Höhere Mathematik 4

Kapitel 14

Partielle Differentialgleichungen

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 4

Kapitel 14

Inhaltsverzeichnis

14 Partielle Differentialgleichungen

Zur mathematischen Beschreibung physikalischer Vorgänge reichen oft die Funktionen einer reellen Veränderlichen nicht aus. Daher ist die Diskussion von Gleichungen mit Funktionen von mehr als einer Veränderlichen, in denen partielle Ableitungen dieser Funktionen auftreten, für alle technischen Anwendungen wichtig, aus Zeitgründen aber nur an Beispielen durchführbar.

14.1 Grundbegriffe

Es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$ ein Gebiet mit Rand ∂G. Dann heißt, analog zu $n = 1$, eine Gleichung

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, \ldots, u_{x_{i_1} \ldots x_{i_k}}) = 0, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in G$$

zwischen einer gesuchten Funktion u und gewissen ihrer Ableitungen sowie den Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ eine partielle Differentialgleichung der Ordnung k, wenn k die höchste auftretende Ableitungsordnung ist.

Gesucht ist somit eine k-mal stetig differenzierbare Funktion u auf G, d.h. $u \in C^k(G)$, die diese Gleichung erfüllt. Auch hier ist u im allgemeinen nicht durch die Differentialgleichung sondern erst durch hinzufügen von Anfangs- bzw. Randbedingungen eindeutig festgelegt.

Für die Anwendungen sind besonders die linearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung wichtig, d.h. $k = 2$ und F ist linear in u und allen auftretenden Ableitungen. Im Falle $n = 2$ lautet die allgemeine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + d(x,y)\,u_x + e(x,y)\,u_y + f(x,y)\,u = g(x,y).$$

Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen wird auch hier wieder zwischen den Fällen einer "linearen homogenen", d.h. $g(x,y) \equiv 0$, und einer "linearen inhomogenen" partiellen Differentialgleichung unterschieden.

Beispiel:

$u_x = 0, \quad G \subset \mathbb{R}^2$

beschreibt eine lineare homogene partielle Differentialgleichung 1. Ordnung mit der Lösungsgesamtheit $u(x,y) = f(y)$, wobei $f(y)$ beliebig.

Aufgrund der Linearität gilt wie bei gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichungen der folgende Satz.

Satz 14-1:

Die Lösungen der linearen homogenen partiellen Differentialgleichung bilden einen Vektorraum (über $\mathbb{R}$).

Anmerkung:

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen hat dieser Vektorraum im allgemeinen keine endliche Dimension, so dass dieser Satz keinen Hinweis auf die Darstellung der Lösungsgesamtheit, sondern nur auf die Gewinnung weiterer Lösungen liefert.

Satz 14-2: (*Superpositionsprinzip*)

1) Sind $u_1,\ldots,u_L$ Lösungen einer linear homogenen partiellen Differentialgleichung, so ist auch jede Linearkombination

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{L} c_l\, u_l(\mathbf{x}), \quad c_l \in \mathbb{R}$$

eine Lösung.

2) Sind $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ Lösungen dieser linearen homogenen partiellen Differentialgleichung der Ordnung k und gilt für

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l\, u_l(\mathbf{x}) \quad \text{mit } c_l \in \mathbb{R} \text{ und } u \in C^k(G)$$

so ist auch u eine Lösung, falls die k-malige Differentiation gliedweise durchführbar ist.

3) Ist $u_\lambda(\mathbf{x})$ für $a \le \lambda \le b$, $\lambda \in \mathbb{R}$, Lösung einer linear homogenen partiellen Differentialgleichung, so auch

$$u(\mathbf{x}) := \int_a^b u_\lambda(\mathbf{x})\, d\lambda$$

Außerdem kann wie bei gewöhnlichen linearen inhomogenen Differentialgleichungen der folgende Satz formuliert werden.

Satz 14-3:

Die Lösungsgesamtheit der linearen inhomogenen partiellen Differentialgleichung ist darstellbar als Summe der Lösungsgesamtheit der zugehörigen linearen homogenen partiellen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der linearen inhomogenen partiellen Differentialgleichung.

Wie schon erwähnt, sind neben der Differentialgleichung im allgemeinen noch Anfangs- und Randbedingungen zu erfüllen, die zur Differentialgleichung "passen" müssen.

Beispiel:

Es sei $G = \{(x,y): x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ dann hat $u_x = 0$ in G die Lösung $u(x,y) = f(y)$.
Mit der Bedingung

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad y > 0$$

kann f gemäß $f(y) = \varphi(y)$ festgelegt werden.
Demgegenüber wäre eine Bedingung

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad x > 0$$

wohl kaum sinnvoll, da die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung nicht von x abhängt.

