Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 3

Kapitel 13

Vektoranalysis

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 3

Kapitel 13

Inhaltsverzeichnis

13 Vektoranalysis

In diesem Kapitel wird die Integralrechnung bei mehreren Variablen in die Richtung weiter ausgebaut, dass auch die Integration über Kurven im $\mathbb{R}^n$ und Flächen im $\mathbb{R}^3$, also über niedriger dimensionale Mannigfaltigkeiten als der umgebende Raum, erklärt wird. Anschließend werden Beziehungen zwischen den verschiedenen Integraltypen hergestellt, die insbesondere für die Anwendungen in der Physik und Technik von großer Wichtigkeit sind.

13.1 Vektorfelder

Definition 13-1:

Die vektorwertige Funktion $\mathbf{v}: M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\mathbf{v} := \left(v_1(\mathbf{x}), \ldots, v_n(\mathbf{x})\right)^T$$

heißt Vektorfeld auf M, d.h. ein Vektorfeld ordnet jedem Vektor $\mathbf{x} \in M$ einen Bildvektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ zu.

Beispiel:

1) Jedes Kraftfeld in der Physik ist ein Vektorfeld, ebenso jedes Geschwindigkeitsfeld.

2) Ist K eine glatte Kurve mit der Parameterdarstellung $(\mathbf{g}, [a,b])$, so bilden die Tangentenvektoren $\mathbf{T}_\mathbf{g}(t)$ ein Vektorfeld, $D(\mathbf{T}_\mathbf{g}(t)) = K$.

3) Ist $f: M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^1(M)$ so ist

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x})\right)^T$$

ein Vektorfeld, d.h. jedem Vektor aus $\mathbf{x} \in M$ wird ein Gradientenvektor zugeordnet

Definition 13-2:

Es sei $\mathbf{v}: M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit $\mathbf{v} \in C^1(M)$, dann heißt

$$\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x}) := \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}(\mathbf{x})$$

die Divergenz von $\mathbf{v}$.

Anmerkung:

Die Divergenz ist ein Skalarfeld, d.h. eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sie ist die Spur (Summe der Diagonalelemente) der Funktionalmatrix von $\mathbf{v}$.

Für $n = 3$ können wir auch die Rotation eines Vektorfeldes definieren.

Definition 13-3:

Es sei $\mathbf{v}: M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $\mathbf{v} \in C^1(M)$, dann heißt

$$\text{rot } \mathbf{v}(x,y,z) := \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^T \Bigg|_{(x,y,z)}$$

die Rotation von $\mathbf{v}$.

Führen wir die Differentialoperatoren

a) Nabla-Operator

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$$

b) Laplace-Operator

$$\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

ein, so gilt für $\mathbf{v}: M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \in C^1(M)$, $f: M \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(M)$

$$\text{grad} f = \nabla f$$

$$\text{div } \mathbf{v} = \nabla^T \mathbf{v}$$

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$$

$$\Delta f = \text{div}\big(\text{grad}(f)\big) = \nabla^T \nabla f.$$

Im folgenden Satz fassen wir einige wichtige Eigenschaften dieser Differentialoperatoren zusammen.

Satz 13-1:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ offen.

1) Für $f,g:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f,g \in C^1(M)$ und $\mathbf{v},\mathbf{w}:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ \mathbf{v},\mathbf{w} \in C^1(M)$ gilt
   a) $\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$
   b) $\operatorname{grad}(f\,g) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$
   c) $\operatorname{div}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \operatorname{div}\mathbf{v} + \operatorname{div}\mathbf{w}$
   d) $\operatorname{div}(f\,\mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \operatorname{grad} f + f \operatorname{div}\mathbf{v}$

2) Für $n=3,\ f,\mathbf{v},\mathbf{w} \in C^1(M)$ gilt
   a) $\operatorname{rot}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \operatorname{rot}\mathbf{v} + \operatorname{rot}\mathbf{w}$
   b) $\operatorname{rot}(f\,\mathbf{v}) = f \operatorname{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v} \times \operatorname{grad} f$
   c) $\operatorname{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}^T \operatorname{rot}\mathbf{v} - \mathbf{v}^T \operatorname{rot}\mathbf{w}$

   d) $\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \left(\mathbf{w}^T\nabla\right)\mathbf{v} - \left(\mathbf{v}^T\nabla\right)\mathbf{w} + \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{w} - \mathbf{w}\operatorname{div}\mathbf{v}$
   e) $\operatorname{grad}(\mathbf{v}^T\mathbf{w}) = \left(\mathbf{w}^T\nabla\right)\mathbf{v} + \left(\mathbf{v}^T\nabla\right)\mathbf{w} + \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{w} + \mathbf{w}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}$

3) Für $n=3,\ f,\mathbf{v} \in C^2(M)$ gilt
   a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = 0$ (Wirbelfeld ist quellenfrei)
   b) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$ (Gradientenfeld ist wirbelfrei)
   c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}$

Beweis:

1a), 1c) und 2a) ergeben sich aus der Summenregel für partielle Ableitungen, 1b), 1d) und 2b) aus der Produktregel.

Bei 2c)-2e) müssen noch Darstellungen des Vektor- bzw. Skalarproduktes zusätzlich benutzt werden.

3a) und 3b):

Mit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ folgt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 v_3}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z}, \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x}, \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y}\right)^T$$

$$= \left(f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}\right)^T = \mathbf{0}$$

da die Differentiationsreihenfolge wegen $\mathbf{v} \in C^2(M)$ beliebig ist.

zu 3c)

Ausnutzen von $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}^T \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}^T \mathbf{b})\,\mathbf{c}$ liefert

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla^T \mathbf{v}) - (\nabla^T \nabla)\,\mathbf{v} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{v}) - \Delta\,\mathbf{v}$$

<u>Beispiel:</u>

1) $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 3 > 0 \Rightarrow$ $\mathbf{v}$ ist Quellenfeld

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_{3y} - v_{2z} \\ v_{1z} - v_{3x} \\ v_{2x} - v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbf{v} \text{ ist wirbelfrei}$$

2) $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ $\mathbf{v}$ ist quellen- und senkenfrei

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v_{3y} - v_{2z} \\ v_{1z} - v_{3x} \\ v_{2x} - v_{1y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{v} \text{ ist Wirbelfeld}$$

13.2 Kurvenintegrale

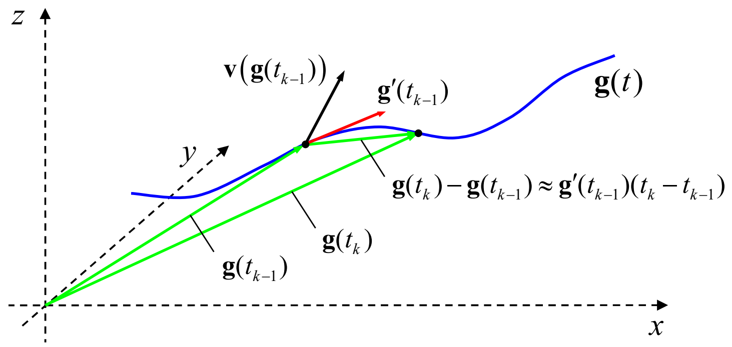
In Kapitel 9 wurde die Integralrechnung von $n = 1$ auf $n > 1$ im Hinblick auf die Inhaltsmessung verallgemeinert. Nun sollen Integrale über Kurven im $\mathbb{R}^n$ eingeführt werden, was für die Anwendung sehr wichtig ist, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel:

Es sei $\mathbf{v}$ ein Kraftfeld im $\mathbb{R}^3$, $D(\mathbf{v}) = M$ und K eine Kurve im $\mathbb{R}^3$, die ganz in M verläuft, mit der Parameterdarstellung $(\mathbf{g},[a,b])$, $\mathbf{g} \in C^1([a,b])$. Welche Arbeit wird geleistet, wenn ein Einheitskörper die Kurve K unter Einwirkung von $\mathbf{v}$ durchläuft?

Sei $Z = \{t_0,t_1,\ldots,t_m\}$ eine Zerlegung des Parameterintervalls von K. Die Arbeit bei Bewegung von $\mathbf{g}(t_{k-1})$ nach $\mathbf{g}(t_k)$ ist näherungsweise

$$A_k \cong \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t_{k-1})\big) \cdot \big(\mathbf{g}(t_k) - \mathbf{g}(t_{k-1})\big) \cong \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t_{k-1})\big) \cdot \mathbf{g}'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}),$$



da nur die in Richtung des Weges wirkende Kraft zur Arbeit beiträgt. Für die Gesamtarbeit A gilt näherungsweise

$$A = \sum_{k=1}^{m} A_k \cong \sum_{k=1}^{m} \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t_{k-1})\big) \cdot \mathbf{g}'(t_{k-1})(t_k - t_{k-1}).$$

Dies ist eine Riemannsche Summe, die für $|Z| \to 0$ unter gewissen Voraussetzungen gegen

$$\int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t)\big) \cdot \mathbf{g}'(t)\,dt$$

konvergiert und somit die folgende Definition motiviert.

Definition 13-4:

Es sei K eine stückweise glatte Kurve im $\mathbb{R}^n$ mit der Parameterdarstellung $(\mathbf{g},[a,b])$. Auf K sei ein stetiges Vektorfeld $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)^T$ definiert. Dann heißt

$$\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \int_K \sum_{i=1}^n v_i(\mathbf{x})\,dx_i = \int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t)\big)\cdot\mathbf{g}'(t)\,dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n v_i\big(\mathbf{g}(t)\big)\frac{dg_i}{dt}\,dt$$

das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ längs K.

Anmerkung:

Für K stückweise glatt und $\mathbf{v}$ stetig existiert

$$\int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t)\big)\cdot\mathbf{g}'(t)\,dt,$$

da der Integrand auf $[a,b]$ mit Ausnahme von höchstens endlich vielen Sprungstellen stetig ist.

