1/u)^u\right)^t = e^t$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} y_n = y(t).$$

2. Möglichkeit

Integrieren wir die gegebene Differentialgleichung $y' = y$ von t_n bis t_{n+1}, so erhalten wir

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y(t)\,dt$$

Nähern wir das Integral auf der rechten Seite mit Hilfe der Trapez-Formel an, so erhalten wir die folgende Differenzengleichung

$$y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(y_n + y_{n+1}), \; y_0 = 1 \Rightarrow \left(1 - \frac{h}{2}\right) y_{n+1} - \left(1 + \frac{h}{2}\right) y_n = 0, \; y_0 = 1$$

$$\Rightarrow \; y_{n+1} - \frac{1+h/2}{1-h/2}\, y_n = 0, \; y_0 = 1.$$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf

$$\lambda^{n+1} - \frac{1+h/2}{1-h/2}\lambda^n = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^n\left(\lambda - \frac{1+h/2}{1-h/2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \; \lambda = \frac{1+h/2}{1-h/2} \;\Rightarrow\; y_n = c\left(\frac{1+h/2}{1-h/2}\right)^n, \; c \in \mathbb{R},$$

ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung. Mit der Anfangsbedingung $y_0 = 1$ ergibt sich die (eindeutige) Lösung der gegebenen Differenzengleichung zu

$$y_n = \left(\frac{1 + h/2}{1 - h/2} \right)^n, \quad \text{da} \quad y_0 = c = 1$$

Auch hier gilt für $t = nh$

$$\lim_{h \to 0} y_n = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 + h/2}{1 - h/2} \right)^n = \left(\lim_{h \to 0} \left(\frac{1 + h/2}{1 - h/2} \right)^{1/h} \right)^t = e^t = y(t).$$

Im folgenden werden nun lineare Differenzengleichungen behandelt.

Definition 12-1: (*Lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung*)

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = f_n, \quad a_i, f_n \in \mathbb{R},$$

heißt lineare Differenzengleichung k-ter Ordnung. Ist $f_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$, so heißt die Differenzengleichung homogen, sonst inhomogen.

Wie bei linearen Differentialgleichungen gelten auch bei linearen Differenzengleichungen die folgenden Aussagen.

- Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differenzengleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differenzengleichung.
- Die allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung k-ter Ordnung ist eine Linearkombination aus k linear unabhängigen Lösungen der homogenen Differenzengleichung. Wir betrachten zunächst lineare homogene Differenzengleichung.

12.2 Lineare Differenzengleichungen

12.2.1 Lösung linearer homogener Differenzengleichungen

Lineare homogene Differenzengleichung 1. Ordnung

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{n+1} + a y_n = 0.$$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf

$$\lambda^{n+1} + a\lambda^n = \lambda^n(\lambda + a) = 0 \Rightarrow \lambda = -a.$$

Also ist

$$y_n = c(-a)^n, \quad c \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der gegebenen linearen homogenen Differenzengleichung 1. Ordnung.

Beispiel:

$y_{n+1} - 3y_n = 0 \;\Rightarrow\; y_n = c3^n$, mit $c \in \mathbb{R}$, ist allgemeine Lösung.

Lineare homogene Differenzengleichung 2. Ordnung

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{n+2} + a y_{n+1} + b y_n = 0.$$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf

$$\lambda^{n+2} + a\lambda^{n+1} + b\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

$$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad \text{(charakteristisches Polynom).}$$

1. Fall

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ besitze die unterschiedlichen reellen Nullstellen λ_1 und λ_2. Dann ist

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der gegebenen linearen homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung.

2. Fall

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ besitze die komplexen Nullstellen λ_1 und λ_1^*. Dann ist

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2(\lambda_1^*)^n,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine komplexe Lösung der gegebenen linearen homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung. Da die Differenzengleichung linear ist und die Koeffizienten reell sind, gilt hier wie bei linearen Differentialgleichungen, dass mit einer komplexen Lösung sowohl Real- als auch Imaginärteil reelle Lösungen sind.

