HSB

Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 3

Kapitel 9

Integralrechnung für Funktionen mehrerer Variabler

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

INSTITUTE OF WATERACOUSTICS, SONAR ENGINEERING AND SIGNAL THEORY

iWSS

HOCHSCHULE BREMEN

Höhere Mathematik 3

Kapitel 9

Inhaltsverzeichnis

Satz 9-2:

Es sei $f: I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I mit

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ a \le x \le b, \ c \le y \le d \right\}.$$

a) Für alle $x \in [a,b]$ existiere das Integral

$$\int_c^d f(x,y)\,dy,$$

dann existiert auch das iterierte Integral und es ist

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_I f(x,y)\,d(x,y).$$

b) Für alle $y \in [c,d]$ existiere das Integral

$$\int_a^b f(x,y)\,dx,$$

dann existiert auch das iterierte Integral und es ist

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_I f(x,y)\,d(x,y).$$

c) Ist f stetig auf I, so existieren für alle $x \in [a,b]$ und für alle $y \in [c,d]$ die Intergrale

$$\int_a^b f(x,y)\,dx \ \text{ und } \ \int_c^d f(x,y)\,dy$$

und es gilt

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx,$$

d.h. die Reihenfolge der Integrationen ist vertauschbar.

d) Ist $f(x,y) = f_1(x)\,f_2(y)$ mit $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und $f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[c,d]$, so gilt

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy.$$

Beweis :

a) Es sei $Z_x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ und $Z_y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ eine Zerlegung von $[c,d]$, dann ist $Z = \{I_{jk} :\ 1 \le j \le m,\ 1 \le k \le n\}$ eine Zerlegung von I mit

$$I_{jk} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ x_{j-1} \le x \le x_j,\ \ y_{k-1} \le y \le y_k \right\}.$$

Ferner sei

$$m_{jk} = \inf_{I_{jk}} \{ f(x,y) \} \ \text{ und } \ M_{jk} = \sup_{I_{jk}} \{ f(x,y) \},$$

dann gilt $m_{jk} \le f(\xi_j, y) \le M_{jk}$ für $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ und $\forall y \in [y_{k-1}, y_k]$

$$\Rightarrow \int_{y_{k-1}}^{y_k} m_{jk}\, dy \le \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_j, y)\, dy \le \int_{y_{k-1}}^{y_k} M_{jk}\, dy$$

$$\Rightarrow m_{jk}\, \Delta y_k \le \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_j, y)\, dy \le M_{jk}\, \Delta y_k \ \text{ mit } \ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_{jk}\, \Delta y_k \le \int_c^d f(\xi_j, y)\, dy \le \sum_{k=1}^{n} M_{jk}\, \Delta y_k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} m_{jk}\, \Delta y_k\, \Delta x_j \le \sum_{j=1}^{m} \int_c^d f(\xi_j, y)\, dy\, \Delta x_j \le \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} M_{jk}\, \Delta y_k\, \Delta x_j .$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist gleich $U_Z(f)$, die rechte Seite ist gleich $O_Z(f)$, die Summe in der Mitte dieser Ungleichung konvergiert gegen das Doppelintegral

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx.$$

Da f integrierbar, gilt

$$\int_I f(x,y)\, d(x,y) = \sup_Z \{ U_Z(f) \} = \inf_Z \{ O_Z(f) \},$$

also folgt hieraus

$$\int_I f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx.$$

b) Analog.

c) Da f stetig auf I, ist auch f für alle $y \in [c,d]$ als Funktion von x stetig auf $[a,b]$, also existiert das Integral

$$\int_a^b f(x,y)\,dx$$

und analog für alle $x \in [a,b]$ das Integral

$$\int_c^d f(x,y)\,dy.$$

Aus a) und b) folgt dann sofort die Behauptung.

d) $$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f_1(x) f_2(y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_a^b f_1(x) \left(\int_c^d f_2(y)\,dy \right) dx$$
$$= \int_a^b f_1(x)\,dx \cdot \int_c^d f_2(y)\,dy.$$

Beispiel:

1) $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ a \le x \le b,\ c \le y \le d \right\}$, $f(x,y) = xy$ stetig auf I,

$$\int_I xy\,d(x,y) = \int_a^b \int_c^d xy\,dy\,dx = \int_a^b x\,dx \cdot \int_c^d y\,dy$$
$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_a^b \cdot \frac{y^2}{2}\bigg|_c^d = \frac{1}{4}(b^2 - a^2)(d^2 - c^2)$$

2) $I = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ 0 \le x \le 1,\ 0 < a \le y \le b \right\}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x^y & \text{falls } x > 0,\, a \le y \le b \\ 0 & \text{falls } x = 0,\, a \le y \le b \end{cases}$$

f ist stetig in I, denn für $x > 0$ gilt $f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$ ist stetig für $x > 0$, $0 < a \le y \le b$. Für $x = 0$ gilt falls $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ mit $0 < a \le y_0 \le b$

$\Rightarrow \; |f(x,y) - f(0,y_0)| = |x^y - 0| = e^{y\ln x} \le e^{a\ln x} \to 0$ für $x \to 0$.

(da für $x \to 0 \;\Rightarrow\; \ln x < 0$ und mit $y \ge a > 0 \;\Rightarrow\; y\ln x \le a\ln x$).

Da also f stetig ist auf I, existiert nach c)

$$\int_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx$$

(Reihenfolge der Integration ist vertauschbar).

Es ist

a) $\displaystyle \int_a^b \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_a^b \left.\frac{x^{y+1}}{y+1}\right|_{x=0}^{1} dy = \int_a^b \frac{1}{y+1}\,dy = \ln(y+1)\Big|_{y=a}^{b} = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$

und andererseits

b) $\displaystyle \int_0^1 \int_a^b x^y\,dy\,dx = \int_0^1 \int_a^b e^{y\ln x}\,dy\,dx = \int_0^1 \left.\frac{e^{y\ln x}}{\ln x}\right|_{y=a}^{b} dx$

$$= \int_0^1 \frac{e^{b\ln x} - e^{a\ln x}}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx.$$

Dieses Integral lässt sich nicht weiter ausrechnen, aber wegen a) gilt

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right).$$

Es ist $\displaystyle \lim_{x\to 0+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$ und $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = b - a$, denn

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{1/x} = \lim_{x\to 1}(bx^b - ax^a) = b - a.$$

Allgemeiner Fall $n > 2$: Bereichsintegrale im $\mathbb{R}^n$.