Der Wert des Kurvenintergrals ist unabhängig von der Parameterdarstellung

von K. Ist $(\mathbf{h},[c,d])$ eine äquivalente Darstellung von K, so gilt mit der Substitutionsregel

$$\int_c^d \mathbf{v}\big(\mathbf{h}(\tau)\big)\cdot\frac{d\mathbf{h}}{d\tau}\,d\tau = \int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{h}(\varphi(t))\big)\cdot\frac{d\mathbf{h}\big(\varphi(t)\big)}{d\tau}\,\frac{d\varphi}{dt}\,dt = \int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t)\big)\cdot\frac{d\mathbf{g}}{dt}\,dt$$

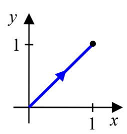
da mit $\mathbf{g}(t)=\mathbf{h}(\varphi(t))$ folgt

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{d\mathbf{h}(\varphi(t))}{d\tau}\,\frac{d\varphi}{dt} \quad \text{für} \quad \tau=\varphi(t).$$

Beispiel:

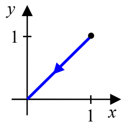
$n=2, \quad \mathbf{v}(x,y)=(xy, y-x)^T$

a) $K_1=\{(x,y):\ x=y=t,\ 0\le t\le 1\}$



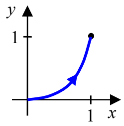
$$\int_{K_1}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x} = \int_{K_1}\big(xy\,dx+(y-x)\,dy\big) = \int_0^1\big(t\cdot t\cdot 1+(t-t)\cdot 1\big)\,dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}.$$

b) $K_2 = -K_1 = \{(x,y): \quad x = y = 1-t, \; 0 \le t \le 1\}$



$$\int_{K_2} \left(x\,y\,dx + (y-x)\,dy\right) = \int_0^1 \left((1-t)(1-t)(-1) + 0\cdot(-1)\right) dt$$
$$= -\int_0^1 (1-t)^2\,dt = -1 + 1 - 1/3 = -1/3.$$

c) $K_3 = \{(x,y): \quad x = t, \; y = t^2, \; 0 \le t \le 1\}$



$$\int_{K_3} \left(x\,y\,dx + (y-x)\,dy\right) = \int_0^1 \left(t^3 + (t^2 - t)\cdot 2t\right) dt$$
$$= \int_0^1 \left(3t^3 - 2t^2\right) dt = 3/4 - 2/3 = 1/12.$$

Somit hängt im allgemeinen der Wert eines Kurvenintegrals vom Verlauf des Weges ab, und bei Umkehrung des Durchlaufsinns von K ändert sich anscheinend das Vorzeichen.

Satz 13-2:

Ist K eine stückweise glatte Kurve, $K' = -K$ diejenige Kurve, die durch Umkehrung des Durchlaufsinns aus K entsteht und $\mathbf{v}$ stetig auf K, so gilt

$$\int_{K'} \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = -\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}$$

Beweis:

Es gilt

$$K = \{\mathbf{x} = \mathbf{g}(t): \quad a \le t \le b\}, \quad K' = \{\mathbf{x} = \mathbf{g}(a+b-\tau): \quad a \le \tau \le b\}$$

und damit

$$\int_{K'} \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{v}\left(\mathbf{g}(a+b-\tau)\right)\cdot \frac{d\,\mathbf{g}(a+b-\tau)}{d\tau}\,d\tau \quad (t = a+b-\tau, \, dt = -d\tau)$$
$$= -\int_b^a \mathbf{v}\left(\mathbf{g}(t)\right)\cdot \frac{d\,\mathbf{g}(t)}{dt}\frac{dt}{d\tau}\,dt = \int_a^b \mathbf{v}\left(\mathbf{g}(t)\right)\cdot \frac{d\,\mathbf{g}(t)}{dt}(-1)\,dt = -\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}.$$

Dies ist offenbar die Verallgemeinerung des entsprechenden Sachverhaltes bei $n = 1$:

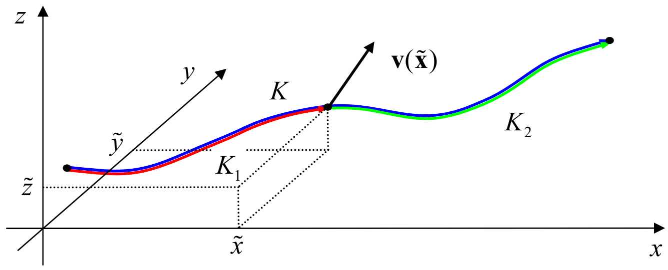
$$\int_a^b g(x)\,dx = -\int_b^a g(x)\,dx$$

Satz 13-3:

Wird die stückweise glatte Kurve K in zwei Teilkurven K_1, K_2 zerlegt mit $K_1 \cup K_2 = K,\ K_1 \cap K_2 = \tilde{\mathbf{x}} \in K$ für genau ein $\tilde{\mathbf{x}}$, so gilt

$$\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{K_1} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{K_2} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Der Beweis folgt aus der Additivität des gewöhnlichen Intergrals.

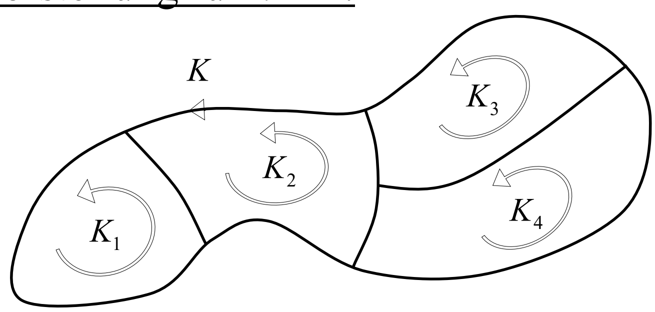


Satz 13-4:

Es sei K eine stückweise glatte geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^n$, in die ein Flächenstück F eingespannt ist, das in k Teilflächen F_i, mit stückweise glattem Rand $K_i = \partial F_i$ so zerlegt ist, dass $F = \bigcup_{i=1}^k F_i$, $\overset{\circ}{F_i} \cap \overset{\circ}{F_j} = \varnothing$ für $i \neq j$. Ist $\mathbf{v}$ auf $F \cup K$ stetig und ist die Orientierung von K_i und K jeweils gleich, dann gilt

$$\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \int_{K_i} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Vorstellung für $n = 2$:



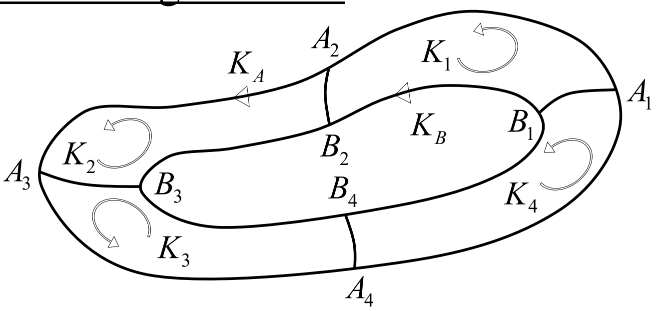
Hieraus folgt auch leicht der Beweis, da die Kurvenstücke im Inneren von F zweimal jeweils entgegengesetzt durchlaufen werden.

Satz 13-5:

Sind K_A und K_B zwei geschlossene stückweise glatte Kurven gleicher Orientierung, die durch die im Sinne der Orientierung aufeinander folgenden Punkte $A_1,\dots,A_k$ bzw. $B_1,\dots,B_k$ unterteilt sind. A_i werde mit B_i durch einen stückweise glatten Kurvenzug verbunden, K_i sei die geschlossene Kurve $A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, B_i, A_i$. Ist $\mathbf{v}$ stetig in einem Gebiet G, das all diese Kurven enthält, so gilt

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{K_i} \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \int_{K_A} \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} - \int_{K_B} \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}.$$

Vorstellung für $n = 2$



Beweis:
Auf $K_A \cup (-K_B)$ Satz 13-4 anwenden.

13.3 Potentiale

In diesem Abschnitt soll die Vektoranalysis um einen wesentlichen Begriff erweitert werden, mit den Aussagen über die "Wegunabhängigkeit" eines Kurvenintegrals formuliert werden können.

Definition 13-5: (*Potentialfeld*, *Gradientenfeld*)

Es sei $\mathbf{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit $D(\mathbf{v}) = M \subset \mathbb{R}^n$ offen. Gibt es eine Funktion $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \in C^1(M)$ und $\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\ \ \forall \mathbf{x} \in M$, so heißt φ ein Potential von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}$ ein Potential-/Gradientenfeld von φ.

Beispiel:

$$M = \left\{(x,y)^T : \ x > 0\right\}, \quad \varphi(x,y) = \arctan\left(y/x\right) \ \Rightarrow \ \varphi \in C^1(M),$$

$$\operatorname{grad}\varphi(x,y) = \left(\frac{\left(-y/x^2\right)}{1+\left(y/x\right)^2}, \frac{\left(1/x\right)}{1+\left(y/x\right)^2}\right)^T = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)^T = \mathbf{v}(x,y)$$

Anmerkung:

Im $\mathbb{R}^3$ gilt wegen rot (grad $\varphi(x,y,z)) = \mathbf{0}$, vgl. Satz 13-1 3b), für ein Potentialfeld $\mathbf{v}$ die Wirbelfreiheit, d.h. rot $\mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{0}$.

Unter gewissen Voraussetzungen an den Definitionsbereich von $\mathbf{v}$ gilt auch die Umkehrung dieser Aussage. Um das zu zeigen, benötigen wir zunächst die folgende Definition.

Definition 13-6:

Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängendes Gebiet, wenn G ein Gebiet ist, vgl. Definition 7-15, und wenn sich jede geschlossene Kurve in G auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne G dabei zu verlassen.

Satz 13-6:

Es sei $\mathbf{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, $D(\mathbf{v}) = G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{v} \in C^1(G)$, dann gilt

$$\mathbf{v} \text{ besitzt auf } G \text{ ein Potential} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{\partial v_l}{\partial x_k}, \; k,l = 1,\ldots,n \quad \forall \mathbf{x} \in G.$$

Anmerkung:

Die an die partiellen Ableitungen gestellten Bedingungen

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_l} = \frac{\partial v_l}{\partial x_k}, \; k,l = 1,\ldots,n \quad \forall \mathbf{x} \in G$$

heißen auch Integrabilitätsbedingungen. Für $\mathbf{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad v_{3y} = v_{2z}, v_{1z} = v_{3x}, v_{2x} = v_{1y}.$$

Ist $v_3 \equiv 0$ und v_1, v_2 unabhängig von z, so reduziert sich rot $\mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{0}$ im $\mathbb{R}^2$ auf $v_{2x} = v_{1y}$.

1. Möglichkeit zur Berechnung eines zugehörigen Potentials

Für einen allgemeinen Beweis des Satzes 13-6 sei auf die Literatur verwiesen. Hier wird nur ein konstruktiver Beweis für den Spezialfall geführt, dass $G \subset \mathbb{R}^3$ einen Quader mit achsenparallelen Seiten beschreibt.

