Abgabe: KW 42

Aufgabe 3-0a:

Berechnen Sie für die folgenden Funktionen die Fourier-Reihe in komplexer Darstellung.

a) $$f(t)=\begin{cases} A & \text{für } T/2-\tau \le t < T/2 \\ -A & \text{für } T/2 \le t < T/2+\tau \\ 0 & \text{für alle übrigen } t\in[0,T) \end{cases} \quad \text{und } f(t)=f(t-T) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

b) $$f(t)=A\cos(\omega_0 t) \quad \text{für} \quad 0\le t<\frac{\pi}{\omega_0}=T \quad \text{und} \quad f(t)=f(t-T) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

c) $$f(t)=e^{-\beta t} \quad \text{für } t\in(-T/2,T/2) \text{ mit } \beta\neq 0 \text{ und } f(t)=f(t-T) \quad \forall t\in\mathbb{R}$$

Aufgabe 3-0b:

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der folgenden Funktionen.

a) $$f(t)=\begin{cases} 1-|t|/T & \text{für } -T\le t\le T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $$f(t)=1_{(0,T]}(t)-1_{[-T,0)}(t)=\begin{cases} 1 & \text{für } 0<t\le T \\ -1 & \text{für } -T\le t<0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c) $$f(t)=e^{-\alpha t^2} \qquad \left(\text{Hinweis: } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}\right)$$

d) $$f(t)=\begin{cases} \sin(\omega_0 t) & \text{für } |t|\le \pi/\omega_0 = T_0/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Abgabe: KW 43

Aufgabe 3-1:

Berechnen Sie die folgenden Integrale falls existent

a) $\int_B \frac{x^2 e^x}{(1+y^2)^2} d(x,y) \quad$ für $\quad B = \{(x,y)^T : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

b) $\int_B x^2 y \left(\cos(xy^2) + e^{xy}\right) d(x,y) \quad$ für $\quad B = \{(x,y)^T : 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le 2\}$

Aufgabe 3-2:

Sei $B = \{(x,y)^T : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)/(x^2+y^2)^2 & \text{für} \quad (x,y)^T \in B, x^2+y^2 > 0 \\ 0 & \text{für} \quad (x,y)^T = (0,0)^T \end{cases}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy$$

das f auf B nicht stetig ist.

Aufgabe 3-3:

Gegeben seien

a) $M = \{(x,y)^T : y - x + 2 \ge 0, y + x - 1 \le 0, y^2 - x \le 0\}$

b) $M = \{(x,y)^T : x^2 + y^2 \le 4, x^2 + y^2 \le 4y\}$

Skizzieren Sie M. Untersuchen Sie, ob M messbar ist und bestimmen Sie ggf. den Flächeninhalt von M.

Aufgabe 3-4:

Es sei für $c > 0$ der Bereich B_c die abgeschlossene Dreiecksfläche in der (x,y)-Ebene mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(c,c/2)$ und $(c,2c)$. Skizzieren Sie B_c und berechnen Sie

$$\int_{B_c} y^2 e^{-x^2}\, d(x,y)$$

sowie falls existent

$$\lim_{c\to\infty} \int_{B_c} y^2 e^{-x^2}\, d(x,y).$$

Abgabe: KW 44

Aufgabe 3-5:
Es sei B derjenige beschränkte Bereich des $\mathbb{R}^3$, der von den Flächen

$$x = 0,\ y = 0,\ z = 0 \quad \text{und} \quad x + y + z = 1$$

begrenzt wird. Berechnen Sie den Rauminhalt von B und

$$\int_B \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, d(x,y,z)\,.$$

Aufgabe 3-6:
Berechnen Sie $\int_B f(x,y)\, d(x,y)$ für

a) $B = \left\{(x,y)^T :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ x/\sqrt{3} \le y \le x\sqrt{3},\ x \ge 0\right\}$ und $f(x,y) = \arctan\left(y/x\right)$.

b) $B = \left\{(x,y)^T :\ 4x^2 + 9y^2 \le 36\right\}$ und $f(x,y) = xy$.

Aufgabe 3-7:
Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Kugelschicht, d.h.

$$M = \left\{(x,y,z)^T :\ x^2 + y^2 + z^2 \le \rho^2,\ a \le z \le b\right\} \text{ für } a,b,\rho \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 \le a \le b \le \rho$$

Berechnen Sie den Rauminhalt von M.