Aus $\lambda_1 = |\lambda_1|\, e^{i\varphi}$ und $\lambda_1^n = |\lambda_1|^n\, e^{in\varphi}$ ergibt sich mit

$$\mathrm{Re}(\lambda_1^n) = |\lambda_1|^n \cos(n\varphi), \quad \mathrm{Im}(\lambda_1^n) = |\lambda_1|^n \sin(n\varphi)$$

die allgemeine reelle Lösung der gegebenen linearen homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung zu

$$\Rightarrow y_n = c_1\, |\lambda_1|^n \cos(n\varphi) + c_2\, |\lambda_1|^n \sin(n\varphi), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Fall

Das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ besitze die doppelte Nullstelle λ_1. Dann ist

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

allgemeine Lösung der gegebenen linearen homogenen Differenzengleichung 2. Ordnung, denn $y_n = n\lambda_1^n$ ist auch Lösung der homogenen Differenzengleichung, falls λ_1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

<u>*Beweis:*</u>

Da λ_1 doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, gilt

$$p(\lambda_1) = \lambda_1^2 + a\lambda_1 + b = 0, \quad p'(\lambda_1) = 2\lambda_1 + a = 0.$$

Einsetzen von $y_n = n\lambda_1^n$ in die Differenzengleichung liefert demzufolge

$$(n+2)\lambda_1^{n+2} + a(n+1)\lambda_1^{n+1} + bn\lambda_1^n = \lambda_1^n \left(n(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + \lambda_1(2\lambda_1 + a) \right)$$
$$= \lambda_1^n \left(np(\lambda_1) + \lambda_1 p'(\lambda_1) \right) = 0.$$

Beispiel:

1) Gegeben sei $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0.$ Das charakteristische Polynom
$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0.$
liefert mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ die allgemeine Lösung
$y_n = c_1 1^n + c_2 2^n,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

2) Gegeben sei $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 0.$ Das charakteristische Polynom
$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = \left(\lambda - (1+j)\right)\left(\lambda - (1-j)\right) = 0$
liefert mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1 \pm j = \sqrt{2} e^{\pm j\pi/4}$ die allgemeine Lösung

$y_n = c_1 \sqrt{2}^n \cos\left(n\pi/4\right) + c_2 \sqrt{2}^n \sin\left(n\pi/4\right),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

3) Gegeben sei $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 0.$ Das charakteristische Polynom
$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$
liefert mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = 2$ die allgemeine Lösung
$y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

Lineare homogene Differenzengleichung k-ter Ordnung

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + \ldots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0,\ a_i \in \mathbb{R}.$$

Der Ansatz $y_n = \lambda^n$ führt auf

$\lambda^n(\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0) = \lambda^n p(\lambda) = 0$

$\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$ (charakteristisches Polynom).

Ist λ_1 eine r-fache Nullstelle von $p(\lambda)$, so sind die Folgen

$$\lambda_1^n, n\lambda_1^n, n^2\lambda_1^n, \ldots, n^{r-1}\lambda_1^n$$

linear unabhängige Lösungen der homogenen Differenzengleichung.

Beweis:
per Induktion (Induktionsanfang siehe lineare homogene Differenzengleichung 2. Ordnung, 3. Fall).

Damit erhält man auch im allgemeinen Fall einer linearen homogenen Differenzengleichung k-ter Ordnung mit Hilfe der Nullstellen des charakteristischen Polynoms k linear unabhängige Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichung. Die allgemeine Lösung ist dann Linearkombination aus diesen Fundamentallösungen.

12.2.2 Partikuläre Lösung linearer inhomogener Differenzengleichungen

Für spezielle "rechte Seiten" f_n wird nun ein Ansatz angegeben, der auf eine partikuläre Lösung führt.

Die rechte Seite sei von der Form

$$f_n = q(n)\,\rho^n \begin{Bmatrix} \cos\beta n \\ \sin\beta n \end{Bmatrix},$$

wobei $q(n)$ ein Polynom bezeichnet. Ersetzt man die rechte Seite durch die komplexe Funktion

$$\tilde{f}_n = q(n)\gamma^n \quad \text{mit} \quad \gamma = \rho e^{j\beta}$$

dann führt der komplexe Ansatz

$$w_n = n^l r(n)\gamma^n \qquad (\operatorname{grad} r = \operatorname{grad} q)$$

auf eine partikuläre Lösung

$$y_n = \begin{cases} \mathrm{Re}\{w_n\} & \text{falls} \quad \cos\beta n \quad \text{auf rechter Seite} \\ \mathrm{Im}\{w_n\} & \text{falls} \quad \sin\beta n \quad \text{auf rechter Seite} \end{cases},$$

wobei

$l = 0$, falls γ keine Nullstelle (keine Resonanz)
$l > 0$, falls γ l-fache Nullstelle (l-fache Resonanz)

des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ ist.