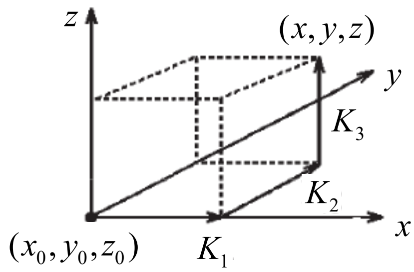
Sei $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)^T \in G$ fest und $\mathbf{x} = (x,y,z)^T \in G$ beliebig. Wir berechnen das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ entlang des folgenden Weges von $\mathbf{x}_0$ nach $\mathbf{x}$.

$$K = K_1 + K_2 + K_3, \qquad d\mathbf{x} = \mathbf{g}'(t)dt$$

$$K_1 = \left\{(t, y_0, z_0)^T : \ x_0 \le t \le x\right\} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x} = (1,0,0)^T dt$$

$$K_2 = \left\{(x, t, z_0)^T : \ y_0 \le t \le y\right\} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x} = (0,1,0)^T dt$$

$$K_3 = \left\{(x, y, t)^T : \ z_0 \le t \le z\right\} \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{x} = (0,0,1)^T dt$$



Dann erhält man für das Kurvenintegral entlang K

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_{K_1} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{K_2} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \int_{K_3} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

$$= \int_{x_0}^{x} v_1(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} v_2(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} v_3(x, y, t)\,dt.$$

Nun zeigen wir, dass die Funktion $\varphi(\mathbf{x})$ Potential von $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ist, falls rot $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ auf G gilt.

$$\varphi_x(x, y, z) = v_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} v_{2x}(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} v_{3x}(x, y, t)\,dt$$

da $v_{2x} = v_{1y}$ und $v_{3x} = v_{1z}$ $\left(\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) = 0\right)$

$$\varphi_x(x, y, z) = v_1(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} v_{1y}(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} v_{1z}(x, y, t)\,dt$$

$$= v_1(x, y_0, z_0) + v_1(x, y, z_0) - v_1(x, y_0, z_0) + v_1(x, y, z) - v_1(x, y, z_0)$$

$$\Rightarrow \ \varphi_x(x, y, z) = v_1(x, y, z) \ \ \forall \mathbf{x} \in G.$$

$$\varphi_y(x, y, z) = v_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} v_{3y}(x, y, t)\,dt$$

$$= v_2(x, y, z_0) + \int_{z_0}^{z} v_{2z}(x, y, t)\,dt, \quad \text{da } \ v_{3y} = v_{2z} \ \left(\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) = 0\right)$$

$$= v_2(x, y, z_0) + v_2(x, y, z) - v_2(x, y, z_0) = v_2(x, y, z) \ \ \forall \mathbf{x} \in G.$$

$$\varphi_z(x, y, z) = v_3(x, y, z) \ \ \forall \mathbf{x} \in G.$$

$$\Rightarrow \ \operatorname{grad} \varphi(x, y, z) = \mathbf{v}(x, y, z) \ \text{ auf } \ G.$$

Also ist die Funktion

$$\varphi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} v_1(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} v_2(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} v_3(x, y, t)\,dt$$

Potential von $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ auf G.

Beispiel:

$$\mathbf{v}(x,y,z)=\left(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z)\right)^T=(2xy,x^2+2ye^z,y^2e^z)^T.$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(x,y,z)=(v_{3y}-v_{2z},v_{1z}-v_{3x},v_{2x}-v_{1y})^T$$
$$=(2ye^z-2ye^z,0-0,2x-2x)^T=\mathbf{0}\quad\text{auf } \mathbb{R}^3.$$

Der $\mathbb{R}^3$ ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\Rightarrow$ es existiert für $\mathbf{v}$ ein Potential φ auf $\mathbb{R}^3$ mit

$$\varphi(x,y,z)=\int_0^x v_1(t,0,0)\,dt+\int_0^y v_2(x,t,0)\,dt+\int_0^z v_3(x,y,t)\,dt$$
$$=\int_0^x 0\,dt+\int_0^y (x^2+2t)\,dt+\int_0^z y^2e^t\,dt=x^2y+y^2+y^2e^z-y^2,$$

wobei $\mathbf{x}_0=\mathbf{0}\in G=\mathbb{R}^3$ gewählt wurde.

$\Rightarrow\ \varphi(x,y,z)=x^2y+y^2e^z+c,\quad c\in\mathbb{R},$ ist Potential von $\mathbf{v}$ auf $\mathbb{R}^3$.

2. Möglichkeit zur Berechnung eines zugehörigen Potentials

Es muss gelten

$$\varphi_x(x,y,z)=v_1(x,y,z)\ \Rightarrow\ \varphi(x,y,z)=\int v_1(x,y,z)\,dx+h(y,z)$$
$$=F(x,y,z)+h(y,z),$$

wobei die Funktion h die von y und z abhängige Integrationskonstante bezeichnet die noch zu bestimmen ist. Ferner muss gelten

$$\varphi_y(x,y,z)=v_2(x,y,z)\ \Rightarrow\ \varphi_y(x,y,z)=F_y(x,y,z)+h_y(y,z)=v_2(x,y,z)$$

$$\Rightarrow\ h_y(y,z)=v_2(x,y,z)-F_y(x,y,z)=G(y,z)$$

$$\Rightarrow\ h(y,z)=\int G(y,z)dy+g(z)=H(y,z)+g(z).$$

Hier ist die noch zu bestimmende Integrationskonstante g nur noch von z abhängig. Abschließend muss gelten

$$\varphi_z(x,y,z)=v_3(x,y,z)\ \Rightarrow\ \varphi_z(x,y,z)=F_z(x,y,z)+H_z(y,z)+g'(z)=v_3(x,y,z),$$

woraus sich g und anschließend φ bestimmen lässt.

Beispiel:

$$\mathbf{v}(x,y,z)=\left(v_1(x,y,z),v_2(x,y,z),v_3(x,y,z)\right)^T=(2xy,x^2+2ye^z,y^2e^z)^T.$$

$$\varphi(x,y,z)=\int v_1(x,y,z)\,dx+h(y,z)=\int 2xy\,dx+h(y,z)=x^2y+h(y,z),$$

$$\varphi_y(x,y,z)=x^2+h_y(y,z)=v_2(x,y,z)=x^2+2ye^z,$$

$$\Rightarrow\ h_y(y,z)=2ye^z\ \Rightarrow\ h(y,z)=\int 2ye^z dy+g(z)=y^2e^z+g(z),$$

$$\Rightarrow\ \varphi(x,y,z)=x^2y+y^2e^z+g(z),$$

$$\varphi_z(x,y,z)=y^2e^z+g'(z)=v_3(x,y,z)=y^2e^z,$$

$$\Rightarrow\ g'(z)=0\ \Rightarrow\ g(z)=c,$$

$$\Rightarrow\ \varphi(x,y,z)=x^2y+y^2e^z+c,\quad c\in\mathbb{R},\ \text{ ist Potential von } \mathbf{v} \text{ auf } \mathbb{R}^3.$$

3. Möglichkeit zur Berechnung eines zugehörigen Potentials

Es muss gelten

$$\varphi_x(x,y,z)=v_1(x,y,z)\ \Rightarrow\ \varphi(x,y,z)=\int v_1(x,y,z)\,dx+h_1(y,z)$$
$$=F_1(x,y,z)+h_1(y,z),$$
$$\varphi_y(x,y,z)=v_2(x,y,z)\ \Rightarrow\ \varphi(x,y,z)=\int v_2(x,y,z)\,dy+h_2(x,z)$$
$$=F_2(x,y,z)+h_2(x,z),$$
$$\varphi_z(x,y,z)=v_3(x,y,z)\ \Rightarrow\ \varphi(x,y,z)=\int v_3(x,y,z)\,dz+h_3(x,y)$$
$$=F_3(x,y,z)+h_3(x,y),$$

mit den unbekannten Funktionen h_1, h_2 und h_3.

Alle Terme des Potentials φ, die von x, y oder z abhängig sind, müssen in F_1, F_2, F_3 auftreten, denn würde ein von x abhängiger Term fehlen, so kann dieser Term nicht in der unbekannten Funktion $h_1(y,z)$ stecken, da diese von x unabhängig ist. Also muss dieser Term in F_1 enthalten sein. Analog argumentiert man für die Terme, die von y oder z abhängig sind.

Beispiel:

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \left(v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z)\right)^T = (2xy, x^2 + 2ye^z, y^2e^z)^T.$$

$$\varphi(x,y,z) = \int v_1(x,y,z)\,dx + h_1(y,z)$$
$$= \int 2xy\,dx + h_1(y,z) = x^2 y + h_1(y,z),$$

$$\varphi(x,y,z) = \int v_2(x,y,z)\,dy + h_2(x,z)$$
$$= \int (x^2 + 2ye^z)\,dy + h_2(x,z) = x^2 y + y^2 e^z + h_2(x,z),$$

$$\varphi(x,y,z) = \int v_3(x,y,z)\,dz + h_3(x,y)$$
$$= \int y^2 e^z\,dz + h_3(x,y) = y^2 e^z + h_3(x,y),$$

$\Rightarrow\ \varphi(x,y,z) = x^2 y + y^2 e^z + c, \quad c \in \mathbb{R},$ ist Potential von $\mathbf{v}$ auf $\mathbb{R}^3$.

Definition 13-7:
Sei $\mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, $D(\mathbf{v}) = G$ ein Gebiet und $\mathbf{v} \in C(G)$. Sind $P_1, P_2 \in G$ zwei verschiedene Punkte und hat das Integral $\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ für alle stückweise glatten Verbindungskurven von P_1 nach P_2, die ganz in G verlaufen, denselben Wert, so heißt $\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ wegunabhängig.

Satz 13-7:
Es sei $\mathbf{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld, $D(\mathbf{v}) = G$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $\mathbf{v} \in C^1(G)$, dann gilt

$\mathbf{v}$ besitzt auf G ein Potential $\quad\Leftrightarrow\quad \int\limits_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ ist in G wegunabhängig

Beweis:
"$\Rightarrow$": Sei $\mathbf{v} =$ grad φ,

$$\Rightarrow \quad v_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}),\ i = 1,\ldots,n \ \text{ für alle } \mathbf{x} \in G$$

Ferner sei $K = \{\mathbf{x} \in G: \quad \mathbf{x} = \mathbf{g}(t),\ a \le t \le b\}$ stückweise glatt und $P_1 = \mathbf{g}(a)$, $P_2 = \mathbf{g}(b)$. Dann gilt

$$\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \int_a^b \mathbf{v}\big(\mathbf{g}(t)\big) \cdot \frac{d\mathbf{g}(t)}{dt} dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi\big(\mathbf{g}(t)\big)}{\partial x_i} \frac{dg_i(t)}{dt} \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d\varphi\big(\mathbf{g}(t)\big)}{dt} dt = \varphi\big(\mathbf{g}(b)\big) - \varphi\big(\mathbf{g}(a)\big) = \varphi(P_2) - \varphi(P_1),$$

also hängt $\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ nur von den Werten von φ an den Endpunkten von K ab, ist also wegunabhängig.