Abgabe: KW 45

Aufgabe 3-8:

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ diejenige abgeschlossene Menge im ersten Quadraten, die von den Kurven

$$xy = 4,\ \ xy = 8,\ \ xy^3 = 5 \quad \text{und} \quad xy^3 = 15$$

berandet wird. Skizzieren Sie B und bestimmen Sie den Flächeninhalt von B.

Aufgabe 3-9:

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ derjenige Körper oberhalb der (x,y)-Ebene, der von den Flächen

$$x^2 + y^2 = 2z \quad \text{und} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3$$

begrenzt wird und dessen Massendichte in jedem seiner Punkte gleich der Quadratsumme der Koordinaten ist. Skizzieren Sie K und bestimmen Sie die Masse von K.

Aufgabe 3-10:

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ derjenige endliche homogene Körper im ersten Oktanten, der von den Koordinatenebenen und der Fläche

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

begrenzt wird. Bestimmen Sie den Schwerpunkt von K.

Abgabe: KW 46

Aufgabe 3-11:
Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Lösbarkeit und bestimmen Sie ggf. deren Lösungsgesamtheiten.

a) $y' = 4x^3(y^3 - y)$

b) $y' \tan y = 1$

c) $xy\, y' = 1 - x + y - xy$

Aufgabe 3-12:
Lösen Sie – falls möglich – die folgenden AWP

a) $y' - \frac{2}{x} y = \frac{x}{y}, \quad y(-1) = 2$

b) $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \quad y(1) = 2$

c) $xy' - y - \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \quad y(1) = 0$

Aufgabe 3-13:
Bestimmen Sie Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungen

a) $y' - \frac{x}{1 + x^2} y = x - 1$

b) $y' \sin x - y \cos x = 4 \sin^4 x$

Aufgabe 3-14:
Lösen Sie das AWP

$$y' = 3x - 2y + 5, \quad y(0) = 1$$

a) direkt

b) nach dem Verfahren von Picard-Lindelöf.

Abgabe: KW 47

Aufgabe 3-15:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungen

a) $y' + \frac{y}{x} - x^2 y^6 = 0$

b) $y' = -xy - \frac{1}{2}(xy)^3$

Aufgabe 3-16:
Untersuchen Sie die folgenden Differentialgleichungen auf Lösbarkeit und bestimmen Sie ggf. deren Lösungsgesamtheiten.

a) $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}$, Substitution $u(x) = x\,y(x)$

b) $y' = \frac{y(1+xy)}{x}$, Substitution $u(x) = 1/y(x)$

c) $x(1+x^4)y' = (1+x^4)y - 4x^5 \tan\frac{y}{x}$, Substitution $u(x) = y(x)/x$

Aufgabe 3-17:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungen

a) $y''' = (y'')^3$

b) $(y'')^2 = \left(y'/x\right)^2 + y'y'''$

Abgabe: KW 48

Aufgabe 3-18:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungen

a) $y'' - y' - 12y = 0$

b) $y''' - y'' - y' + y = 0$

c) $y'' - 2y' + 10y = 0$

d) $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$

Aufgabe 3-19:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungen

a) $y''' - 2y' - 4y = 10\, e^{-x}$

b) $y''' - 2y'' + y' = e^{x} \cos x$

c) $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 16 \sin(2x)$

Aufgabe 3-20:
Lösen Sie die folgenden AWP

a) $y'' + y = 2\cos x + x, \quad y(\pi) = 2\pi,\ y'(\pi) = \pi$

b) $y''' - 2y'' + 10y' = 5x^3 - 3x^2 + 3x - 10, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 3,\ y''(0) = -2$

Abgabe: KW 49

Aufgabe 3-21:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungssysteme

a)
$$\begin{aligned} y_1' + y_2' - y_1 &= 2x+1 \\ 2y_1' + 2y_2' + y_1 &= x \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y_1' + 2y_1 + 3y_2 &= 0 \\ 3y_1 + y_2' + 2y_2 &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

Aufgabe 3-22:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungssysteme

a) $$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) $$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$$