Im Fall

$\beta = 0$ ist der Ansatz reell und es gilt $y_n = w_n$
$\beta \neq 0$ kann auch der reelle Ansatz

$$y_n = n^l \rho^n \left(r_1(n)\cos\beta n + r_2(n)\sin\beta n \right)$$

durchgeführt werden, wobei grad r_1 = grad r_2 = grad q

Beispiel:

1) $y_{n+1} - 3y_n = n2^n$

homogene Lösung:

$p(\lambda) = \lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 3 \;\Rightarrow\; y_n = c3^n,\; c \in \mathbb{R}$

ist allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung

partikuläre Lösung:

Ansatz: $y_n = (a + bn)2^n$, (keine Resonanz)

$$\Rightarrow \left(a + b(n+1)\right)2^{n+1} - 3(a+bn)2^n = 2^n(2a + 2bn + 2b - 3a - 3bn)$$
$$= 2^n\left((2b - a) + (-b)n\right) = n2^n$$

$\Rightarrow\; b = -1,\; a = 2b = -2 \;\Rightarrow\; y_n = -(2+n)2^n$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen linearen inhomogenen Differenzengleichung

$$y_n = c3^n - (2+n)2^n,\ c \in \mathbb{R}.$$

Ist der Anfangswert y_0 gegeben, so erhält man mit

$$y_0 = c - 2 \ \Rightarrow\ c = y_0 + 2 \ \Rightarrow\ y_n = (y_0 + 2)3^n - (2+n)2^n,\ n \geq 0$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

2) $y_{n+1} - 2y_n = n2^n$

<u>homogene Lösung:</u>

$$p(\lambda) = \lambda - 2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda = 2 \ \Rightarrow\ y_n = c2^n,\ c \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung

<u>partikuläre Lösung:</u>

Ansatz: $y_n = n(a + bn)2^n$, (einfache Resonanz)

$$\Rightarrow \left(a(n+1) + b(n+1)^2\right)2^{n+1} - 2(an + bn^2)2^n =$$

$$= 2^n(2an + 2a + 2bn^2 + 4bn + 2b - 2an - 2bn^2)$$

$$= 2^n\left((2a + 2b) + 4bn\right) = n2^n$$

$$\Rightarrow\ b = 1/4,\ a = -b = -1/4 \ \Rightarrow\ y_n = (n^2 - n)2^{n-2}$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen linearen inhomogenen Differenzengleichung

$$y_n = c2^n + (n^2 - n)2^{n-2},\ c \in \mathbb{R}.$$

Ist der Anfangswert y_0 gegeben, so erhält man mit

$$y_0 = c \ \Rightarrow\ c = y_0 \ \Rightarrow\ y_n = y_0 2^n + (n^2 - n)2^{n-2},\ n \geq 0$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

3) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^n$

<u>homogene Lösung:</u>

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_n = c_1 1^n + c_2 2^n, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung

<u>partikuläre Lösung:</u>

Ansatz: $y_n = an2^n$, (einfache Resonanz)

$$\Rightarrow a(n+2)2^{n+2} - 3a(n+1)2^{n+1} + 2an2^n =$$

$$= 2^n(4an + 8a - 6an - 6a + 2an) = 2^n(2a) = 2^n$$

$$\Rightarrow a = 1/2 \Rightarrow y_n = n2^{n-1}$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen linearen inhomogenen Differenzengleichung

$$y_n = c_1 + c_2 2^n + n2^{n-1}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sind die Anfangswerte y_0 und y_1 gegeben, so erhält man mit

$$y_0 = c_1 + c_2, \; y_1 = c_1 + 2c_2 + 1 \Rightarrow c_1 = 2y_0 - y_1 + 1, \; c_2 = y_1 - y_0 - 1$$

$$\Rightarrow y_n = (2y_0 - y_1 + 1) + (y_1 - y_0 - 1)2^n + n2^{n-1}, \quad n \geq 0$$

die Lösung des Anfangswertproblems.

4) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 2^n$

<u>homogene Lösung:</u>

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm j = \sqrt{2}e^{\pm j\pi/4}$$

$$\Rightarrow y_n = c_1\sqrt{2}^n \cos(n\pi/4) + c_2\sqrt{2}^n \sin(n\pi/4), \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung partikuläre Lösung:

Ansatz: $y_n = a2^n$, (keine Resonanz)

$$\Rightarrow a2^{n+2} - 2a2^{n+1} + 2a2^n = 2^n(4a - 4a + 2a) = 2^n(2a) = 2^n$$

$$\Rightarrow a = 1/2 \Rightarrow y_n = 2^{n-1}$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen linearen inhomogenen Differenzengleichung

$$y_n = c_1\sqrt{2}^n \cos(n\pi/4) + c_2\sqrt{2}^n \sin(n\pi/4) + 2^{n-1},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Sind die Anfangswerte $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ gegeben, so erhält man mit

$$y_0 = c_1 + 1/2 = 0,\ y_1 = c_1 + c_2 + 1 = 1 \ \Rightarrow\ c_1 = -1/2,\ c_2 = -c_1 = 1/2$$

$$\Rightarrow\ y_n = \sqrt{2}^{n-2}(\sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/4)) + 2^{n-1},\ n \geq 0$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems.

5) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$

homogene Lösung:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 2 \ \text{(doppelte Nullstelle)}$$

$$\Rightarrow\ y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n,\ c_1, c_1 \in \mathbb{R}$$

ist allgemeine Lösung der homogenen Differenzengleichung

partikuläre Lösung:

Ansatz: $y_n = an^2 2^n$, (doppelte Resonanz)

$$\Rightarrow\ a(n+2)^2 2^{n+2} - 4a(n+1)^2 2^{n+1} + 4an^2 2^n =$$

$$= 2^n(4an^2 + 16an + 16a - 8an^2 - 16an - 8a + 4an^2) = 2^n(8a) = 2^n$$

$$\Rightarrow\ a = 1/8 \ \Rightarrow\ y_n = n^2 2^{n-3}$$

ist partikuläre Lösung der inhomogenen Differenzengleichung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen linearen inhomogenen Differenzengleichung

$$y_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + n^2 2^{n-3}, \; c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Sind die Anfangswerte $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ gegeben, so erhält man mit

$$y_0 = c_1 = 0, \; y_1 = 2c_1 + 2c_2 + 1/4 = 1 \;\Rightarrow\; c_1 = 0, c_2 = 3/8$$

$$\Rightarrow y_n = (3n + n^2) 2^{n-3}, \; n \geq 0$$

ist die Lösung des Anfangswertproblems.

12.3 *Z*-Transformation

Eine andere Möglichkeit, lineare Differenzengleichungen zu lösen, bietet die *Z*-Transformation, die wir im folgenden Abschnitt behandeln werden.

<u>Definition 12-2:</u> (*Z-Transformation*)

Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann heißt

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\} := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

die *Z*-Transformierte der Folge (f_n), wobei $F(z)$ für die $z \in \mathbb{C}$ definiert ist, für die die unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$ konvergiert.

Bei der *Z*-Transformation wird einer komplexen Folge (f_n) eine komplexe Funktion $F(z)$ zugeordnet. Die *Z*-Transformation ist im Gegensatz zu der bisher behandelten Laplace-Transformation (Integral-Transformation) eine diskrete Transformation.

Wir wollen zunächst die Konvergenz der unendlichen Reihe der Z-Transformation untersuchen.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n} = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, z^{-n}$$

ist eine Laurent-Reihe (vgl. Kapitel 15) um $z_0 = 0$.

Ersetzen wir $w = z^{-1}$ so erhalten wir $\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, w^n$. Dies ist bzgl. w eine Potenzreihe um $w_0 = 0$. Diese Potenzreihe habe den Konvergenzradius $R_w > 0$, sie konvergiert also für $|w| < R_w$. Folglich konvergiert die Z-Transformationsreihe für $|z| > 1/R_w = R_z$, d.h. außerhalb des Kreises um 0 mit Radius $R_z = 1/R_w$.

Der Radius R_z kann häufig mit Hilfe des Quotientenkriteriums wie folgt berechnet werden.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}z^{-(n+1)}}{f_n z^{-n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| . \frac{1}{|z|} = \frac{R_z}{|z|} < 1 \;\Rightarrow\; |z| > R_z \quad \text{mit} \quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}}{f_n}\right| = R_z$$

Beispiel:

1) $f_0 = 1,\;\; f_n = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{Z}\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n} = f_0 = 1, \text{ also } F(z) \equiv 1$$

2) $f_n = a^n,\;\; n \in \mathbb{N}_0,\;\; a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ fest.

$$\mathcal{Z}\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z}\right)^n = \frac{1}{1-a/z} = \frac{z}{z-a} \quad \text{falls } \left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

$$\Rightarrow\; |z| > |a|, \text{ also } \quad F(z) = \frac{z}{z-a},\;\; |z| > |a|$$

Auch bei der Z-Transformation spielt die Faltung eine wichtige Rolle. Die Faltung wird deshalb wie folgt definiert.