"$\Leftarrow$": Ist umgekehrt das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ in G wegunabhängig, so lässt sich ein Potential konstruktiv angeben. Sei $P_0 \in G$ fest und K eine stückweise glatte Kurve von P_0 nach $P = \mathbf{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$:

$$K = \{\mathbf{x} \in G: \ \mathbf{x} = \mathbf{g}(t),\ a \le t \le b\}, \quad \mathbf{g}(a) = P_0,\ \mathbf{g}(b) = P.$$

Dann ist

$$\varphi(\mathbf{y}) := \int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} =: \int_{P_0}^{P} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$$

ein Potential von $\mathbf{v}$, denn wegen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals in G hängt φ nur vom Endpunkt P von K ab, ist also eindeutig und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = \lim_{h \to 0} \frac{\varphi(y_1 ..., y_i + h, ..., y_n) - \varphi(\mathbf{y})}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\int_{P_0}^{P^*} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} - \int_{P_0}^{P} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \right)$$

mit $\quad P^* = \big(y_1, ..., y_{i-1}, y_i + h, y_{i+1}, ..., y_n\big) = \mathbf{y}^*.$

Erneutes Ausnutzen der Wegunabhängigkeit, d.h.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_i} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_P^{P^*} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 v_i(y_1, ..., y_i + th, ..., y_n)\, dt$$

da $\quad \overline{\mathrm{PP}^*} = \{\mathbf{x} = (y_1, ..., y_{i-1}, y_i + th, y_{i+1}, ..., y_n): \ 0 \le t \le 1\},$

und Anwenden des Mittelwertsatz, d.h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} v_i(y_1,\ldots,y_i+\tau h,\ldots,y_n) \quad \text{mit } 0\le\tau\le 1,$$

liefert, da $\mathbf{v} \in C(G)$, die Existenz des Grenzwertes mit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i} = v_i(y_1,\ldots,y_i,\ldots,y_n) \quad \text{für } 1\le i\le n.$$

Anmerkung:

Folglich gilt, falls φ Potential von $\mathbf{v}$

$$\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \varphi(P_2)-\varphi(P_1),$$

wobei K eine beliebige von P_1 nach P_2 ganz in G verlaufende stückweise glatte Kurve bezeichnet. Ist K eine geschlossene Kurve, so gilt

$$\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = 0.$$

Beispiel:

Es sei $\mathbf{v} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)^T$

a) $G=\{(x,y)^T : x>0\}$, G ist einfach zusammenhängend

$$\varphi(x,y) = \arctan\left(y/x\right)$$

ist in G ein Potential, vgl. Beispiel auf S. 13-18,
Also ist in G das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ wegunabhängig oder das Kurvenintegral von $\mathbf{v}$ über jede geschlossene Kurve in G Null.

b) $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$, G nicht einfach zusammenhängend, da sich die einfach geschlossene Kurve $K = \{(x,y)^T = (\cos t, \sin t), 0 \le t \le 2\pi\}$ nicht auf einen Punkt von G zusammenziehen lässt. Es gilt

$$\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi}\left\{(-\sin t)(-\sin t)+\cos t\cdot\cos t\right\}dt = 2\pi \ne 0$$

13.4 Flächeninhalt und Oberflächenintegral

Mit Hilfe des in Kapitel 9 definierten Riemann-Integrals lassen sich Flächeninhalte von Mengen des $\mathbb{R}^2$ und Rauminhalte von Mengen des $\mathbb{R}^3$ bestimmen. Es soll nun erklärt werden, wie der Inhalt einer "krummen Fläche" im $\mathbb{R}^3$ definiert und bestimmt werden kann.

Definition 13-8:

Sei $\mathbf{g} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{g}(u,v) = (g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v))^T$, so heißt

$$F = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3: \quad x = g_1(u,v),\, y = g_2(u,v),\, z = g_3(u,v),\; (u,v)^T \in D\right\}$$

Fläche im $\mathbb{R}^3$, $(\mathbf{g},D)$ Parameterdarstellung von F und D Parameterbereich. Ist $\mathbf{g} \in C^1(D)$ und gilt $\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v \neq \mathbf{0}$ in D, d.h. $\mathbf{g}_u$ und $\mathbf{g}_v$ sind linear unabhängig in D, so heißt F eine glatte Fläche.

Eine Approximation des "anschaulichen Flächeninhalts" von F lässt sich nun durch Approximation von F durch Parallelogramme vornehmen. Dazu wählt man eine Zerlegung $Z = \{D_{k,l}\}$ von D die eine Zerlegung von

$$F = \bigcup\nolimits_{k,l} F_{k,l} \quad \text{mit} \quad F_{k,l} = \mathbf{g}(D_{k,l})$$

induziert. Anschließend wird $F_{k,l}$ durch das Parallelogramm $T_{k,l}$ ersetzt, das auf der Tangentialebene von F in $\mathbf{g}(u_{k-1},v_{l-1})$ liegt und die Seiten

$$\mathbf{g}_u(u_{k-1},v_{l-1})\,(u_k - u_{k-1}) \text{ und } \mathbf{g}_v(u_{k-1},v_{l-1})\,(v_l - v_{l-1})$$

besitzt. Bei genügend feinem Z ist der Flächeninhalt von $T_{k,l}$ eine gute Approximation von $\mu(F_{k,l})$ und daher $\sum_{k,l} \mu(T_{k,l})$ für $\mu(F)$. Mit

$$\mu(T_{k,l}) = \left\|\mathbf{g}_u(u_{k-1}, v_{l-1}) \times \mathbf{g}_v(u_{k-1}, v_{l-1})\right\|(u_k - u_{k-1})(v_l - v_{l-1})$$

gilt also

$$\mu(F) \cong \sum\nolimits_{k,l} \left\|\mathbf{g}_u(u_{k-1}, v_{l-1}) \times \mathbf{g}_v(u_{k-1}, v_{l-1})\right\|(u_k - u_{k-1})(v_l - v_{l-1}).$$

Dies ist eine Riemann-Summe, deren Grenzwert (sofern konvergent)

$$\int_D \left\|\mathbf{g}_u(u,v) \times \mathbf{g}_v(u,v)\right\| d(u,v)$$

ein wohl definiertes Bereichsintegral im $\mathbb{R}^2$ darstellt.

Definition 13-9:

Sei F Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit der Parameterdarstellung $(\mathbf{g},D)$. Dann heißt

$$\mu(F)=\int_F d\sigma=\int_D \|\mathbf{g}_u(u,v)\times\mathbf{g}_v(u,v)\|\,d(u,v)$$

der Oberflächeninhalt von F.

Für eine Fläche der speziellen Art

$$F=\left\{(x,y,z)^T=\mathbf{g}(u,v)=\big(u,v,h(u,v)\big)^T,\ (u,v)\in D\right\}$$

erhält man

$$\mu(F)=\int_F d\sigma=\int_D \sqrt{1+h_u^2(u,v)+h_v^2(u,v)}\,d(u,v),$$

da

$$\mathbf{g}_u=\big(1,0,h_u(u,v)\big)^T,\ \mathbf{g}_v=\big(0,1,h_v(u,v)\big)^T$$

und

$$\mathbf{g}_u\times\mathbf{g}_v=(-h_u,-h_v,1)^T.$$

Beispiel:

Sei $D=\{(u,v)^T:\ 0<u<R,\ 0<v<2\pi\}$ für festes $R>0$,

$$F=\left\{(x,y,z)^T=\left(u\cos v,u\sin v,\sqrt{R^2-u^2}\right)^T,\ (u,v)^T\in D\right\}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{g}_u=\left(\cos v,\sin v,\frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2}}\right)^T,\quad \mathbf{g}_v=\big(-u\sin v,u\cos v,0\big)^T$$

$$\mathbf{g}_u\times\mathbf{g}_v=\left(\frac{u^2\cos v}{\sqrt{R^2-u^2}},\frac{u^2\sin v}{\sqrt{R^2-u^2}},u\right)^T=\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2}}\left(u\cos v,u\sin v,\sqrt{R^2-u^2}\right)^T$$

$$\|\mathbf{g}_u\times\mathbf{g}_v\|=\frac{Ru}{\sqrt{R^2-u^2}}$$

$$\Rightarrow\ \int_F d\sigma=\int_D\frac{Ru}{\sqrt{R^2-u^2}}\,d(u,v)=R\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^R\frac{u}{\sqrt{R^2-u^2}}\,du\right\}dv=2\pi R\left(-\sqrt{R^2-u^2}\right)\Big|_0^R$$

$$=2\pi R^2$$

Da nun bekannt ist, was unter dem Inhalt einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ zu verstehen ist, lässt sich das Integral einer Funktion über eine solche Fläche definieren und auf ein Bereichsintegral über den Parameterbereich zurückführen.

Es sei nun F eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Parameterbereich D, d.h.

$$F = \left\{ (x, y, z)^T = \mathbf{g}(u, v),\ (u, v)^T \in D \right\},$$

und $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mindestens auf F definiert. Eine Zerlegung Z von D induziert wieder eine Zerlegung von

$$F = \bigcup_k F_k, \quad \text{mit } F_k = \mathbf{g}\left(D_k\right),$$

wobei ∂F_k jeweils stückweise glatt sei. Weiter sei

$$(x_k, y_k, z_k)^T \in F_k \text{ und } (x_k, y_k, z_k)^T = \mathbf{g}(u_k, v_k).$$

Bildet man zur Zerlegung Z die Riemann-Summe von f über F, d.h.

$$R(f, Z) = \sum_k f(x_k, y_k, z_k) \mu(F_k),$$

so gilt mit der Definition von $\mu(F_k)$

$$R(f, Z) = \sum_k f\left(\mathbf{g}(u_k, v_k)\right) \int_{D_k} \left\| \mathbf{g}_u(u, v) \times \mathbf{g}_v(u, v) \right\| d(u, v)$$

und nach dem Mittelwertsatz mit geeignetem $(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k)^T \in M_k$ schließlich

$$R(f, Z) = \sum_k f\left(\mathbf{g}(u_k, v_k)\right) \left\| \mathbf{g}_u(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \times \mathbf{g}_v(\tilde{u}_k, \tilde{v}_k) \right\| \mu(D_k),$$

die sofern konvergent gegen den Grenzwert

$$\int_D f\left(\mathbf{g}(u, v)\right) \left\| \mathbf{g}_u(u, v) \times \mathbf{g}_v(u, v) \right\| d(u, v)$$

konvergieren.

Definition 13-10:

Es sei F eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung $(\mathbf{g}, D)$ und f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine auf F stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_F f(x, y, z)\, d\sigma = \int_D f\left(\mathbf{g}(u, v)\right) \left\| \mathbf{g}_u(u, v) \times \mathbf{g}_v(u, v) \right\| d(u, v)$$

das Oberflächenintegral (1. Art) von f über F bzgl. der Darstellung $(\mathbf{g}, D)$.