Für den Fall $n > 2$ gilt ein zu Satz 9-2 analoger Satz. Hierbei bezeichnen wir für ein j mit $1 \le j \le n$ den Vektor, der aus dem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ durch weglassen der j-ten Koordinate x_j hervorgeht mit

$$\mathbf{x}_j := (x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^{n-1}$$

und mit

$$I_j := \{\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{n-1}\colon\ a_i \le x_i \le b_i,\ 1 \le i \le n,\ i \ne j\}$$

das entsprechende Intervall im $\mathbb{R}^{n-1}$.

Satz 9-3:

Es sei $f : I = [\mathbf{a},\mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar auf I.

a) Existiert für alle $x_j \in [a_j,b_j]$ das Integral

$$\int_{I_j} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}_j,$$

so existiert auch das iterierte Integral und ist gleich

$$\int_{a_j}^{b_j}\left(\int_{I_j} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}_j\right)dx_j = \int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

b) Existiert für alle $\mathbf{x}_j \in I_j$ das Integral

$$\int_{a_j}^{b_j} f(\mathbf{x})\,dx_j,$$

so existiert auch das iterierte Integral und ist gleich

$$\int_{I_j}\left(\int_{a_j}^{b_j} f(\mathbf{x})\,dx_j\right)d\mathbf{x}_j = \int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

c) Ist f stetig auf I, so sind die Voraussetzungen von a) und b) erfüllt und es gilt

$$\int_I f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{a_j}^{b_j}\left(\int_{I_j} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}_j\right)dx_j = \int_{I_j}\left(\int_{a_j}^{b_j} f(\mathbf{x})\,dx_j\right)d\mathbf{x}_j.$$

Anmerkung:
Integrale auf Intervallen des $\mathbb{R}^n$ können bei stetigen Funktionen auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden. Die Reihenfolge der Integrationen ist dabei beliebig.

Beispiel:

$$f(x,y,z)=x+y+z \text{ ist stetig auf } I=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1,\ 2\le z\le 4\right\}.$$

Mit

$$I_z=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:\ 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\right\}$$

gilt dann

$$\begin{aligned}\int_I (x+y+z)\,d(x,y,z) &= \int_2^4\left(\int_{I_z}(x+y+z)\,d(x,y)\right)dz\\
&=\int_2^4\left(\int_0^1\left(\int_0^2(x+y+z)\,dx\right)dy\right)dz\\
&=\int_2^4\left(\int_0^1\left(x^2/2+(y+z)x\right)\Big|_{x=0}^{2}dy\right)dz\\
&=\int_2^4\left(\int_0^1(2+2y+2z)\,dy\right)dz\\
&=\int_2^4\left(2y+y^2+2zy\right)\Big|_{y=0}^{1}dz\\
&=\int_2^4(3+2z)\,dz=\left(3z+z^2\right)\Big|_{z=2}^{4}=28-10=18.\end{aligned}$$

9.2 Integration auf Mengen

Für die Anwendung reicht es nicht aus, nur auf Intervallen des $\mathbb{R}^n$ zu integrieren, man muss auch auf anderen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ integrieren können.

Definition 9-3:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge und $f : M \to \mathbb{R}$ eine auf M beschränkte Funktion, dann heißt f_M mit

$$f_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \text{falls } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{falls } \mathbf{x} \notin M \end{cases}$$

Erweiterung der Funktion f von M auf $\mathbb{R}^n$ und 1_M mit

$$1_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathbf{x} \in M \\ 0 & \text{falls } \mathbf{x} \notin M \end{cases}$$

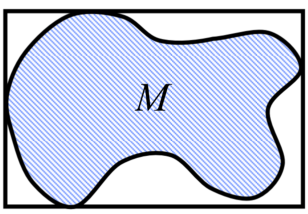
charakteristische Funktion von M.

Zu jeder beschränkten Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ existiert ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ mit $M \subset I$. Das kleinste Intervall dieser Art ist gerade der Durchschnitt aller abgeschlossenen Intervalle I mit $M \subset I$.

Definition 9-4:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Wir bezeichnen das kleinste abgeschlossene Intervall, das M enthält mit

$$I(M) = \bigcap_{M \subset I} I.$$

Beispiel:



$I(M)$

Definition 9-5:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $f: M \to \mathbb{R}$ eine auf M beschränkte Funktion, dann heißt f integrierbar auf M genau dann, wenn f_M auf $I(M)$ integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{I(M)} f_M(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,.$$

Satz 9-4: (*Eigenschaften*)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. Ferner seien $f: M \to \mathbb{R}$ und $g: M \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M und $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) cf ist integrierbar auf M mit

$$\int_M c\,f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = c\int_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

b) $f+g$ ist integrierbar auf M mit

$$\int_M \big(f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x} = \int_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_M g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

c) Ist $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in M$, so gilt

$$\int_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \le \int_M g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

d) $|f|$ ist integrierbar auf M mit

$$\left|\int_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \le \int_M \left|f(\mathbf{x})\right|d\mathbf{x}.$$

e) $f \cdot g$ ist integrierbar auf M.

f) Ist $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ und ist f integrierbar auf M_1 und M_2, dann ist f integrierbar auf $M_1 \cup M_2$ mit

$$\int_{M_1 \cup M_2} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{M_1} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_{M_2} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Beweis:
Ähnlich wie im eindimensionalen Fall. Man muss jeweils auf $I(M)$ übergehen und die erweiterte Funktion f_M betrachten.

Anmerkung :
Integrierbarkeit hängt nun von zwei Faktoren ab:

a) von der beschränkten Menge M,
b) von der auf M definierten Funktion f.

Im eindimensionalen Fall war M immer ein Intervall, und wir konnten z.B. die Ungleichung

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\int_a^b dx = \sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}(b-a)$$

zeigen, insbesondere galt

$$\int_a^b dx = (b-a) \;\hat{=}\; \text{Länge des Intervalls.}$$

Analog soll nun für $M \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \le \sup_{\mathbf{x}\in M}\{f(\mathbf{x})\}\int_M d\mathbf{x} = \sup_{\mathbf{x}\in M}\{f(\mathbf{x})\}\,\mu(M)$$

gelten, wobei

$$\int_M d\mathbf{x} = \mu(M)$$

den Inhalt von M bezeichne. Nun ist aber nicht klar, ob $\int_M d\mathbf{x}$ überhaupt existiert, wenn M eine beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Wir wollen im folgenden aber nur noch Mengen M zulassen, für die $\int_M d\mathbf{x}$ existiert. M heißt in diesem Fall messbar und der Wert $\mu(M)$ heißt das Maß von M.