Definition 12-3: (*Faltung*)

Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen in $\mathbb{C}$. Dann heißt die Folge

$$(h_n) = (f_n) * (g_n) \quad \text{mit} \quad (h_n) = \sum_{l=0}^{n} f_l\, g_{n-l},\ n \in \mathbb{N}_0$$

die Faltung von (f_n) mit (g_n).

Im folgenden Satz werden die wichtigsten Eigenschaften der *Z*-Transformation zusammengefasst.

Satz 12-1: (*Eigenschaften der Z-Transformation*)

Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei Folgen in $\mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt

a) Linearität

$$\mathcal{Z}\{f_n + g_n\} = \mathcal{Z}\{f_n\} + \mathcal{Z}\{g_n\},\ \mathcal{Z}\{c\, f_n\} = c\,\mathcal{Z}\{f_n\}$$

b) $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = z^{-k}\mathcal{Z}\{f_n\},\ k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f_n = 0 \ \text{für} \ n < 0$

c) $\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = z^k\left(\mathcal{Z}\{f_n\} - \sum_{l=0}^{k-1} f_l\, z^{-l}\right),\ k \in \mathbb{N}$

Insbesondere gilt

$$\mathcal{Z}\{f_{n+1}\} = z\big(\mathcal{Z}\{f_n\} - f_0\big),$$

$$\mathcal{Z}\{f_{n+2}\} = z^2\big(\mathcal{Z}\{f_n\} - f_0 - f_1 z^{-1}\big).$$

d) Dämpfungseigenschaft

$$\mathcal{Z}\{\alpha^n f_n\} = F(z/\alpha) \ \text{mit} \ F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\},\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

e) Differentiationseigenschaft

$$\mathcal{Z}\{n f_n\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\{f_n\} = -z\frac{dF(z)}{dz} \ \text{mit} \ F(z) = \mathcal{Z}\{f_n\}$$

f) Faltungseigenschaft

$$\mathcal{Z}\{f_n * g_n\} = \mathcal{Z}\{f_n\} \cdot \mathcal{Z}\{g_n\}$$

Beweis:

a) Die Linearität folgt aus der Linearität der unendlichen Summe, falls die Reihen jeweils konvergent sind.

b) $\mathcal{Z}\{f_{n-k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k}\, z^{-n} = \sum_{n=-k}^{\infty} f_n\, z^{-(n+k)} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n}$, da $f_n = 0$ für $n<0$

c) $\mathcal{Z}\{f_{n+k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k}\, z^{-n} = \sum_{n=k}^{\infty} f_n\, z^{-(n-k)} = z^k \sum_{n=k}^{\infty} f_n\, z^{-n}$

$$= z^k \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n} - \sum_{n=0}^{k-1} f_n\, z^{-n} \right) = z^k \left(\mathcal{Z}\{f_n\} - \sum_{n=0}^{k-1} f_n\, z^{-n} \right)$$

d) $\mathcal{Z}\{\alpha^n f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (z/\alpha)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n w^{-n} = F(w) = F(z/\alpha).$

e) $\dfrac{dF(z)}{dz} = \dfrac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-n)\, f_n\, z^{-n-1} = -\dfrac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} n\, f_n\, z^{-n} = -\dfrac{1}{z} \mathcal{Z}\{n\, f_n\}$

(Laurent-Reihe darf man im Konvergenzring gliedweise differenzieren).

f) $\mathcal{Z}\{f_n\} \cdot \mathcal{Z}\{g_n\} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\, z^{-n} \right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} g_n\, z^{-n} \right) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} f_l\, z^{-l} g_{n-l}\, z^{-(n-l)} \right)}_{\text{Cauchy Produkt}}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{l=0}^{n} f_l\, g_{n-l} \right) z^{-n} = \mathcal{Z}\{f_n * g_n\}$$

Beispiel:

1) zu a)

$$\mathcal{Z}\{\sin(\Omega n)\} = \mathcal{Z}\left\{ \frac{1}{2j}(e^{j\Omega n} - e^{-j\Omega n}) \right\} = \frac{1}{2j}\left(\mathcal{Z}\{e^{j\Omega n}\} - \mathcal{Z}\{e^{-j\Omega n}\} \right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\Omega}} - \frac{z}{z-e^{-j\Omega}} \right) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{z(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega})}{z^2 - z(e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}) + 1}$$

$$= \frac{1}{2j} \cdot \frac{z \cdot 2j \sin\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1} = \frac{z \sin\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1}.$$