Ist D messbar, so existiert das Integral unter den genannten Voraussetzungen.

Beispiel:
Es sei

$$D=\left\{(u,v)^T:\ u^2+v^2\le 2\right\},\ \mathbf{g}(u,v)=(u,v,2-u^2-v^2)^T,\ f(x,y,z)=x^2+y^2$$

und $\quad F=\left\{(x,y,z)^T=\mathbf{g}(u,v),\ (u,v)^T\in D\right\}.$

F ist das Oberflächenstück des nach unten geöffneten und oberhalb der (x,y)-Ebene liegenden Rotationsparaboloids mit Scheitel in (0,0,2) und Achsenabschnitten bei $x=\pm\sqrt{2}=y$.

Der Oberflächeninhalt von F ist

$$\int_F d\sigma=\int_D\sqrt{1+4u^2+4v^2}\,d(u,v)=\int_{\tilde{D}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,d(r,\varphi)$$

Polarkoordinaten: $\tilde{D}=\left\{(r,\varphi)^T:\ 0\le r\le\sqrt{2},\,0\le\varphi\le 2\pi\right\}$

$$\int_F d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,dr\,d\varphi=2\pi\frac{1}{12}\left(1+4r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{3}\pi$$

und für das Oberflächenintegral von f über F erhält man

$$\int_F f(x,y,z)\,d\sigma=\int_D(u^2+v^2)\sqrt{1+4u^2+4v^2}\,d(u,v)$$

$$=\int_{\tilde{D}}r^2\sqrt{1+4r^2}\,r\,d(r,\varphi)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+4r^2}\,dr\,d\varphi$$

$$=2\pi\int_1^3\frac{\rho^2-1}{4}\rho^2\frac{1}{4}d\rho=\frac{\pi}{8}\left(\frac{3^5}{5}-\frac{1}{5}-\frac{3^3}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{149}{30}\pi$$

$$\left(\text{mit } \rho=\sqrt{1+4r^2}\Leftrightarrow r^2=\frac{\rho^2-1}{4},\quad d\rho=\frac{4r}{\sqrt{1+4r^2}}dr\right).$$

In den Anwendungen ist f oft das Skalarprodukt eines Vektorfeldes $\mathbf{v}$ mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$ von F, d.h.

$$f(x,y,z)=f\left(\mathbf{g}(u,v)\right)=\mathbf{v}\left(\mathbf{g}(u,v)\right)\cdot\mathbf{n}(u,v),$$

wobei die Richtung von $\mathbf{n}$ (da F orientierbar, gibt es auf F zwei Normalenvektoren, die sich durch ihr Vorzeichen unterscheiden) Einfluss auf das Vorzeichen nimmt.

Definition 13-11:
Ist $\mathbf{v}:\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ein Vektorfeld, das auf der Fläche F im $\mathbb{R}^3$ mit der Parameterdarstellung $(\mathbf{g},D)$ und D messbar stetig ist, so heißt

$$\begin{aligned}\int_F \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma &= \int_D \mathbf{v}\left(\mathbf{g}(u,v)\right)\cdot\mathbf{n}(u,v)\left\|\mathbf{g}_u(u,v)\times\mathbf{g}_v(u,v)\right\|d(u,v)\\ &= \int_D \mathbf{v}\left(\mathbf{g}(u,v)\right)\cdot\left(\mathbf{g}_u(u,v)\times\mathbf{g}_v(u,v)\right)d(u,v)\end{aligned}$$

der Fluss des Vektorfeldes $\mathbf{v}$ durch die Fläche F in Richtung $\mathbf{n}$.

Ist $\mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, so stellt $\int_F \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ die pro Zeiteinheit durch F in Richtung $\mathbf{n}$ durchtretende Flüssigkeitsmenge dar, deshalb die Bezeichnung Fluss. Denn durch ein kleines Flächenele-

ment $d\sigma$ fließt in der Zeit dt die Flüssigkeitsmenge eines Volumenelementes der Grundfläche $d\sigma$ und Höhe $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dt$. Summation der infinitesimalen Volumenelemente $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma\,dt$ liefert nach Bezug auf die Zeiteinheit das genannte Ergebnis.

Beispiel:
Man bestimme den Fluss ϕ des elektrischen Feldes der Verschiebungsdichte

$$\mathbf{v}=-C\,\mathrm{grad}\left(1/r\right),\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

durch die Kugeloberfläche

$$F=\left\{(x,y,z)^T:\ x^2+y^2+z^2=R^2\right\}$$

nach außen. Es gilt

$$\phi=\int_F \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma,$$

wobei $\mathbf{n}$ den nach außen weisenden Normalenvektor der Kugeloberfläche F bezeichnet. Mit der Parameterdarstellung von F gemäß

$$F = \left\{ (x,y,z)^T = (R\cos u \cos v, R\sin u \cos v, R\sin v)^T,\ (u,v)^T \in D \right\}$$

$$\text{mit } D = \left\{ (u,v)^T :\ 0 \le u \le 2\pi,\ |v| \le \pi/2 \right\}$$

folgt

$$\mathbf{g}_u = (-R\sin u \cos v, R\cos u \cos v, 0)^T$$

$$\mathbf{g}_v = (-R\cos u \sin v, -R\sin u \sin v, R\cos v)^T$$

$$\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v = R^2(\cos u \cos^2 v, \sin u \cos^2 v, \cos v \sin v)^T$$

$$= R\cos v\, \mathbf{g}(u,v) \quad \text{(weist nach außen)}$$

$$\|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v\| = R^2 \cos v \qquad \text{für } |v| \le \pi/2.$$

und damit

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v}{\|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v\|} = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)^T.$$

Mit der Verschiebungsdichte im $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}(x,y,z) = -C\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)^T$$

$$= C\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right)^T$$

und auf F

$$\mathbf{v}\big(\mathbf{g}(u,v)\big) = \frac{C}{R^3}\begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\sin u \cos v \\ R\sin v \end{pmatrix} = \frac{C}{R^2}\begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

ergibt sich der Fluss zu

$$\int_F \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma = \int_D \frac{C}{R^2} R^2 \cos v\, d(u,v) = C\int_D \cos v\, d(u,v) = C\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\, dv\, du = 4\pi C$$

und der bemerkenswerterweise nicht von R abhängt.

13.5 Integralsätze

Wir kommen nun zu den für die Anwendung sehr wichtigen Integralsätzen, bei denen Beziehungen zwischen

a) Bereichsintegral im $\mathbb{R}^2$ und zugehörigem Randkurvenintegral (Satz von Green),

b) Flächenintegral im $\mathbb{R}^3$ und zugehörigem Randkurvenintegral (Satz von Stokes),

c) Volumenintegral im $\mathbb{R}^3$ und zugehörigem Oberflächenintegral (Satz von Gauß)

hergestellt werden.

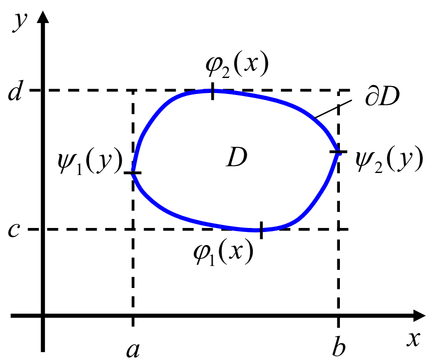
13.5.1 Integralsatz von Green

Der Greensche Integralsatz liefert eine Beziehung zwischen dem Bereichsintegral über einen messbaren Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$ und dem Kurvenintegral über ∂D.

<u>**Satz 13-8**</u>: *(Integralsatz von Green)*
Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offen, $D \subset M$ ein Normalbereich mit positiv orientiertem Rand ∂D, d.h. beim Durchlaufen von ∂D liegt das Innere von D links.
Weiter sei $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$ ein Vektorfeld mit $\mathbf{v} \in C^1(M)$. Dann gilt

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial D} (v_1\, dx + v_2\, dy) = \int_D \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) d(x,y)$$

<u>*Beweis*</u>:
∂D kann in die Kurve K_1 entlang φ_1 von $a \to b$ und K_2 entlang φ_2 von $b \to a$ aufgeteilt werden.



Parameterdarstellung von

$$K_1 = \left\{ \left(x, \varphi_1(x)\right)^T : \; a \le x \le b \right\}$$

$$K_2 = \left\{ \left(x, \varphi_2(a+b-x)\right)^T : \; a \le x \le b \right\}$$

Für das Vektorfeld $\mathbf{v} = (v_1, 0)^T$ folgt dann

$$\int_D \frac{\partial v_1}{\partial y} d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial v_1}{\partial y} dy\, dx = \int_a^b \big(v_1(x,\varphi_2(x)) - v_1(x,\varphi_1(x)) \big) dx$$

$$= -\int_b^a v_1(x,\varphi_2(x))\, dx - \int_a^b v_1(x,\varphi_1(x))\, dx$$

$$= -\int_{K_1} v_1(x,y) dx - \int_{K_2} v_1(x,y) dx = -\int_{\partial D} v_1(x,y) dx$$

Analog erhält man für das Vektorfeld $\mathbf{v} = (0,v_2)^T$

$$\int_D \frac{\partial v_2}{\partial x} d(x,y) = \int_{\partial D} v_2(x,y) dy.$$

Zusammen folgt daraus dann die Behauptung.

Anmerkung:
Mit Hilfe von Satz 13-4 kann gezeigt werden, dass Satz 13-8 auch dann noch gilt, wenn D in endlich viele Normalbereiche zerlegbar ist und ∂D

immer so durchlaufen wird, dass D links liegt. Einen solchen Bereich nennt man Greenschen Bereich

Beweisidee:
M durch Schnitte in Normalbereiche zerlegen auf die Satz 13-8 anwendbar ist. Summation gemäß Satz 13-4 liefert dann die Behauptung.