Definition 14-1:

Ein mathematisches Problem heißt sachgerecht (korrekt gestellt), wenn gilt:

a) Es gibt eine Lösung.
b) Die Lösung ist eindeutig.
c) Die Lösung hängt stetig von den Anfangsdaten ab.

Anmerkung:

Bei einem sachgerechten Problem dürfen also keine Widersprüche in der Problemstellung auftauchen, es muss vollständig gestellt sein, und seine Lösung muss insbesondere von möglichen Fehlern der Eingangsdaten, wie sie z.B. durch Rundungsfehler bei der numerischen Behandlung von Anfangswertaufgaben auftreten können, stetig abhängen.

Für den besonders wichtigen Spezialfall $n = 2$ soll nun eine Einteilung der partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + h(x,u,u_x,u_y) = 0$$

die in den Ableitungen 2. Ordnung linear sind und die man als quasilineare oder fastlineare partielle Differentialgleichung bezeichnet, vorgenommen werden, die zusammen mit Aussagen über die auftretenden Randbedingungen und die Randkurve des Gebietes G die Beurteilung gestatten, ob das gestellte Problem sachgerecht ist.

Definition 14-2:

Die Differentialgleichung

$$a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} = h(x,u,u_x,u_y)$$

mit $D(x,y) := a(x,y)c(x,y) - b^2(x,y)$ heißt in $G \subset \mathbb{R}^2$

1) elliptisch, falls $D(x,y) > 0$ in G
2) parabolisch, falls $D(x,y) = 0$ in G
3) hyperbolisch, falls $D(x,y) < 0$ in G.

Offenbar ist der Typ im allgemeinen ortsabhängig, falls nicht $a(x,y)$, $b(x,y)$ und $c(x,y)$ konstant sind.

Beispiel:

1) Wellengleichung

$$u_{yy} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad G = \{(x,y):\ y > 0\}$$

$$\Rightarrow\ D = -c^2 < 0 \ \Rightarrow\ \text{hyperbolisch}$$

2) Laplace-Gleichung

$$u_{yy} + u_{xx} = 0, \quad G = \{(x, y):\ x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\Rightarrow\ D = 1 > 0\ \Rightarrow\ \text{elliptisch}$$

Nach Klassifizierung der Randbedingungen gemäß

Definition 14-3:

Eine Randbedingung heißt

1) Dirichlet-Bedingung, wenn u auf ∂G
2) Neumann-Bedingung, wenn $\partial u / \partial \mathbf{n}$ auf ∂G (**n** zeigt ins Innere)
3) Cauchy-Bedingung, wenn u und $\partial u / \partial \mathbf{n}$ auf ∂G

gegeben sind.

kann man den folgenden Satz zeigen, vgl. Morse and Feshback, Methods of Theoretical Physics I, 1953.

Satz 14-4:

Die folgenden Probleme sind sachgerecht.

Gleichungstyp	Rand von *G*	Randbedingung
Hyperbolisch	offen	Cauchy
Parabolisch	offen	Dirichlet oder Neumann
Elliptisch	geschlossen	Dirichlet oder Neumann

Dabei bedeutet "Rand von G geschlossen" bzw. "Rand von G offen", dass ∂G eine einfach geschlossene Kurve bzw. keine geschlossene Kurve ist.

Damit liefert das Beispiel auf S. 14-8 (Wellengleichung) ein sachgerechtes Problem, falls auf ∂G eine Cauchy-Bedingung vorgeschrieben wird. Für das Beispiel auf S. 14-9 (Laplace-Gleichung) muss eine Dirichlet oder Neumann-Bedingung gegeben sein.

14.2 Lösungsverfahren für die Wellengleichung

Die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

repräsentiert einen wichtigen Grundtypen partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung. Um einen Einblick in den Charakter der Lösungen zu gewinnen, soll zunächst das reine Anfangswertproblem der Wellengleichung (z.B. eine unendlich Lange schwingende Saite) betrachtet werden.

14.2.1 Anfangswertproblem der Wellengleichung

Gegeben sei das sachgerechte Problem

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

mit

$$G = \{(x,t):\ t > 0\}, \quad \underbrace{u(x,0) = \varphi(x)}_{\text{Anfangslage}}, \quad \underbrace{u_t(x,0) = \psi(x)}_{\text{Anfangsgeschwindigkeit}}.$$