Analog erhält man

$$\mathcal{Z}\left\{\cos(\Omega n)\right\} = \frac{z^2 - z\cos\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1}.$$

2) zu b)

$$\mathcal{Z}\left\{a^n\right\} = \frac{z}{z-a}$$

$$\mathcal{Z}\left\{(a^{n-1})_{n\geq 1}\right\} = z^{-1}\,\mathcal{Z}\left\{a^n\right\} = \frac{1}{z-a} \quad \text{mit} \quad f_n = 0 \;\; \text{für} \;\; n < 0.$$

3) zu c)

$$\mathcal{Z}\left\{a^{n+1}\right\} = z\left(\mathcal{Z}\left\{a^n\right\} - a^0\right) = z\left(\frac{z}{z-a} - 1\right) = \frac{az}{z-a}$$

4) zu d)

$$\mathcal{Z}\left\{a^n \sin(\Omega n)\right\} = F(z/a) \quad \text{mit} \quad F(z) = \mathcal{Z}\left\{\sin(\Omega n)\right\} = \frac{z\sin\Omega}{z^2 - 2z\cos\Omega + 1}$$

$$\mathcal{Z}\left\{a^n \sin(\Omega n)\right\} = \frac{(z/a)\sin\Omega}{(z/a)^2 - 2(z/a)\cos\Omega + 1} = \frac{az\sin\Omega}{z^2 - 2az\cos\Omega + a^2}.$$

Analog erhält man

$$\mathcal{Z}\left\{a^n \cos(\Omega n)\right\} = \frac{z^2 - az\cos\Omega}{z^2 - 2az\cos\Omega + a^2}.$$

5) zu e)

$$\mathcal{Z}\left\{na^n\right\} = -z\frac{d}{dz}\mathcal{Z}\left\{a^n\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right) = -z\frac{z-a-z}{(z-a)^2} = \frac{az}{(z-a)^2}.$$

$$\mathcal{Z}\left\{n^2a^n\right\} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{az}{(z-a)^2}\right) = -z\frac{a(z-a)^2 - az2(z-a)}{(z-a)^4} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3}.$$

$$\mathcal{Z}\left\{(n^2-n)a^n\right\} = \mathcal{Z}\left\{n^2a^n\right\} - \mathcal{Z}\left\{na^n\right\} = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} - \frac{az}{(z-a)^2} = \frac{2a^2z}{(z-a)^3}$$

6) zu f)

Aus $(f_n)*(1^n)=\sum_{l=0}^{n} f_l\,1^{n-l}=\sum_{l=0}^{n} f_l$ folgt

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{l=0}^{n} f_l\right\}=\mathcal{Z}\left\{(f_n)*(1^n)\right\}=\mathcal{Z}\{f_n\}\cdot\mathcal{Z}\left\{1^n\right\}=\frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\{f_n\}.$$

Insbesondere gilt für $f_n=n$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{l=0}^{n} l\right\}=\frac{z}{z-1}\mathcal{Z}\{n\}=\frac{z^2}{(z-1)^3},$$

da mit Hilfe von Beispiel 5 aus

$$\mathcal{Z}\left\{na^n\right\}=\frac{az}{(z-a)^2}\quad \text{für } a=1\quad \mathcal{Z}\{n\}=\frac{z}{(z-1)^2}\ \text{folgt.}$$

Inverse Z-Transformation

Um die inverse *Z*-Transformierte einer rationalen Funktion zu bestimmen ist es zweckmäßig eine Partialbruchzerlegung durchzuführen und anschließend die obigen Beispiele als Korrespondenztabelle zur Rücktransformation zu verwenden. Dem Kapitel 15 (komplexe Funktionentheorie) ist zu entnehmen, dass sich die inverse *Z*-Transformierte rationaler Funktionen aber auch mit Hilfe des Residuensatzes berechnen lässt. Im folgenden werden einige inverse *Z*-Transformierte zusammengestellt, die sich alle aus den obigen Beispielen entnehmen lassen.