Beispiel:

1) $D = \{(x,y)^T : x^2 + y^2 \le 1\}$ (Kreisfläche, D ist Greenscher Bereich)

$$\mathbf{v}(x,y) = (-e^x \cos y, e^x \sin y)^T$$

$$\partial D = \left\{ (x,y)^T = (\cos t, \sin t)^T,\ 0 \le t \le 2\pi \right\}$$

$$\int_{\partial D} (v_1\, dx + v_2\, dy) = \int_0^{2\pi} \left(e^{\cos t} \left(\cos(\sin t)\sin t + \sin(\sin t)\cos t \right) \right) dt$$

$$= \int_D (e^x \sin y - e^x \sin y)\, d(x,y) = 0.$$

2) Sei $\mathbf{v} = (v_1,v_2)^T = (-y,x)^T$ und D Greenscher Bereich, dann gilt

$$\int_{\partial D} (v_1\,dx + v_2\,dy) = -\int_{\partial D} (y\,dx - x\,dy) = \int_D (v_{2x} - v_{1y})\,d(x,y) = 2\int_D d(x,y)$$

$$\Rightarrow \quad \mu(D) = \int_D d(x,y) = -\frac{1}{2}\int_{\partial D} (y\,dx - x\,dy).$$

Als Folgerung aus Satz 13-8 werden im folgenden Satz die Greenschen Formeln für den $\mathbb{R}^2$ angegeben, die bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen Anwendung finden.

Satz 13-9: *(Greensche Formeln)*

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ offen, $D \subset M$ in endlich viele Normalbereiche zerlegbar und ∂D der positiv orientierte Rand von D (d.h. D links). Ferner seien p,q : $M \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen mit $p,q \in C^2(M)$. Dann gilt

1. Greensche Formel

$$\int_D (p\Delta q + p_x q_x + p_y q_y)\,d(x,y) = \int_{\partial D} (-pq_y\,dx + pq_x\,dy),$$

2. Greensche Formel

$$\int_D (p\Delta q - q\Delta p)\,d(x,y) = \int_{\partial D} \Big((qp_y - pq_y)\,dx - (qp_x - pq_x)\,dy\Big),$$

wobei $\Delta p = p_{xx} + p_{yy}$, $\Delta q = q_{xx} + q_{yy}$.

Beweis:

a) Es gilt $(pq_x)_x = p_x q_x + pq_{xx}$, $(pq_y)_y = p_y q_y + pq_{yy}$.

Mit $\mathbf{v} = (pq_y,-pq_x)^T \in C^1(M)$ liefert Satz 13-8

$$-\int_D (p_x q_x + pq_{xx} + p_y q_y + pq_{yy})\,d(x,y) = \int_{\partial D} (pq_y\,dx - pq_x\,dy)$$

$\Rightarrow$ 1. Greensche Formel

b) Vertauschung von p und q liefert analog

$$-\int_D (p_x q_x + q p_{xx} + p_y q_y + q p_{yy})\, d(x,y) = \int_{\partial D} (q p_y\, dx - q p_x\, dy)$$

Subtraktion der letzten Formel von der ersten liefert

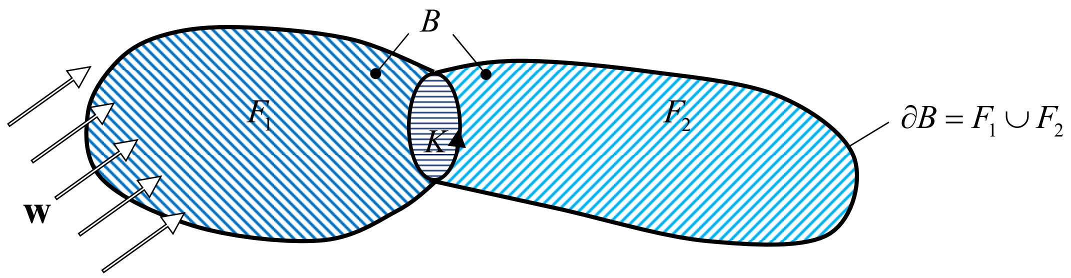
$$-\int_D (p\,\Delta q - q\,\Delta p)\, d(x,y) = \int_{\partial D} \Big((p q_y - q p_y)\, dx - (p q_x - q p_x)\, dy \Big)$$

$\Rightarrow$ 2. Greensche Formel

13.5.2 Integralsatz von Stokes

Der Stokessche Integralsatz verknüpft das Integral über ein Flächenstück $F \subset \mathbb{R}^3$ mit dem Kurvenintegral über ∂F. Durch die folgende strömungsmechanische Überlegung wird er plausibel.

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ ein Körper mit der glatten Oberfläche ∂B, die in zwei Teilflächen F_1 und F_2 mit gemeinsamer Randkurve K zerlegt ist.



Ferner sei $\mathbf{w}$ das quellenfreie Geschwindigkeitsfeld einer räumlichen Strömung, d.h. $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$. Dann muss die durch F_1 in B einfließende Flüssigkeitsmenge gleich der durch F_2 austretenden sein. Verformt man F_2 bei konstantem F_1, so muss die Flüssigkeitsmenge trotzdem konstant bleiben. Der Massenfluss einer quellen- und senkenfreien Strömung durch eine Fläche F hängt somit nicht von der speziellen Form von F, sondern von der Begrenzung, dem Rand von F ab, hier von der Kurve K.

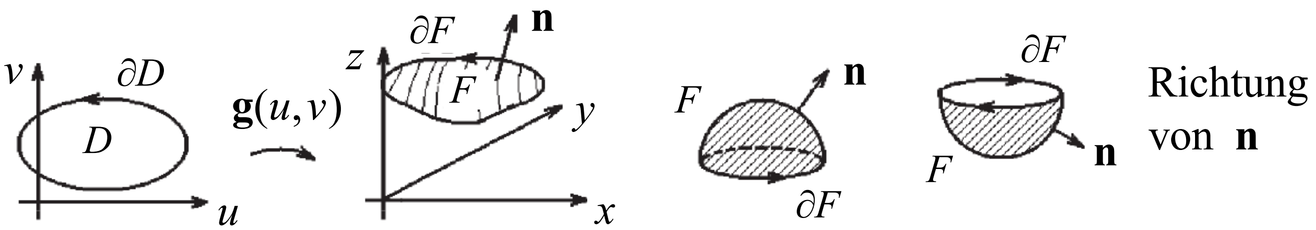
Anmerkung:

Für $\mathbf{v} \in C^2(M)$, $M \subset \mathbb{R}^3$ gilt $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{v}) = \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ mit $\mathbf{w} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, vgl. Satz 13-1 3a),

Satz 13-10: *(Integralsatz von Stokes)*
Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{v} \in C^1(M)$ und F eine in M enthaltene Fläche mit der Parameterdarstellung $(\mathbf{g}, D)$, wobei $\mathbf{g} \in C^2(D)$ und D Greenscher Bereich. Ferner sei ∂F die positiv orientierte Randkurve von F (F links) und $\mathbf{n}$ derjenige Normalenvektor auf F, der mit ∂F der Rechtsschraubenregel genügt. Dann gilt

$$\int_F \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_{\partial F} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} = \int_{\partial F} (v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz).$$

Beweis:



Es sei $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T = \mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v / \|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v\|$,

$$\partial D = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{h}(t),\ a \le t \le b \right\} \Rightarrow \partial F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{g}(u,v) = \mathbf{g}\big(h_1(t), h_2(t)\big),\ a \le t \le b \right\}$$

und $\tilde{v}_1(u,v) := v_1\big(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)\big)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\partial F} v_1\, dx &= \int_a^b \tilde{v}_1\big(h_1(t), h_2(t)\big) \frac{d}{dt} g_1\big(h_1(t), h_2(t)\big) dt \\
&= \int_a^b \tilde{v}_1\big(h_1(t), h_2(t)\big) \left(\frac{\partial g_1\big(h_1(t), h_2(t)\big)}{\partial u} \frac{dh_1}{dt} + \frac{\partial g_1\big(h_1(t), h_2(t)\big)}{\partial v} \frac{dh_2}{dt} \right) dt \\
&= \int_{\partial D} \left\{ \tilde{v}_1(u,v) \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u} du + \tilde{v}_1(u,v) \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v} dv \right\} \\
&= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\tilde{v}_1(u,v) \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\tilde{v}_1(u,v) \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u} \right) \right) d(u,v),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Greensche Integralsatz ausgenutzt wurde. Für den Integranden

$$p(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\left(v_1 \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(v_1 \frac{\partial g_1(u,v)}{\partial u} \right)$$

folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} p(u,v) &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial u} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial u} \right)\frac{\partial g_1}{\partial v} + v_1 \frac{\partial^2 g_1}{\partial v \partial u} \\ &\qquad - \left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial v} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial v} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial g_3}{\partial v} \right)\frac{\partial g_1}{\partial u} - v_1 \frac{\partial^2 g_1}{\partial u \partial v} \\ &= -\left(\frac{\partial g_1}{\partial u}\frac{\partial g_2}{\partial v} - \frac{\partial g_2}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial v} \right)\frac{\partial v_1}{\partial y} + \left(\frac{\partial g_1}{\partial v}\frac{\partial g_3}{\partial u} - \frac{\partial g_3}{\partial v}\frac{\partial g_1}{\partial u} \right)\frac{\partial v_1}{\partial z} \\ &= \left(-n_z \frac{\partial v_1}{\partial y} + n_y \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \left\| \mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v \right\| \end{aligned}$$

und damit

$$\int_{\partial F} v_1\, dx = \int_M \left(-n_z \frac{\partial v_1}{\partial y} + n_y \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \left\| \mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v \right\| d(u,v) = \int_F \left(-n_z \frac{\partial v_1}{\partial y} + n_y \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) d\sigma.$$

Analog erhält man für $\int_{\partial F} v_2\, dy$ und $\int_{\partial F} v_3\, dz$ die Beziehungen

$$\int_{\partial F} v_2\, dy = \int_F \left(-n_x \frac{\partial v_2}{\partial z} + n_z \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) d\sigma \quad \text{und} \quad \int_{\partial F} v_3\, dz = \int_F \left(-n_y \frac{\partial v_3}{\partial x} + n_x \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) d\sigma.$$

Summation dieser drei Gleichungen liefert mit der Definition von $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ und von $\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ die Behauptung.

Beispiel:

Gegeben seien

$$D = \left\{ (u,v)^T : \ u^2 + v^2 \le 4 \right\}, \quad F = \left\{ (x,y,z)^T = \left(u, v, (u^2+v^2)/2 \right)^T, \ (u,v)^T \in D \right\},$$

d.h. ein nach oben geöffneter Rotationsparaboloid mit Scheitel in (0,0,0), und $\mathbf{v} = (3y, -xz, yz^2)^T$.