Definition 9-6:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt. M heißt messbar genau dann, wenn 1_M auf $I(M)$ integrierbar ist. In diesem Fall heißt

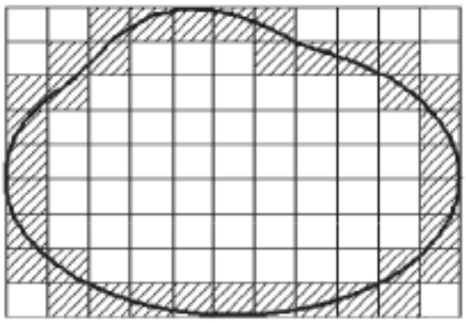
$$\mu(M) := \int_M d\mathbf{x} = \int_{I(M)} 1_M(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

das Maß von M.

Wir wollen nun untersuchen, welche Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar sind. Dazu betrachten wir die Differenz zwischen Ober- und Untersumme der charakteristischen Funktion 1_M bezüglich einer Zerlegung von $I(M)$ gemäß

$$O_Z(1_M) - U_Z(1_M) = \sum_{k=1}^{m} \sup_{\mathbf{x}\in I_k} \{1_M(\mathbf{x})\}\, \mu(I_k) - \sum_{k=1}^{m} \inf_{\mathbf{x}\in I_k} \{1_M(\mathbf{x})\}\, \mu(I_k)$$
$$= \sum_{I_k \cap M \neq \emptyset} \mu(I_k) - \sum_{I_k \subset M} \mu(I_k) = \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k),$$

wobei ∂M den Rand von M bezeichnet.



Ist nun M messbar, so muss bei feiner werdender Zerlegung die Ober- und Untersumme gegen den gleichen Wert konvergieren, also die Differenz

$$O_Z(1_M) - U_Z(1_M) = \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k) \to 0$$

konvergieren. Das bedeutet aber, dass das Maß des Randes von M, also $\mu(\partial M) = 0$ sein muss, denn es gilt

$$0 \leq U_Z(1_{\partial M}) \leq O_Z(1_{\partial M}) \leq \sum_{I_k \cap \partial M \neq \emptyset} \mu(I_k) \to 0$$
$$\Rightarrow\ U_Z(1_{\partial M}) = O_Z(1_{\partial M}) = \mu(\partial M) = 0$$

und somit der folgende Satz.

Satz 9-5:
Eine beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann messbar, wenn $\mu(\partial M) = 0$.

Satz 9-6: (*Eigenschaften messbarer Mengen*)
Seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ messbar, dann gilt

a) Gilt $M_1 \cap M_2 = \varnothing$

$\Rightarrow$ $M_1 \cup M_2$ ist messbar mit $\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2)$

b) Gilt $M_1 \subset M_2$

$\Rightarrow$ $M_2 \setminus M_1$ ist messbar mit $\mu(M_2 \setminus M_1) = \mu(M_2) - \mu(M_1)$

Aus Satz 9-5 folgt, dass eine Menge M genau dann messbar ist, wenn der Rand eine Nullmenge ist, d.h. $\mu(\partial M) = 0$ gilt.

Also ist zunächst von Interesse, welche Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$ Nullmengen sind, d.h. für welche Mengen $\mu(M) = 0$ gilt.

Für die Anwendung besonders wichtig sind folgende Nullmengen.

Satz 9-7:
Es sei $\varphi : D \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ stetig auf D und D kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt, dann ist der Graph von φ

$$C_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \varphi(\mathbf{x}) \end{pmatrix} : \ \mathbf{x} \in D \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

eine Nullmenge des $\mathbb{R}^n$.

Beispiel:

1) Eine Kurve K des $\mathbb{R}^2$, die eine Darstellung der Form

$$K = \left\{ (x, y)^T : \ y = f(x), \ a \le x \le b \right\}$$

oder

$$K = \left\{ (x, y)^T : \ x = g(y), \ c \le y \le d \right\}$$

mit stetigen Funktionen f, g besitzt, hat den Flächeninhalt 0.

2) Eine Fläche F des $\mathbb{R}^3$, die eine Darstellung der Form

$$F = \left\{ (x,y,z)^T : \ z = f(x,y), \ (x,y)^T \in D_{xy} \right\}$$

$$F = \left\{ (x,y,z)^T : \ y = g(x,z), \ (x,z)^T \in D_{xz} \right\}$$

oder

$$F = \left\{ (x,y,z)^T : \ x = h(y,z), \ (y,z)^T \in D_{yz} \right\}$$

mit auf den messbaren Mengen D_{xy}, D_{xz}, D_{yz}, stetigen Funktionen f, g, h besitzt, hat den Rauminhalt 0.

Aus Satz 9-5 und Satz 9-7 ergibt sich nun sofort das folgende Kriterium für die Messbarkeit von beschränkten Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$.

Satz 9-8: (*Kriterium für Messbarkeit*)
Jede beschränkte Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, deren Ränder sich als Graphen stetiger Funktionen darstellen lassen, ist messbar.

Beispiel: (*Zylinder*)

$$M = \left\{ (x,y,z)^T : \ x^2 + y^2 \le 1, \ 0 \le z \le 2 \right\}$$

ist messbar, da sich $\partial M = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ mit

$$F_1 = \left\{ (x,y,z)^T : \ x^2 + y^2 = 1, \ 0 \le z \le 2 \right\} \quad \text{Zylindermantel}$$

$$F_2 = \left\{ (x,y,z)^T : \ x^2 + y^2 \le 1, \ z = 0 \right\} \quad \text{Zylinderboden}$$

$$F_3 = \left\{ (x,y,z)^T : \ x^2 + y^2 \le 1, \ z = 2 \right\} \quad \text{Zylinderdeckel}$$

als Graph stetiger Funktionen darstellen lässt.

Wir wollen noch weitere Eigenschaften von messbaren Mengen angeben.

Satz 9-9: (*Eigenschaften messbarer Mengen*)

a) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar

$\Rightarrow \overset{\circ}{M}$ und $\overline{M}$ sind messbar mit $\mu(M) = \mu(\overset{\circ}{M}) = \mu(\overline{M})$

b) Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ messbar

$\Rightarrow M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$ sind messbar mit

$$\mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2) - \mu(M_1 \cap M_2)$$

c) Ist $M_1 \subset M_2$ und $\mu(M_2) = 0 \Rightarrow \mu(M_1) = 0$.

Im folgenden Satz wird ein hinreichendes Kriterium für die Integrierbarkeit angegeben.

Satz 9-10:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : \overline{M} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\overline{M} \Rightarrow f$ ist integrierbar auf M.

Satz 9-11:
Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine messbare Menge. Ferner seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ zwei beschränkte Funktionen die bis auf eine Nullmenge M_0 auf M übereinstimmen, d.h.