Aufgabe 3-23:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheiten der folgenden Differentialgleichungssysteme

a) $$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

b) $$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ -e^{2x} \end{pmatrix}$$

Abgabe: KW 50

Aufgabe 3-24:
Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte $F(s)$ von $f(t)$ für

a) $f(t) = (t/T - 1/2) \cdot 1_{[0,T)}(t)$

b) $f(t) = \sin^2(3t) \cdot 1_{[0,\infty)}(t)$

c) $f(t) = e^{-2t} \sin(2t) \cos(2t) \cdot 1_{[0,\infty)}(t)$

Aufgabe 3-25:
Bestimmen Sie für die folgenden Laplace-Transformierten die zugehörigen Funktionen $f(t)$

a) $F(s) = \dfrac{2s-8}{s^2+36}$

b) $F(s) = \ln\left(\dfrac{s+6}{s+2}\right)$

Aufgabe 3-26:
Lösen Sie die folgenden AWP mit Hilfe der Laplace-Transformation

a) $y'' + 5y' + 6y = 12e^{-t}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0$

b) $y'' - 4y' + 3y = e^{3t} \sin t, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 0$

Abgabe: KW 51

Aufgabe 3-27: Zeigen Sie, dass folgende Z-Transformationen bzw. inverse Z-Transformationen gelten.

a) $$Z\left\{n^3a^n\right\} = \frac{az(z^2+4az+a^2)}{(z-a)^4}, \quad |z|>|a|$$

b) $$Z\left\{(2n^3-3n^2+n)a^n\right\} = \frac{6a^2z(z+a)}{(z-a)^4}, \quad |z|>|a|$$

c) $$Z^{-1}\left\{\frac{z(z+a)}{(z-a)^4}\right\} = \frac{1}{6}(2n^3-3n^2+n)a^{n-2}, \quad n \geq 0$$

Aufgabe 3-28: Lösen Sie die homogene Differenzengleichung

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$$

mit dem Anfangswert $y_0 = 1$ und $y_1 = 1$ mit Hilfe

a) der Ansatzmethode

b) der Z-Transformation.

Aufgabe 3-29: Lösen Sie die Differenzengleichung

$$y_{n+1} - 4y_n = n^2 4^n$$

mit dem Anfangswert y_0 mit Hilfe

a) der Ansatzmethode

b) der Z-Transformation.

Aufgabe 3-30: Lösen Sie die Differenzengleichung

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 3^n$$

mit den Anfangswerten $y_0 = 1$ und $y_1 = 0$ mit Hilfe

a) der Ansatzmethode

b) der Z-Transformation.

Abgabe: KW 2

Aufgabe 3-31:
Berechnen Sie

a) $\operatorname{rot}\left(\mathbf{v}(x,y,z)\right)$ mit $\mathbf{v}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)^T$

b) $\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\left(\mathbf{v}(x,y,z)\right)\right)$ mit $\mathbf{v}(x,y,z)=(3xz^2,-yz,x+2z)^T$

c) $\mathbf{v}^T(x,y,z)\operatorname{grad}\left(f(x,y,z)\right)$ mit $\mathbf{v}(x,y,z)=(x^2y,y^2z,xz^2)^T$, $f(x,y,z)=xy+yz+xz$

c) $f(x,y,z)\operatorname{div}\left(\mathbf{v}(x,y,z)\right)$ mit $\mathbf{v}(x,y,z)=(x^2y,y^2z,xz^2)^T$, $f(x,y,z)=xy+yz+xz$

Aufgabe 3-32:
Seien für $a<t<b$ und $(x,y,z)^T\in G\subset\mathbb{R}^3$, G Gebiet, durch

$$\mathbf{E}=\left(E_1(x,y,z,t),E_2(x,y,z,t),E_3(x,y,z,t)\right)^T \quad \mathbf{H}=\left(H_1(x,y,z,t),H_2(x,y,z,t),H_3(x,y,z,t)\right)^T$$

Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$ gegeben, wobei $E_i,H_i\in C^2\left(G\times(a,b)\right), i=1,2,3$. Weiter gelte mit $c>0$

$$\operatorname{div}(\mathbf{E})=\operatorname{div}(\mathbf{H})=0,\quad \operatorname{rot}(\mathbf{E})=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t},\quad \operatorname{rot}(\mathbf{H})=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