Gesucht: $\int_F (\operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma$ (**n** mit negativer z-Koordinate)

a) Lösung mit Hilfe des Satzes von Stokes

$$\partial F = \left\{(x,y,z)^T = (2\cos t, -2\sin t, 2)^T,\ 0 \le t \le 2\pi\right\}$$

$$\int_F (\operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\, d\sigma = \int_{\partial F} (3y\,dx - xz\,dy + yz^2 dz)$$

$$= \int_0^{2\pi} \big((-6\sin t)(-2\sin t) - 4\cos t(-2\cos t) + 0\big)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (8 + 4\sin^2 t)\, dt = 20\pi.$$

b) Lösung ohne Anwendung des Satzes von Stokes

$$\mathbf{v} = (3y, -xz, yz^2)^T, \quad \mathbf{g}(u,v) = \big(u, v, (u^2+v^2)/2\big)^T$$

$$\Rightarrow\ \operatorname{rot}\mathbf{v} = (z^2 + x, 0, -z-3)^T = \big((u^2+v^2)^2/4 + u, 0, -(u^2+v^2)/2 - 3\big)^T$$

Aus der Parameterdarstellung $(\mathbf{g},D)$ folgt

$$\mathbf{g}_u = (1,0,u)^T,\ \mathbf{g}_v = (0,1,v)^T,\ \mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v = (-u,-v,1)^T,\ \mathbf{n} = \frac{(u,v,-1)^T}{\sqrt{1+u^2+v^2}},$$

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \big((u^2+v^2)^2/4 + u, 0, -(u^2+v^2)/2 - 3\big)^T \cdot \frac{(u,v,-1)^T}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+u^2+v^2}}\big(u^2 + u(u^2+v^2)^2/4 + (u^2+v^2)/2 + 3\big)$$

und $d\sigma = \|\mathbf{g}_u \times \mathbf{g}_v\|\, d(u,v) = \sqrt{1+u^2+v^2}\, d(u,v)$ folgt

$$\int_F (\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,d\sigma = \frac{1}{4}\int_D (u^5 + 2u^3v^2 + uv^4 + 6u^2 + 2v^2 + 12)\,d(u,v)$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\tilde{D}} \Big(r^5\cos^5 t + 2r^5\cos^3 t\,\sin^2 t + r^5\cos t\,\sin^4 t$$

$$+ 6r^2\cos^2 t + 2r^2\sin^2 t + 12\Big)\,r\,d(r,t)$$

$$= \frac{1}{4}\left(0 + 2\cdot 0 + 0 + 6\pi\cdot\frac{16}{4} + 2\pi\cdot\frac{16}{4} + 24\pi\cdot\frac{4}{2}\right) = 20\pi,$$

wobei $\tilde{D} = \left\{(r,t)^T :\ 0 \le r \le 2,\, 0 \le t \le 2\pi\right\}.$

Mit dem Satz von Stokes lässt sich eine koordinatenfreie Darstellung von $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ gewinnen.

Satz 13-11:
Unter den Voraussetzungen von Satz 13-10 gilt

$$(\operatorname{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})(P) = \lim_{F\to P}\frac{1}{\mu(F)}\int_{\partial F}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}, \qquad (*)$$

wobei $P \in F$ fest und $F \to P$ bedeutet, dass sich F auf den Punkt P zusammenzieht.

Beweis:
Wähle zu gegebenen $P \in \mathbb{R}^3$ eine Fläche F, die P enthält. "Zusammen-ziehen" von F auf P liefert mit Satz 13-10 die Behauptung.

Anmerkung:
Mit $(*)$ hat man die Komponente von $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ in Richtung $\mathbf{n}$. Da $\mathbf{n}$ mit F beliebig wählbar, lässt sich somit $\operatorname{rot}\mathbf{v}$ vollständig beschreiben.

13.5.3 Integralsatz von Gauß

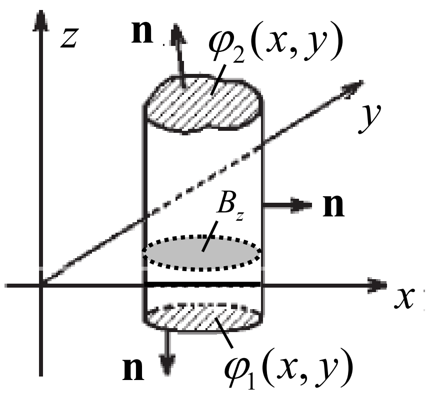
Der Gaußsche Integralsatz liefert eine Beziehung zwischen dem Volumenintegral über einen Körper $B \subset \mathbb{R}^3$ und dem Oberflächenintegral über die Oberfläche ∂B von B.

<u>**Satz 13-12**</u>: *(Integralsatz von Gauß)*
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)^T$ Vektorfeld des $\mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{v} \in C^1(M)$, $B \subset M$ ein Normalbereich und $\mathbf{n}$ der Normalenvektor auf ∂B, der nach außen weist. Dann gilt

$$\int_B \operatorname{div} \mathbf{v}\, d(x,y,z) = \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$$

<u>*Beweis*:</u>
Da B Normalbereich, existieren φ_1, φ_2, und B_z mit

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_z,\ \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y) \right\}.$$



$$F_B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_1(x,y) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_z \right\}.$$

$$F_D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in B_z \right\}.$$

$$\int_B \frac{\partial v_3}{\partial z}\, d(x,y,z) = \int_{B_z} \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z}\, dz \right) d(x,y)$$

$$= \int_{B_z} \Big(v_3\big(x,y,\varphi_2(x,y)\big) - v_3\big(x,y,\varphi_1(x,y)\big) \Big)\, d(x,y)$$

Ausnutzen, dass auf der Bodenfläche F_B

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T = -\frac{\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y}{\left\| \mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y \right\|} = \frac{(\varphi_{1x}, \varphi_{1y}, -1)^T}{\sqrt{1 + \varphi_{1x}^2 + \varphi_{1y}^2}} \quad \text{äußerer Normalenvektor}$$

$$\Rightarrow \quad n_z \left\| \mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y \right\| = -1, \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{g}(x,y) = \big(x, y, \varphi_1(x,y)\big)^T,$$

auf der Deckelfläche F_D

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)^T = \frac{\mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y}{\left\| \mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y \right\|} = \frac{(-\varphi_{2x}, -\varphi_{2y}, 1)^T}{\sqrt{1 + \varphi_{2x}^2 + \varphi_{2y}^2}} \quad \text{äußerer Normalenvektor}$$

$$\Rightarrow \quad n_z \left\| \mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y \right\| = 1, \qquad \text{wobei} \quad \mathbf{g}(x,y) = \left(x, y, \varphi_2(x,y) \right)^T$$

und auf der Mantelfläche offensichtlich $n_z = 0$ gilt, liefert

$$\int_B \frac{\partial v_3}{\partial z} d(x,y,z) = \int_{B_z} v_3 \left(x, y, \varphi_2(x,y) \right) n_z \left\| \mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y \right\| d(x,y)$$

$$+ \int_{B_z} v_3 \left(x, y, \varphi_1(x,y) \right) n_z \left\| \mathbf{g}_x \times \mathbf{g}_y \right\| d(x,y)$$

$$= \int_{F_B} v_3 n_z d\sigma + \int_{F_D} v_3 n_z d\sigma = \int_{\partial B} v_3 n_z d\sigma.$$

Analog erhält man aus der Projizierbarkeit von B in y- bzw. x-Richtung

$$\int_B \frac{\partial v_2}{\partial y} d(x,y,z) = \int_{\partial B} v_2 \cdot n_y \, d\sigma \quad \text{und} \quad \int_B \frac{\partial v_1}{\partial x} d(x,y,z) = \int_{\partial B} v_1 \cdot n_x \, d\sigma$$

Summation dieser drei Gleichungen liefert mit

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_1 n_x + v_2 n_y + v_3 n_z$$

die Behauptung.

<u>Anmerkung:</u>
Der Satz von Gauß gilt auch dann noch, wenn sich B aus endlich vielen Normalbereichen zusammensetzten lässt.

<u>Beispiel:</u>

1) Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ Normalbereich, $\mathbf{n}$ äußerer Normalenvektor auf ∂B und $\mathbf{v} = (x,y,z)$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 3 \int_B d(x,y,z) = 3\mu\left(B\right)$$

2) $\mathbf{v} = (yz, xz, xy)^T, \quad B = \left\{ (x,y,z)^T : \; x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \right\}$

$$\partial B = \left\{ (x,y,z)^T = \left(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v\right),\ (u,v)^T \in D \right\}$$

$$D = \left\{ (u,v)^T :\ 0 \le u \le 2\pi,\ |v| \le \pi/2 \right\}, \quad \mathbf{n} = \left(\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v\right)$$

Gesucht $\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma$

a) *direkte Berechnung*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_D 3 \cos u \cos^2 v \sin u \sin v \cos v \, d(u,v)$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \cos u \sin u \, du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 v \sin v \, dv$$

$$= 3/2 \cdot \sin^2 u \Big|_0^{2\pi} \left(-1/4 \cdot \cos^4 v\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

b) *mit Satz von Gauß*

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v}\, d(x,y,z) = \int_B 0 \, d\left(x,y,z\right) = 0,$$

d.h. kein Fluss nach außen.

Mit dem Satz von Gauß kann eine koordinatenfreie Darstellung der Divergenz gewonnen werden (im $\mathbb{R}^3$).

Satz 13-13:

Unter den Voraussetzungen von Satz 13-12 gilt

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(P) = \lim_{B \to P} \frac{1}{\mu\left(B\right)} \int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma \qquad (*)$$

wobei $P \in B$ fest und $B \to P$ bedeutet, dass sich B auf den Punkt P zusammenzieht.

Beweis:

Ist P ein fester Punkt im $\mathbb{R}^3$ und B ein Körper mit $P \in B$ und Oberfläche ∂B, so folgt aus Satz 13-12 mit dem Mittelwertsatz

$$\int_{\partial B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \mu(B) \operatorname{div} \mathbf{v}(P_*) \quad \text{mit } P_* \in B \text{ geeignet.}$$

Division durch $\mu(B) \neq 0$ und anschließender Grenzübergang $B \to P$, ergeben wegen $P_* \to P$ die Behauptung.

Sind die Voraussetzungen von Satz 13-12 nicht erfüllt, existiert aber der Grenzwert in (∗), so kann man (∗) als Definition von $\operatorname{div} \mathbf{v}$ benutzen. Außerdem wird aus (∗) die physikalische Bedeutung von $\operatorname{div} \mathbf{v}$ als spezifische Ergiebigkeit einer Strömung mit Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ deutlich, $\operatorname{div} \mathbf{v}$ ist "Quellendichte".

Mit dem Gaußschen Satz lassen sich weitere Aussagen im $\mathbb{R}^3$ beweisen, die denen des Satzes 13-9 im $\mathbb{R}^2$ entsprechen.

13.6 Solenoidale Felder

In Kapitel 13.3 wurde bereits untersucht, wann ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist, also durch Gradientenbildung einer Funktion entsteht, d.h. ein Potential besitzt. Nun soll untersucht werden, wann ein gegebenes Vektorfeld $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch Bildung der Rotation entsteht, also darstellbar ist als $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$.