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \;\; \forall \mathbf{x} \in M \setminus M_0, \;\; \mu(M_0) = 0,$$

dann ist mit f auch g integrierbar und es gilt

$$\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_M g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

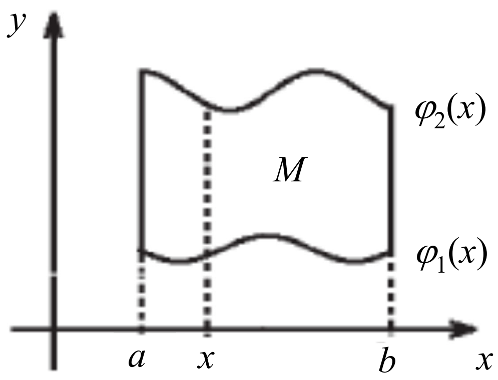
Anmerkung:
Man kann also eine Funktion auf einer Nullmenge abändern, ohne dass sich dabei der Wert des Integrals verändert.

Wir betrachten im folgenden nur noch Mengen M, deren Ränder sich als Graphen stetiger Funktionen darstellen lassen, also messbar sind, und Funktionen f, die auf M integrierbar sind, z.B. stetige Funktionen.

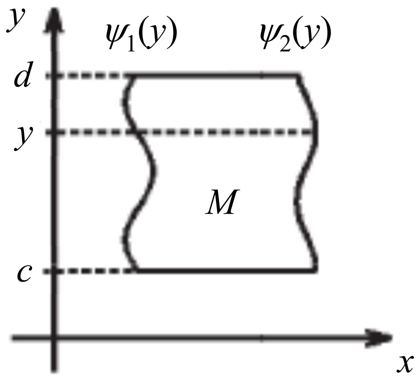
Die Berechnung des mehrdimensionalen Integrals erfolgt nun durch Zurückführung auf eindimensionale Integrale.

1. Fall $n = 2$:

Hierzu seien die beiden folgenden Fälle betrachtet



a) Normalbereich bzgl. y



b) Normalbereich bzgl. x

Definition 9-7:

a) Gibt es ein Intervall $[a,b]$ und existieren auf $[a,b]$ zwei stetige Funktionen φ_1 und φ_2 derart, dass gilt

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \right\}$$

so nennen wir M Normalbereich bzgl. y.

b) Gibt es ein Intervall $[c,d]$ und existieren auf $[c,d]$ zwei stetige Funktionen ψ_1 und ψ_2 derart, dass gilt

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \right\}$$

so nennen wir M Normalbereich bzgl. x.

c) Gilt a) und b), dann heißt M Normalbereich.

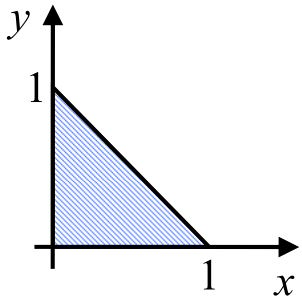
Beispiel:

1) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 1 - x \right\}$,

d.h. Normalbereich bzgl. y

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \; 0 \le y \le 1, \; 0 \le x \le 1 - y \right\}$,

d.h. Normalbereich bzgl. $x \;\Rightarrow\;$ Normalbereich

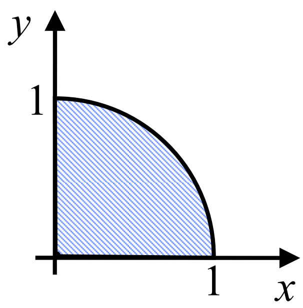


2) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \; 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2} \right\}$,

d.h. Normalbereich bzgl. y

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \; 0 \le y \le 1, \; 0 \le x \le \sqrt{1 - y^2} \right\}$,

d.h. Normalbereich bzgl. $x \;\Rightarrow\;$ Normalbereich



Satz 9-12:

Es sei $f: M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M.

a) M sei Normalbereich bzgl. y und $\forall x \in [a, b]$ existiere das Integral

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Dann existiert auch das iterierte Integral mit

$$\int_M f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

b) M sei Normalbereich bzgl. x und $\forall y \in [c, d]$ existiere das Integral

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

Dann existiert auch das iterierte Integral mit

$$\int_M f(x, y)\, d(x, y) = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

c) Ist f stetig auf M und M Normalbereich, dann existieren $\forall x \in [a,b]$ und $\forall y \in [c,d]$ die Intergrale

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \quad \text{und} \quad \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx$$

und es gilt

$$\int_M f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

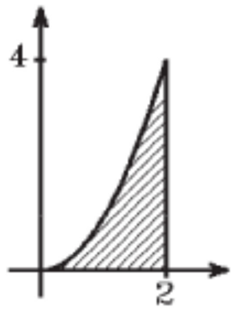
Beispiel:

1) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2 \right\}$,

d.h. Normalbereich bzgl. y.

$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ 0 \le y \le 4,\ \sqrt{y} \le x \le 2 \right\}$,

d.h. Normalbereich bzgl. x $\Rightarrow$ Normalbereich.



Es sei $f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f$ ist stetig auf M und es gilt

$$\int_M (x^2+y^2)\,d(x,y) = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2+y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \left(x^2 y + y^3/3 \right)\Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^4 + x^6/3 \right) dx = \left(x^5/5 + x^7/21 \right)\Big|_0^2 = \frac{1312}{105}$$

oder

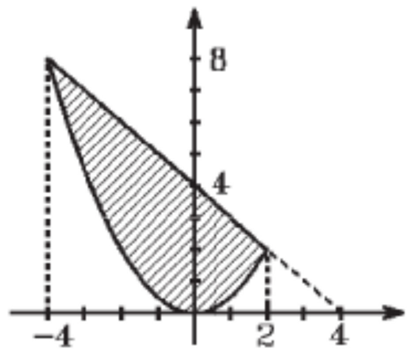
$$\int_M (x^2+y^2)\,d(x,y) = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(x^3/3 + y^2 x \right)\Big|_{\sqrt{y}}^2 dy$$

$$= \int_0^4 \left(8/3 + 2y^2 - y^{3/2}/3 - y^{5/2} \right) dy$$

$$= \left(8y/3 + 2y^3/3 - 2y^{5/2}/15 - 2y^{7/2}/7 \right)\Big|_0^4 = \frac{1312}{105}.$$

2) $M=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}:\ -4\le x\le 2,\ \ x^2/2\le y\le 4-x\right\}$,

d.h. Normalbereich bzgl. y.