Zeigen Sie, dass **E** und **H** den folgenden Gleichungen genügt

a) $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ mit $\varphi=\mathbf{E}$ bzw. $\varphi=\mathbf{H}$

b) $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2+|\mathbf{H}|^2\right)\right)+c\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})=0$

Aufgabe 3-33:
Berechnen Sie $\int_K \mathbf{v}(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{x}$ sowie $\operatorname{rot}\left(\mathbf{v}(\mathbf{x})\right)$ für

a) $K=\left\{(x,y,z)^T=(t,t/2,5t^2/4)^T,\ 0\le t\le 2\pi\right\}$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})=(x^2+xy,x^2/2+y+az,by)^T$, $a,b\in\mathbb{R}$

b) $K=\left\{(x,y,z)^T=(t,t^2,e^t)^T,\ 0\le t\le 1\right\}$, $\mathbf{v}(\mathbf{x})=(x^2-y,y^2+x,0)^T$

Aufgabe 3-34:
Sie $\mathbf{v}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $D(\mathbf{v})=\mathbb{R}^2\backslash\left\{(-1,0)^T,(3,4)^T\right\}$ gegeben durch

$$v_1(x,y)=\frac{-y}{(x+1)^2+y^2}+\frac{4-y}{(x-3)^2+(y-4)^2},\quad v_2(x,y)=\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}+\frac{x-3}{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

und $K_R=\left\{(x,y)^T\in\mathbb{R}^2\colon\ x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\right\}$. Berechnen Sie für $R>0,R\ne 1,R\ne 5$ das Kurvenintegral $\int_{K_R}\left\{v_1(x,y)dx+v_2(x,y)dy\right\}$.

Abgabe: KW 3

Aufgabe 3-35:
Seien F_1, F_2 Flächen im $\mathbb{R}^3$ mit

$$F_1 = \left\{(x, y, z)^T : \; x^2 + y^2 - 3z^2 = 0\right\} \quad \text{und} \quad F_2 = \left\{(x, y, z)^T : \; x^2 + y^2 - 4y = 0\right\}.$$

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Teilfläche F_3 von F_1, die von der Schnittkurve von F_1 und F_2 berandet wird, sowie den Flächeninhalt von F_3.

Aufgabe 3-36:
Bestimmen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)^T$$

durch den im ersten Oktanten liegenden Teil F der

a) Ebene $x + y + z = 1$

b) Oberfläche der Einheitskugel in Richtung der von (0,0,0) wegzeigenden Normalen.

Aufgabe 3-37:
Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_K \left\{(2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2)dy\right\}$$

für

a) $K = \left\{(x, y)^T : \; (\pi t^2/2, t)^T, \; 0 \le t \le 1\right\}$

b) K ist der positiv orientierte Rand des Parallelogramms mit den Eckpunkten (0,0), (3,0), (5,2) und (2,2).

Abgabe: KW 4

Aufgabe 3-38:

Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ der endliche Körper, der von den Ebenen $z=0, y=0, x=0$ und $2x+2y+z=6$ begrenzt wird, **n** der ins Innere dieses Körpers weisende Normalenvektor auf ∂B und

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (2xy+z, y^2, -x-3y)^T.$$

Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes von Gauß das Integral

$$\int_{\partial B} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma.$$

Aufgabe 3-39:

Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes von Stokes das Integral

$$\int_F (\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d\sigma$$

für $F = \left\{(x,y,z)^T : \; x^2+y^2-(z-2)^2=0, \; 0 \le z \le 2\right\}$, $\mathbf{v}(x,y,z) = (x-z, x^3+yz, -3xy^2)^T$ und $\mathbf{n}$ den von $(0,0,0)$ wegweisenden Normalenvektor auf F.

Aufgabe 3-40:

Sei $B \subset G \subset \mathbb{R}^3$ mit G offen, B ein Standardbereich mit Oberfläche ∂B, **n** der nach außen weisende Normalenvektor auf ∂B, $\mathbf{v} \in C^2(G)$. Berechnen Sie

a) $\int_{\partial B} (\operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, d\sigma$

b) $\int_{\partial B} \mathbf{n} \, d\sigma$

c) $\int_B \operatorname{div} \mathbf{n} \, d(x,y,z)$