$$\mathcal{Z}^{-1}\{1\}=\begin{cases}1 & \text{für } n=0\\ 0 & \text{für } n\geq 1\end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-a}\right\}=\begin{cases}0 & \text{für } n=0\\ a^{n-1} & \text{für } n\geq 1\end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\}=a^n,\ n\geq 0$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-a)^2}\right\}=\begin{cases}0 & \text{für } n=0\\ (n-1)\,a^{n-2} & \text{für } n\ge 1\end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)^2}\right\}=na^{n-1},\ n\ge 0$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-a)^3}\right\}=\begin{cases}0 & \text{für } n=0\\ (n^2-3n+2)a^{n-3}\big/2 & \text{für } n\ge 1\end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-a)^3}\right\}=\begin{cases}0 & \text{für } n=0\\ (n^2-n)a^{n-2}\big/2 & \text{für } n\ge 1\end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2-2az\cos\Omega+a^2}\right\}=\begin{cases}0 & \text{für } n=0\\ a^{n-2}\sin\big((n-1)\Omega\big)\big/\sin\Omega & \text{für } n\ge 1\end{cases}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z^2-2az\cos\Omega+a^2}\right\}=a^{n-1}\sin(n\Omega)\big/\sin\Omega,\ n\ge 0$$

12.4 Anwendung der *Z*-Transformation auf lineare inhomogene Differenzengleichungen

Wendet man die *Z*-Transformation auf lineare Differenzengleichungen an, so erhält man eine Gleichung für $\mathcal{Z}\{y_n\}=Y(z)$. Durch Rücktransformation erhält man dann die Lösung der gegebenen Differenzengleichung.

Beispiel:

1) $y_{n+1}-3y_n=n2^n$

Anwendung der *Z*-Transformation ergibt

$$z\big(\mathcal{Z}\{y_n\}-y_0\big)-3\mathcal{Z}\{y_n\}=\mathcal{Z}\{n2^n\}=\frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{Z}\{y_n\}=\frac{y_0z}{z-3}+\frac{2z}{(z-3)(z-2)^2}=\frac{y_0z}{z-3}+\frac{6}{z-3}-\frac{6}{z-2}-\frac{4}{(z-2)^2}$$

(*Partialbruchzerlegung*)

$$\Rightarrow \; y_n = y_0 \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-3}\right\} + 6\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-3}\right\} - 6\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\} - 4\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-2)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \; y_n = y_0 3^n + 6\cdot 3^{n-1} - 6\cdot 2^{n-1} - 4(n-1)2^{n-2}, \; n \geq 1$$

$$\Rightarrow \; y_n = (y_0+2)3^n - (3+n-1)2^n, \; n \geq 1.$$

Die Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differenzengleichung mit dem Anfangswert y_0 lautet somit

$$y_n = (y_0+2)3^n - (2+n)2^n, (n \geq 0).$$

2) $y_{n+1} - 2y_n = n2^n$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z\left(\mathcal{Z}\{y_n\} - y_0\right) - 2\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\left\{n2^n\right\} = \frac{2z}{(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow \; \mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{y_0 z}{z-2} + \frac{2z}{(z-2)^3} \;\Rightarrow\; y_n = y_0\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} + 2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{(z-2)^3}\right\}$$

$$\Rightarrow \; y_n = y_0 2^n + 2\cdot\frac{1}{2}(n^2-n)2^{n-2}, \; n \geq 1$$

Die Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differenzengleichung mit dem Anfangswert y_0 lautet somit

$$y_n = y_0 2^n + (n^2-n)2^{n-2}, \; n \geq 0.$$

3) $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^n$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z^2\left(\mathcal{Z}\{y_n\} - y_0 - y_1 z^{-1}\right) - 3z(\mathcal{Z}\{y_n\} - y_0) + 2\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\left\{2^n\right\} = \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow \; (z^2-3z+2)\mathcal{Z}\{y_n\} = y_0(z^2-3z) + y_1 z + \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow \; \mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{y_0(z^2-3z)}{z^2-3z+2} + \frac{y_1 z}{z^2-3z+2} + \frac{z}{(z-2)(z^2-3z+2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{y_0(z^2-3z+2)}{z^2-3z+2} + \frac{y_1 z - 2y_0}{(z-1)(z-2)} + \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$\Rightarrow y_n = y_0 \mathcal{Z}^{-1}\{1\} + (2y_0 - y_1)\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} + (2y_1 - 2y_0)\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\}$$

$$+\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-1}\right\} - \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z-2}\right\} + 2\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{(z-2)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow y_n = (2y_0 - y_1)1^{n-1} + (2y_1 - 2y_0)2^{n-1} + 1^{n-1} - 2^{n-1} + 2(n-1)2^{n-2},\; n \geq 1$$