Nun sei $f(x,y)\equiv 1\ \Rightarrow\ f$ ist stetig auf M und es gilt

$$\mu(M)=\int_M 1\,d(x,y)=\int_{-4}^{2}\int_{x^2/2}^{4-x}dy\,dx$$
$$=\int_{-4}^{2}\left(4-x-x^2/2\right)dx$$
$$=\left(4x-x^2/2-x^3/6\right)\Big|_{-4}^{2}=18.$$

2. Fall $n>2$:

Definition 9-8:

Es sei $M\subset\mathbb{R}^n$ beschränkt.

a) Gibt es eine messbare Menge $M_\nu\subset\mathbb{R}^{n-1}$ und existieren auf M_ν zwei stetige Funktionen φ_1 und φ_2 derart, dass gilt

$$M=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n:\ \mathbf{x}_\nu\in M_\nu,\ \varphi_1(\mathbf{x}_\nu)\le x_\nu\le\varphi_2(\mathbf{x}_\nu)\right\}$$

so heißt M Normalbereich bzgl. x_ν.

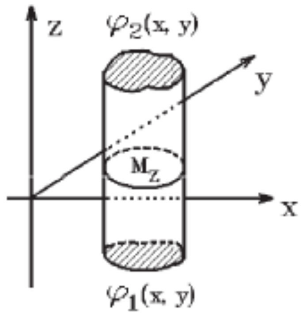
b) Ist M Normalbereich bzgl. aller x_ν, so heißt M Normalbereich.

Beispiel: ($n=3$)

M sei Normalbereich bzgl. z mit

$$M=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in M_z,\ \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\right\}$$

und M_z Normalbereich bzgl. y mit

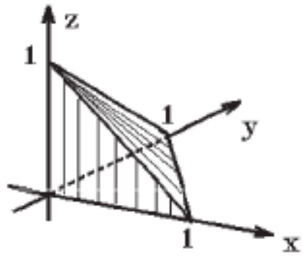


$$M_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ a \le x \le b,\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x) \right\},$$

dann erhalten wir insgesamt

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ a \le x \le b,\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x),\ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y) \right\},$$

z.B. Einheitstetraeder



$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x,\ 0 \le z \le 1 - x - y \right\}.$$

Analog zu Satz 9-12 kann nun der folgende Satz formuliert werden.

Satz 9-13:
Es sei $f : M \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrierbar auf M. Ferner sei M Normalbereich bzgl. x_ν. Existiert $\forall \mathbf{x}_\nu \in M_\nu$ das Integral

$$\int_{\varphi_1(\mathbf{x}_\nu)}^{\varphi_2(\mathbf{x}_\nu)} f(\mathbf{x})\, dx_\nu,$$

so existiert auch das iterierte Integral mit

$$\int_M f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{M_\nu} \int_{\varphi_1(\mathbf{x}_\nu)}^{\varphi_2(\mathbf{x}_\nu)} f(\mathbf{x})\, dx_\nu\, d\mathbf{x}_\nu.$$

Beispiel: $(n = 3)$
Sei M Normalbereich bzgl. z und M_z Normalbereich bzgl. y, also

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \ a \le x \le b,\ \psi_1(x) \le y \le \psi_2(x),\ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y) \right\}$$

und $f: M \to \mathbb{R}$ stetig auf M, so erhalten wir

$$\int_M f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_{M_z} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,d(x,y)$$
$$= \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

Sei nun $f: M \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = x$.

1) Für den Einheitstetraeder, vgl. Beispiel auf S. 9-39, d.h.

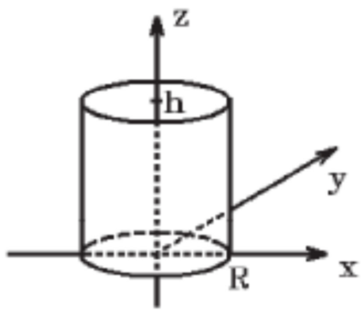
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,\ 0 \le z \le 1-x-y \right\}$$

erhält man das Integral

$$\int_M x\,d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x\,dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x(1-x-y)\,dy\,dx$$
$$= \int_0^1 \left(x(1-x)y - xy^2/2 \right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x)^2/2\,dx = 1/24.$$

2) Für einen Zylinder

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :\ x^2 + y^2 \le R^2,\ 0 \le z \le h \right\}$$



mit $M_z = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\ x^2 + y^2 \le R^2 \right\}$ und

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :\ -R \le x \le R,\ -\sqrt{R^2 - x^2} \le y \le \sqrt{R^2 - x^2},\ 0 \le z \le h \right\}$$

ergibt sich das Integral zu

$$\int_M x\,d(x,y,z) = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_0^h x\,dz\,dy\,dx = \int_{-R}^{R} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} hx\,dy\,dx$$
$$= \int_{-R}^{R} 2hx\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 0 \text{ (da Integrand ungerade Fkt.).}$$

Wie bei den Integralen im $\mathbb{R}$ vereinfacht auch bei Integralen im $\mathbb{R}^n$ eine Substitution gelegentlich deren Berechnung. Man spricht dann von einer Einführung neuer Koordinaten durch Koordinatentransformation. Ziel dabei ist es, im Integral

$$\int_M f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_M f(x_1,\ldots,x_n)\,d(x_1,\ldots,x_n)$$

mit Hilfe einer Abbildung

$$\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_n)^T = \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{g}(u_1,\ldots,u_n)$$

eine Integration bzgl. der neuen Koordinaten herbeizuführen.

Aber zunächst müssen wir definieren, was wir unter einer Koordinatentransformation verstehen wollen. Anstelle der kartesischen Koordinaten $x_1,\ldots,x_n$ wollen wir neue Koordinaten $u_1,\ldots,u_n$ einführen, wobei die folgenden Eigenschaften gelten sollen.

Definition 9-9:

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{g} : N \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

a) $\mathbf{g} : N \to M$ bijektiv (d.h. $\mathbf{g}^{-1}$ existiert),

b) N offen,

c) $\mathbf{g} \in C^1(N)$ mit $\det\left(\dfrac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u})\right) \neq 0 \;\; \forall \mathbf{u} \in N$,

dann heißt $\mathbf{g}$ Koordinatentransformation mit

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(u_1,\ldots,u_n) \\ x_2 &= g_2(u_1,\ldots,u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(u_1,\ldots,u_n). \end{aligned}$$

Man sagt auch: Auf M werden durch $\mathbf{g}$ die neuen Koordinaten $u_1,\ldots,u_n$ eingeführt.