Definition 13-12:

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen. Dann heißt $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ solenoidal auf M, wenn es ein Vektorfeld $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\mathbf{w} \in C^1(M)$ gibt, für dass $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$ auf M gilt. $\mathbf{w}$ heißt dann Vektorpotential von $\mathbf{v}$.

Anmerkung:

Ist $\mathbf{v} \in C^1(M)$ solenoidal, so muss gelten

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{w}) = 0,$$

vgl. Satz 13-1 3a). Es gilt aber sogar der folgende Satz.

Satz 13-14:
Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, d.h. $\exists \mathbf{x}_* \in M$ das sich mit allen anderen Punkten $\mathbf{x} \in M$ geradlinig verbinden lässt, dann ist das Vektorfeld $\mathbf{v} \in C^1(M)$ genau dann solenoidal auf M, wenn $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ auf M gilt.

Beweis:
Es bleibt die Existenz von $\mathbf{w}$ zu zeigen. Sei

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0.$$

Gesucht $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$ mit $\operatorname{rot} \mathbf{w} = \mathbf{v}$, d.h.

$$v_1 = \frac{\partial w_3}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} \quad (1) \qquad v_2 = \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} \quad (2) \qquad v_3 = \frac{\partial w_2}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \quad (3)$$

Versuch der Lösung dieses Systems mit $w_3(x,y,z) \equiv 0$ liefert

$$v_1 = -\frac{\partial w_2}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad w_2 = -\int_{z_0}^{z} v_1(x,y,\xi)\,d\xi + h_1(x,y)$$

$$v_2 = \frac{\partial w_1}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad w_1 = \int_{z_0}^{z} v_2(x,y,\xi)\,d\xi + h_2(x,y).$$

Sei $h_2(x,y) \equiv 0$, dann erhält man $h_1(x,y)$ aus (3) wie folgt

$$v_3 = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial v_1}{\partial x} d\xi + \frac{\partial h_1}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v_2}{\partial y} d\xi = \int_{z_0}^{z} -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) d\xi + \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$= \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v_3}{\partial z} d\xi + \frac{\partial h_1}{\partial x} \qquad \left(\text{wegen } \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\right)$$

$$= v_3(x,y,z) - v_3(x,y,z_0) + \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial h_1}{\partial x} = v_3(x,y,z_0) \quad \Rightarrow \quad h_1(x,y) = \int_{x_0}^{x} v_3(\xi,y,z_0)\,d\xi.$$

Damit ergibt sich das zu $\mathbf{v}$ mit $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ konstruierte Vektorpotential zu

$$\mathbf{w}(x,y,z) = \left(\int_{z_0}^{z} v_2(x,y,\xi)\,d\xi, -\int_{z_0}^{z} v_1(x,y,\xi)\,d\xi + \int_{x_0}^{x} v_3(\xi,y,z_0)\,d\xi + g(y), 0 \right)^T.$$

Satz 13-15:

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ offen und sternförmig, $\mathbf{v} \in C^1(M)$ und $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Ist $\tilde{\mathbf{w}}$ irgendeine Lösung von $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$, dann ist $\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{c}$ die allgemeine Lösung, wobei $\mathbf{c}$ ein beliebiges Potentialfeld bezeichnet.

Beweis:

a) $\operatorname{rot}(\tilde{\mathbf{w}} + \mathbf{c}) = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{w}} + \operatorname{rot} \mathbf{c} = \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{w}} + \underbrace{\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi)}_{=0} = \mathbf{v}$

b) Sei $\operatorname{rot} \mathbf{w} = \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rot}(\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}) = \operatorname{rot} \mathbf{w} - \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$

$\Rightarrow \quad (\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}})$ ist Potentialfeld

Beispiel:

$\mathbf{v} = (z, x, y)^T \;\Rightarrow\; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3$ ist sternförmig $\Rightarrow$ es existiert ein Vektorpotential $\mathbf{w}$ im $\mathbb{R}^3$. Setzen von $w_3(x,y,z) = 0$ liefert

$$w_1(x,y,z) = \int v_2(x,y,z)\,dz + h_1(x,y) = \int x\,dz + h_1(x,y) = xz + h_1(x,y),$$

$$w_2(x,y,z) = -\int v_1(x,y,z)\,dz + h_2(x,y) = -\int z\,dz + h_2(x,y) = -z^2/2 + h_2(x,y).$$

Setzen von $h_2(x,y) = 0$ liefert $w_2(x,y,z) = -z^2/2$ und

$$w_{2x}(x,y,z) - w_{1y}(x,y,z) = v_3(x,y,z)$$

$$\Rightarrow -h_{1y}(x,y) = y \;\Rightarrow\; h_1(x,y) = -\int y\,dy + g(x) = -y^2/2 + g(x).$$

Setzen von $g(x) = 0$ liefert $w_1(x,y,z) = xz - y^2/2$. Somit ergibt sich das Vektorpotential zu

$$\mathbf{w}(x,y,z) = \left(xz - \frac{y^2}{2}, -\frac{y^2}{2}, 0 \right)^T \quad \text{im } \mathbb{R}^3.$$

Mit Satz 13-15 gilt dann schließlich

$$\mathbf{w}(x,y,z) = \left(xz - \frac{y^2}{2}, -\frac{y^2}{2}, 0 \right)^T + \operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi \in C^2(\mathbb{R}^3).$$

ist allgemeines Vektorpotential von $\mathbf{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Man könnte in diesem Beispiel auch wie folgt vorgehen, um ein Vektorpotential von $\mathbf{v}$ zu bestimmen.

$$w_{3_y}(x,y,z) - w_{2_z}(x,y,z) = v_1(x,y,z) = z$$

$$\Rightarrow \; w_2(x,y,z) = -z^2/2, \text{ falls } w_3 \text{ unhängig von } y$$

$$w_{1_z}(x,y,z) - w_{3_x}(x,y,z) = v_2(x,y,z) = x$$

$$\Rightarrow \; w_3(x,y,z) = -x^2/2, \text{ falls } w_1 \text{ unhängig von } z$$

$$w_{2_x}(x,y,z) - w_{1_y}(x,y,z) = v_3(x,y,z) = y$$

$$\Rightarrow \; w_1(x,y,z) = -y^2/2, \text{ falls } w_2 \text{ unhängig von } x$$

Die obigen Bedingungen sind alle erfüllt, also gilt

$$\mathbf{w}(x,y,z) = -1/2\,(y^2, z^2, x^2)^T$$

ist Vektorpotential von $\mathbf{v}$ im $\mathbb{R}^3$ und mit Satz 13-15 schließlich

$$\mathbf{w}(x,y,z) = -1/2\,(y^2, z^2, x^2)^T + \operatorname{grad}\varphi$$

ist allgemeines Vektorpotential von $\mathbf{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 13-1:
Überprüfen Sie das Feld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^3} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

auf a) Quellenfreiheit und b) Wirbelfreiheit.

Aufgabe 13-2:
Berechnen Sie $\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ für

a) $K = \left\{ (x, y)^T : \quad x^2 + y^2 = 1, \; x \geq 0 \right\}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (y, -x)^T$

b) $K = \left\{ (x, y)^T : \quad x = 0, \; -1 \leq y \leq 1 \right\}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = (y, -x)^T$

Aufgabe 13-3:
Zeigen Sie, dass das Vektorfeld

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = (x, y, z)^T$$

das Potential

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{r^2}{2} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

besitzt.

Aufgabe 13-4:
Berechnen Sie für die folgenden Vektorfelder die zugehörigen Potentiale falls existent.

a) $\mathbf{v}(x, y) = (x, y)^T$

b) $\mathbf{v}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^T$

c) $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{r^3} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Aufgabe 13-5:
Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden Flächen.

a) $F = \left\{ (x, y, z)^T : \quad x^2 + y^2 \leq 1, \; z = x^2 + y^2 \right\}$

b) $F = \left\{ (x, y, z)^T : \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \right\}$

c) $F = \left\{ (x, y, z)^T : \quad x^2 + y^2 = R^2, \; a \leq z \leq b \right\}$

Aufgabe 13-6:

Berechnen Sie $\int_F f(x,y,z)d\sigma$ mit $f(x,y,z)=x^2+y^2$ für

$F=\left\{(x,y,z)^T:\quad x^2+y^2\leq 1,\ z=x^2+y^2\right\}$.

Aufgabe 13-7:

Berechnen Sie $\int_F \mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ mit $\mathbf{v}(x,y,z)=(x,y,z)^T$ für

a) $F=\left\{(x,y,z)^T:\quad x^2+y^2\leq 1,\ z=x^2+y^2\right\}$ und $\mathbf{n}$ mit negativer z-Koordinate

b) $F=\left\{(x,y,z)^T:\quad x^2+y^2+z^2=R^2\right\}$ und $\mathbf{n}$ nach Außen gerichtet

Aufgabe 13-8:

Berechnen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Green

a) $\int_{\partial M}\mathbf{v}(x,y)\cdot d\mathbf{x}$ für $\mathbf{v}(x,y)=(2xy^3,3x^2y^2)^T$ und $M=\left\{(x,y)^T:\quad x^2+y^2\leq 1\right\}$

b) $\int_K \mathbf{v}(x,y)\cdot d\mathbf{x}$ für $\mathbf{v}(x,y)=(x^4-y^3,x^3-y^4)^T$ und $K=\left\{(x,y)^T=(\cos t,\sin t)^T,\ 0\leq t\leq 2\pi\right\}$

Aufgabe 13-9:

Berechnen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Stokes $\int_{\partial F}\mathbf{v}(x,y,z)\cdot d\mathbf{x}$ für

$\mathbf{v}(x,y,x)=(xy,1,z)^T$ und $F=\left\{(x,y,z)^T:\quad x^2+y^2+z^2=R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\right\}$

Aufgabe 13-10:

Berechnen Sie mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß

a) $\int_{\partial M}\mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ ($\mathbf{n}$ äußere Normale)

für $\mathbf{v}(x,y,y)=(xy,y^2,z-x)^T$ und $M=\left\{(x,y,z)^T:\ x^2+y^2\leq R^2,\ 0\leq z\leq h\right\}$

b) $\int_F \mathbf{v}(x,y,z)\cdot\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ ($\mathbf{n}$ mit negativer z-Koordinate)

für $\mathbf{v}(x,y,z)=(z,x,y^2)^T$ und $F=\left\{(x,y,z)^T:\ x^2+y^2\leq 1,\ z=x^2+y^2\right\}$

c) $\int_{\partial M}\mathbf{v}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$ ($\mathbf{n}$ äußere Normale)

für $\mathbf{v}(x,y,z)=\dfrac{(x,y,z)^T}{r^3}$ mit $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $M=\left\{(x,y,z)^T:\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\right\}$