Denn es gilt

$$\mathcal{Z}^{-1}\{1\} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \geq 1\,. \end{cases}$$

Also folgt

$$y_n = (2y_0 - y_1) + (y_1 - y_0)2^n + 1 - 2^n + n2^{n-1},\; n \geq 1$$

und die Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differenzenglei-chung mit den Anfangswerten y_0 und y_1 lautet somit

$$y_n = (2y_0 - y_1 + 1) + (y_1 - y_0 - 1)2^n + n2^{n-1},\; n \geq 0.$$

4) $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = 2^n, y_0 = 0, y_1 = 1$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z^2\left(\mathcal{Z}\{y_n\} - y_0 - y_1 z^{-1}\right) - 2z\left(\mathcal{Z}\{y_n\} - y_0\right) + 2\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\{2^n\} = \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow (z^2 - 2z + 2)\mathcal{Z}\{y_n\} = z + \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{z}{z^2-2z+2} + \frac{z}{(z-2)(z^2-2z+2)} = \frac{z^2 - z}{(z-2)(z^2-2z+2)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{z^2-2z+2} \qquad \text{(Partialbruchzerlegung)}$$

$$\Rightarrow \; y_n = 2^{n-1} + \frac{1}{\sin(\pi/4)} \sqrt{2}^{\,n-2} \sin\big((n-1)\,\pi/4\big),$$

$$\text{da } \; a^2 = 2, \; a\cos\Omega = 1 \;\Rightarrow\; a = \sqrt{2}, \; \Omega = \pi/4.$$

Also gilt

$$y_n = 2^{n-1} + \sqrt{2}^{\,n-1} \big(\sin(n\,\pi/4)\cos(\pi/4) - \cos(n\,\pi/4)\sin(\pi/4)\big), \; n \geq 1.$$

und die Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differenzengleichung mit den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ lautet somit

$$y_n = 2^{n-1} + \sqrt{2}^{\,n-2} (\sin(n\pi/4) - \cos(n\pi/4)), \; n \geq 0.$$

5) $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n, y_0 = 0, y_1 = 1$

Anwendung der Z-Transformation ergibt

$$z^2 \left\{ \mathcal{Z}\{y_n\} - y_0 - y_1 z^{-1} \right\} - 4z\big(\mathcal{Z}\{y_n\} - y_0\big) + 4\mathcal{Z}\{y_n\} = \mathcal{Z}\left\{2^n\right\} = \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow \; (z^2 - 4z + 4)\mathcal{Z}\{y_n\} = z + \frac{z}{z-2}$$

$$\Rightarrow \; \mathcal{Z}\{y_n\} = \frac{z}{(z-2)^2} + \frac{z}{(z-2)^3}$$

$$\Rightarrow \; y_n = n2^{n-1} + \frac{1}{2}(n^2 - n)2^{n-2}, \; n \geq 1.$$

Die Lösung der gegebenen inhomogenen linearen Differenzengleichung mit den Anfangswerten $y_0 = 0$ und $y_1 = 1$ lautet somit

$$y_n = (3n + n^2)2^{n-3}, \; n \geq 0.$$

Aufgabe 12-1: Bestimmen Sie die folgenden Z- bzw. inversen Z-Transformationen.

a) $\mathcal{Z}\{1-(-1)^n\}$, $\quad \mathcal{Z}\{a^n \sinh(bn)\}$

b) $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\ln\left(\dfrac{z}{z-a}\right)\right\}$, $\quad \mathcal{Z}^{-1}\left\{\dfrac{z^2}{(z-a)^4}\right\}$, $\quad |z|>|a|$

Aufgabe 12-2: Lösen Sie die homogene Differenzengleichung

$$y_{n+2}-11y_{n+1}-12y_n=0$$

mit dem Anfangswert $y_0=2,\ y_1=11$ mit Hilfe

a) der Ansatzmethode

b) der Z-Transformation.

Aufgabe 12-3: Lösen Sie die Differenzengleichung

$$y_{n+1}-y_n=10n$$

mit den Anfangswerten $y_0 = 1$ mit Hilfe

a) der Ansatzmethode

b) der Z-Transformation.

Aufgabe 12-4: Lösen Sie die Differenzengleichung

$$y_{n+2}+y_n=n3^n$$

mit den Anfangswerten $y_0 = 1$ und $y_1 = 0$ mit Hilfe

a) der Ansatzmethode

b) der Z-Transformation.