Satz 9-14: (*Substitution*)
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und messbar. Auf M mit $K \subset M \subset \mathbb{R}^n$ seien durch die Funktion $\mathbf{g} : N \to M$ neue Koordinaten eingeführt. Ferner sei $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{g}^{-1}(K)} f\left(\mathbf{g}(\mathbf{u})\right) \left| \det\left(\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \right) \right| d\mathbf{u}.$$

Beweisidee für den $\mathbb{R}^3$:
Seien x, y, z die alten und u, v, w die neuen Koordinaten. Das Volumenelement bzgl. der alten Koordinaten ist $dV = dx\,dy\,dz$. Wir berechnen nun das Volumenelement bzgl. der neuen Koordinaten. Dazu zeichnen wir an einem Punkt $P_1(u,v,w)$ die drei Koordinatenlinien und berechnen das Volumen eines kleinen Volumenelementes ΔV mit Hilfe der Eckpunkte

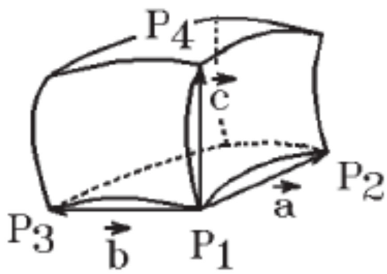
$$P_1(u,v,w),\ P_2(u+\Delta u,v,w),\ P_3(u,v+\Delta v,w),\ P_4(u,v,w+\Delta w)$$

Nach definieren der Vektoren

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}(u+\Delta u,v,w) - \mathbf{g}(u,v,w)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{g}(u,v+\Delta v,w) - \mathbf{g}(u,v,w),$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{g}(u,v,w+\Delta w) - \mathbf{g}(u,v,w),$$



wobei $\mathbf{g}(u,v,w), \mathbf{g}(u+\Delta u,v,w), \mathbf{g}(u,v+\Delta v,w)$ und $\mathbf{g}(u,v,w+\Delta w)$ die Ortsvektoren der Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 angibt, gilt für das Volumen approximativ

$$\Delta V \approx \left| \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \right| = \left| \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \right|.$$

Aus $\quad \mathbf{a} = \mathbf{g}(u+\Delta u, v, w) - \mathbf{g}(u,v,w) \approx \dfrac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \Delta u$

$$\mathbf{b} = \mathbf{g}(u, v+\Delta v, w) - \mathbf{g}(u,v,w) \approx \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \Delta v$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{g}(u, v, w+\Delta w) - \mathbf{g}(u,v,w) \approx \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial w} \Delta w$$

folgt

$$\Delta V \approx \left| \det\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial w} \Delta w \right) \right|$$

$$\approx \left| \det\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial w} \right) \right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w = \left| \det\left(\frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} \right) \right| \Delta u\, \Delta v\, \Delta w.$$

Beim Grenzübergang erhalten wir dann für das Volumenelement in den neuen Koordinaten u,v,w den Ausdruck

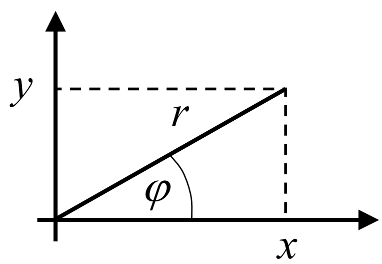
$$dV = d(x,y,z) = \left| \det\left(\frac{\partial (x,y,z)}{\partial (u,v,w)} \right) \right| d(u,v,w)$$

oder vektoriell geschrieben

$$dV = \left| \det\left(\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}}(\mathbf{u}) \right) \right| d\mathbf{u}.$$

Beispiel:

1) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$



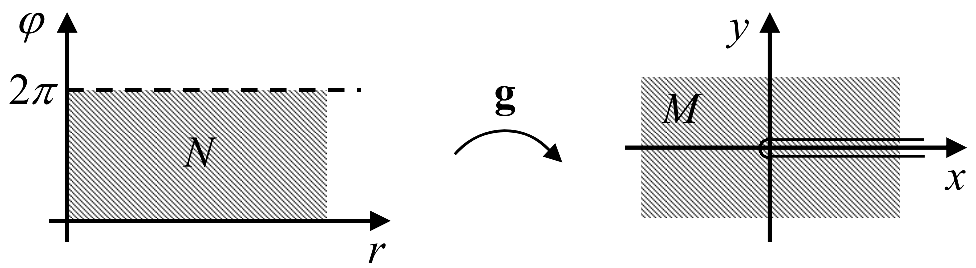
$x = r\cos\varphi = g_1(r,\varphi)$

$y = r\sin\varphi = g_2(r,\varphi)$

$\mathbf{g} : N \to M$, $\mathbf{g}$ bijektiv und $\mathbf{g} \in C^1(N)$ mit

$$N = D(\mathbf{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : \ 0 < r < \infty, \ 0 < \varphi < 2\pi \right\}$$

$$M = \mathbf{g}(N) = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \ y = 0, \ x \geq 0 \right\}$$ (also $\mathbb{R}^2$ ohne die x-Achse mit $x \geq 0$)



$$\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

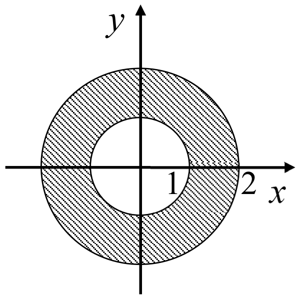
Also erhalten wir die Funktionaldeterminante

$$\left|\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\phi)}\right)\right| = r \neq 0 \text{ auf } N.$$

Nun sei z.B.

$$\int_K \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y)$$

gesucht mit



$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \right\} \text{ (Kreisring).}$$

K ist kompakt und messbar und f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$.

Nach Einführen von Polarkoordinaten gemäß

$$\mathbf{g}^{-1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : 1 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$$

ergibt sich das Integral zu

$$\int_K \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y) = \int_1^2 \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi\, dr = 2\pi \int_1^2 r^2 dr = 2\pi \left.\frac{r^3}{3}\right|_1^2 = \frac{14}{3}\pi,$$

wobei wir nicht ganz exakt gearbeitet haben, denn da bei M die positive x-Achse fehlt ist $K \not\subset M = \mathbf{g}(N)$. Es müsste eigentlich wie folgt vorgegangen werden. Wir betrachten K_α mit

$$\mathbf{g}^{-1}(K_\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} : 1 \le r \le 2,\ \alpha \le \varphi \le 2\pi - \alpha \right\}$$

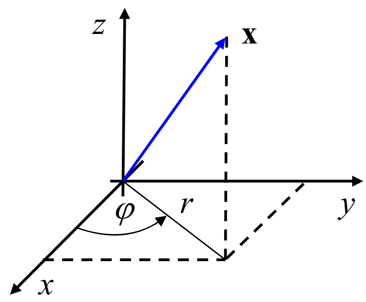
$\Rightarrow$ $K_\alpha \subset M$, K_α kompakt und messbar mit

$$\int_{K_\alpha} \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y) = \int_1^2 \int_\alpha^{2\pi-\alpha} r^2 d\phi\, dr = (2\pi - 2\alpha)\int_1^2 r^2 dr = \frac{14}{3}(\pi-\alpha)$$

$$\Rightarrow \int_K \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y) = \lim_{\alpha\to 0}\int_{K_\alpha} \sqrt{x^2+y^2}\, d(x,y) = \lim_{\alpha\to 0}\frac{14}{3}(\pi-\alpha) = \frac{14}{3}\pi.$$

Man kann in der Praxis auf diese Grenzbetrachtungen verzichten.

2) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$



$$x = r\cos\varphi = g_1(r,\varphi,z)$$
$$y = r\sin\varphi = g_2(r,\varphi,z)$$
$$z = z = g_3(r,\varphi,z)$$

$\mathbf{g} : N \to M$, $\mathbf{g}$ bijektiv und $\mathbf{g} \in C^1(N)$ mit

$$N = D(\mathbf{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} :\ 0 < r < \infty,\ 0 < \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty \right\},$$

$$M = \mathbf{g}(N) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :\ y = 0,\ x \geq 0 \right\}$$ (also $\mathbb{R}^3$ ohne die (x,z)-Ebene mit $x \geq 0$)

und

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir die Funktionaldeterminante

$$\left| \det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} \right) \right| = r \neq 0 \quad \text{auf } N.$$

Nun sei z.B. $\int_K x^2 y\, d(x,y,z)$ gesucht mit

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \; x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; x^2 + y^2 \leq 1, \;\; 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Nach Einführen von Zylinderkoordinaten gemäß

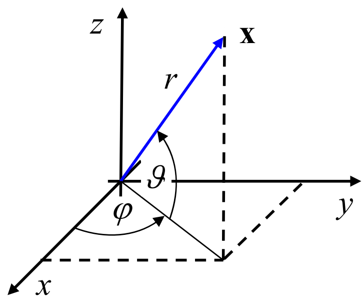
$$\mathbf{g}^{-1}(K) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} : \; 0 \leq r \leq 1, \;\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \;\; 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

ergibt sich das Integral zu

$$\begin{aligned} \int_K x^2 y \, d(x,y,z) &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_0^1 r^2 \cos^2\varphi \cdot r \sin\varphi \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^4 \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, \sin\varphi \, d\varphi = -\frac{1}{15} \cos^3\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Auch hier haben wir auf die Grenzbetrachtungen verzichtet.

3) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$



$$\begin{aligned} x &= r \cos\varphi \cos\vartheta = g_1(r,\varphi,\vartheta) \\ y &= r \sin\varphi \cos\vartheta = g_2(r,\varphi,\vartheta) \\ z &= r \sin\vartheta = g_3(r,\varphi,\vartheta) \end{aligned}$$

$\mathbf{g} : N \to M$, $\mathbf{g}$ bijektiv und $\mathbf{g} \in C^1(N)$ mit

$$N = D(\mathbf{g}) = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} : \; 0 < r < \infty, \;\; 0 < \varphi < 2\pi, \;\; -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$M = \mathbf{g}(N) = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \; y = 0, \;\; x \geq 0 \right\}$$ (also $\mathbb{R}^3$ ohne die (x,z)-Ebene mit $x \geq 0$)

und

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\mathbf{u}} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\cos\vartheta & -r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & 0 & r\cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir die Funktionaldeterminante

$$\left|\det\left(\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\vartheta)}\right)\right| = r^2\cos\vartheta \neq 0 \ \text{ auf } \ N.$$

Nun sei z.B. das Volumen einer Kugel mit Radius R gesucht. Führen wir Kugelkoordinaten ein, so erhalten wir für die Kugel die Grenzen $0 \le r \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2$ und demzufolge

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = 2\pi \int_0^R r^2 dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{4}{3}R^3\pi.$$

9.3 Anwendungen

9.3.1 Berechnen von Schwerpunkten

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ messbar mit der Dichte $\rho(\mathbf{x})$, dann hat M die Masse m mit

$$m = \int_M \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Der Schwerpunkt $\mathbf{x}_s$ von M lässt sich dann folgendermaßen berechnen

$$\mathbf{x}_s = \frac{1}{m}\int_M \mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Dieses Integral wird koordinatenweise ausgewertet, also

$$(\mathbf{x}_s)_1 = \frac{1}{m}\int_M x\,\rho(x,y,z)\, d(x,y,z), \ \text{ usw.}$$

Für den Schwerpunkt $\mathbf{x}_s$ gilt

$$\int_M (\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)\rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

denn

$$\int_M (\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_M \mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\int_M \rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_M \mathbf{x}\,\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - m\,\mathbf{x}_s = \mathbf{0}.$$

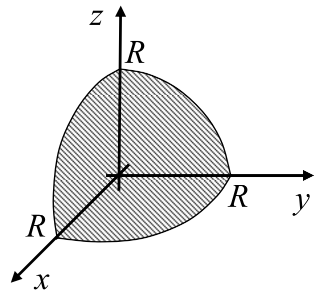
Beispiel:

Schwerpunkt des Kugeloktanten mit

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :\; x \ge 0,\;\; y \ge 0,\;\; z \ge 0,\;\; x^2+y^2+z^2 \le R^2 \right\}$$

und der Dichte

$$\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.$$



Die Masse des Kugeloktanten lautet

$$m = \int_M \rho(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_M \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z)$$

$$= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = \frac{\pi}{2}\int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta = \frac{\pi}{8} R^4.$$

Der Schwerpunkt berechnet sich mit

$$(\mathbf{x}_s)_1 = \frac{1}{m}\int_M x\,\rho(x,y,z)\,d(x,y,z) = \frac{1}{m}\int_M x\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z)$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\cos\vartheta \cdot r^3 \cos\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr$$

$$= \frac{1}{m}\int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\, d\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{m}\cdot \left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R \cdot \sin\varphi\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \big(1+\cos(2\vartheta)\big)\,d\vartheta = \frac{1}{m}\cdot\frac{R^5}{5}\cdot 1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2}{5}R$$

und aus Symmetriegründen, d.h. die anderen Koordinaten des Schwerpunktes sind gleich der 1. Koordinate, zu

$$(\mathbf{x}_s)_1 = (\mathbf{x}_s)_2 = (\mathbf{x}_s)_3 = \frac{2}{5}R.$$

9.3.2 Berechnen von Trägheitsmomenten

Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ messbar mit der Dichte $\rho(\mathbf{x})$ und g eine Gerade mit

$$g = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{r},\ |\mathbf{r}| = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\},$$

dann berechnet sich das Trägheitsmoment von M bzgl. der Geraden g zu

$$T_g = \int_M |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}|^2 \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

denn der Abstand eines Punktes P mit Ortsvektor $\mathbf{x}$ von der Geraden g ist

$$|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}|.$$

Beispiel:

Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} + \lambda\mathbf{e}_1 \;\Rightarrow\; |(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}|^2 = |(\mathbf{x} - \mathbf{0}) \times \mathbf{r}|^2 = |\mathbf{x} \times \mathbf{e}_1|^2$$

$$= \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|^2 = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}\right|^2 = y^2 + z^2.$$

Also erhalten wir für das Trägheitsmoment bzgl. der x-Achse

$$T_x = \int_M (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, d(x,y,z).$$

Analog gilt für die Trägheitsmomente T_y und T_z bzgl. der y- bzw. z-Achse

$$T_y = \int_M (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

bzw.

$$T_z = \int_M (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\, d(x,y,z).$$

Z.B. für einen Zylinder mit Radius R, Höhe h und Dichte $\rho(\mathbf{x}) \equiv 1$, d.h.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \; x^2 + y^2 \le R^2, \; 0 \le z \le h \right\},$$

ergibt sich das Trägheitsmoment bzgl. der z-Achse zu

$$\begin{aligned} T_z &= \int_M (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\, d(x,y,z) \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h r^3 dz\, d\varphi\, dr \\ &= \int_0^R r^3 dr \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^h dz \\ &= \frac{r^4}{4}\bigg|_0^R \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot z\Big|_0^h = \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot h = \frac{\pi h R^4}{2}. \end{aligned}$$

Satz 9-15: (*Satz von Steiner*)
Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ messbar mit der Dichte $\rho(\mathbf{x})$ und $\mathbf{x}_s$ der Schwerpunkt. Ferner sei s eine Gerade durch den Schwerpunkt und g eine zu s parallele Gerade, d.h.

$$s = \left\{\mathbf{x} : \; \mathbf{x} = \mathbf{x}_s + \lambda\mathbf{r}, \; |\mathbf{r}| = 1\right\} \text{ und } g = \left\{\mathbf{x} : \; \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{r}, \; |\mathbf{r}| = 1\right\}.$$

Dann gilt

$$T_g = T_s + m\left|(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}\right|^2,$$

wobei m die Masse von M und $\left|(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}\right|$ der Abstand zwischen der Geraden s und der Geraden g ist.

Beweis:

$$\begin{aligned} T_g = \int_M \left|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}\right|^2 \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_M \left|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s + \mathbf{x}_s - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}\right|^2 \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ &= \int_M \left|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \times \mathbf{r} + (\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_0) \times \mathbf{r}\right|^2 \rho(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Ausnutzen von

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^T(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{a} + 2\,\mathbf{a}^T\mathbf{b} + \mathbf{b}^T\mathbf{b}$$

liefert

$$T_g = \int_M |(\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)\times\mathbf{r}|^2 \rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int_M |(\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{r}|^2 \rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

$$+2\int_M \big((\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)\times\mathbf{r}\big)^T \big((\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{r}\big)\,\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Da das letzte Integral wegen

$$\int_M (\mathbf{x}-\mathbf{x}_s)\rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

null ist, gilt

$$T_g = T_s + \int_M \rho(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\cdot|(\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{r}|^2 = T_s + m|(\mathbf{x}_s-\mathbf{x}_0)\times\mathbf{r}|^2.$$

Aufgabe 9-1: Berechnen Sie $\int_B f(x,y)\,d(x,y)$ für

$$f(x,y) = y\,e^{xy} \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y)^T : \; 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\right\}.$$

Aufgabe 9-2: Bestimmen Sie $\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z)$ für

$$f(x,y,z) = xy + z \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y,z)^T : \; 0 \le x \le 2, \; 0 \le y \le 1, \; 2 \le z \le 4\right\}.$$

Aufgabe 9-3: Berechnen Sie $\int_B f(x,y)\,d(x,y)$ für

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

und B einem Bereich der (x,y)-Ebene, der durch die Geraden $y = 1$, $x = 2$ und die Parabel $y = x^2$ berandet wird.

Aufgabe 9-4: Bestimmen Sie das Volumen des endlichen Körpers K, der von den Flächen

$$F_1 = \left\{(x,y,z)^T : \; y = 0\right\}, \quad F_2 = \left\{(x,y,z)^T : \; y = 5\right\},$$
$$F_3 = \left\{(x,y,z)^T : \; z = 0\right\}, \quad F_4 = \left\{(x,y,z)^T : \; z = 4 - x^2\right\}$$

berandet wird.

Aufgabe 9-5: Berechnen Sie die Masse des endlichen Körpers K, der von den Flächen

$$F_1 = \left\{(x,y,z)^T : \; x = 0\right\}, \quad F_2 = \left\{(x,y,z)^T : \; y = 0\right\}, \quad F_3 = \left\{(x,y,z)^T : \; z = 1\right\},$$
$$F_4 = \left\{(x,y,z)^T : \; z = 2\right\}, \quad F_5 = \left\{(x,y,z)^T : \; x^2 + y^2 = 4\right\}$$

im 1. Oktanten berandet wird und die Dichte $\rho(x,y,z) = x^2 y$ besitzt.

Aufgabe 9-6: Bestimmen Sie $\int_B f(x,y)\,d(x,y)$ für

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y)^T : \; x^2 + y^2 \le 4, \; x \ge 0\right\}.$

b) $f(x,y) = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y)^T : \; (x-1)^2 + (y-1)^2 \le 1\right\}.$

Aufgabe 9-7: Bestimmen Sie $\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z)$ für

$$f(x,y,z) = x^2 y \quad \text{und} \quad B = \left\{(x,y,z)^T :\ 0 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1,\ y \ge 0\right\}.$$

Aufgabe 9-8: Berechnen Sie $\int_B f(x,y,z)\,d(x,y,z)$ für

$$f(x,y,z) = \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

und B einem Bereich des 3^3, der durch die Ebenen $z = 1$, $z = 4$ und durch die Mantelfläche eines Kreiskegels berandet wird. Der Kegel besitze den Öffnungswinkel $2\pi/3$, die Kegelachse sei gleich der z-Achse und die Spitze des Kegels befinde sich in (0,0,0).

Aufgabe 9-9: Ermitteln Sie

a) den Schwerpunkt einer Vollhalbkugel der Dichte 1 vom Radius 1,

b) die Trägheitsmomente T_x, T_y und T_z einer Vollkugel der Dichte 1 vom Radius 1 mit Mittelpunkt in (0,0,0) bzw. (1,1,0).