Wir führen die neuen Variablen σ und η ein mit

$$\sigma = x - ct, \quad \eta = x + ct$$

Für $u(x,t) = w(\sigma,\eta)$ gilt dann

$$u_x = w_\sigma \sigma_x + w_\eta \eta_x = w_\sigma + w_\eta,$$

$$u_{xx} = w_{\sigma\sigma}\sigma_x + w_{\sigma\eta}\eta_x + w_{\eta\sigma}\sigma_x + w_{\eta\eta}\eta_x = w_{\sigma\sigma} + 2w_{\sigma\eta} + w_{\eta\eta},$$

$$u_t = w_\sigma \sigma_t + w_\eta \eta_t = -cw_\sigma + cw_\eta,$$

$$u_{tt} = -c(w_{\sigma\sigma}\sigma_t + w_{\sigma\eta}\eta_t) + c(w_{\eta\sigma}\sigma_t + w_{\eta\eta}\eta_t) = c^2 w_{\sigma\sigma} - 2c^2 w_{\sigma\eta} + c^2 w_{\eta\eta}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2(w_{\sigma\sigma} - 2w_{\sigma\eta} + w_{\eta\eta}) - c^2(w_{\sigma\sigma} + 2w_{\sigma\eta} + w_{\eta\eta})$$

$$= -4c^2 w_{\sigma\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_{\sigma\eta} = 0, \quad \text{da } c > 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung lässt sich wegen

$$w_{\sigma\eta} = (w_\sigma)_\eta = 0 \ \Rightarrow \ w_\sigma \ \text{ ist unabhängig von } \eta \ \Rightarrow \ w_\sigma = f(\sigma)$$

einfach durch integrieren lösen, d.h.

$$w(\sigma,\eta)=\int f(\sigma)d\sigma+G(\eta),$$

wobei die Integrationskonstante von η abhängt. Ist $F(\sigma)$ eine Stammfunktion von $f(\sigma)$, dann gilt

$$w(\sigma,\eta)=F(\sigma)+G(\eta).$$

Hieraus ergibt sich nach Rücksubstitution die Lösungsgesamtheit der homogenen Wellengleichung in G zu

$$u(x,t)=F(x-ct)+G(x+ct),$$

wobei F und G beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktionen sind. Die Funktionen F und G können nun mit Hilfe der Anfangsbedingungen

$$\varphi(x)=u(x,0)=F(x)+G(x)$$

und

$$\psi(x)=u_t(x,0)=-c\,F'(x)+c\,G'(x)$$

bestimmt werden.

Ist χ eine Stammfunktion von ψ für $x \in \mathbb{R}$, so kann die Lösung dieses Gleichungssystems für F und G dargestellt werden als

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x)-\frac{1}{c}\chi(x)\right) \quad \text{und} \quad G(x)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x)+\frac{1}{c}\chi(x)\right).$$

Die (d'Alembert) Lösung insgesamt lautet somit schließlich

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\big)+\frac{1}{2c}\big(\chi(x+ct)-\chi(x-ct)\big).$$

Physikalisch wird hier der Zustand einer schwingenden unendlich langen Saite beschrieben. $u(x,t)$ ist die Auslenkung aus der Ruhelage am Ort x zum Zeitpunkt t, wobei Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit ($t=0$) vorgegeben sind. Die Lösung kann interpretiert werden als Superposition zweier Wellen, die sich mit der Geschwindigkeit c in entgegengesetzten Richtungen ausbreiten.

14.2.2 Anfangs-Randwertproblem der Wellengleichung

A) Gegeben sei das sachgerechte Problem

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

mit

$$G = \{(x,t):\ t > 0,\ 0 < x < l\}$$

den Anfangsbedingungen

$$\underbrace{u(x,0) = \varphi(x)}_{\text{Anfangslage}}, \quad \underbrace{u_t(x,0) = \psi(x)}_{\text{Anfangsgeschwindigkeit}}$$

und den Randbedingungen

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \ \text{ für } \ t \geq 0,$$

z.B. die Schwingung einer bei $x = 0$ und $x = l$ eingespannten Saite.

Damit die Nebenbedingungen überhaupt erfüllbar sind, muss gelten

$$\varphi(0) = u(0,0) = 0, \quad \psi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(l) = u(l,0) = 0, \quad \psi(l) = 0.$$

Offenbar können die hinzugekommenen Nebenbedingungen nicht ohne Schwierigkeiten in die in Kapitel 14.2.1 gefundene Lösung eingearbeitet werden. Es ist daher günstiger, eine andere Darstellungsform der Lösungen der Differentialgleichung zu bestimmen, bei der dies einfacher ist.

<u>Separationsansatz</u>

$$u(x,t) = u_1(x)\,u_2(t) \neq 0$$

Obwohl dieser Ansatz sicher im allgemeinen nicht zur Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung führt, liefert er ein Standardverfahren zur Lösung von Anfangs-Randwertproblemen bei partiellen Differentialgleichungen.

Einsetzen von

$$u_{xx}(x,t) = u_1''(x)\,u_2(t) \quad \text{und} \quad u_{tt}(x,t) = u_1(x)\,u_2''(t)$$

in die Wellengleichung liefert

$$u_1 u_2'' - c^2 u_1'' u_2 = 0$$

und damit

$$\frac{u_1''}{u_1} = \frac{1}{c^2}\frac{u_2''}{u_2}$$

Da die linke Seite eine Funktion von x allein, die rechte eine von t allein ist, kann Gleichheit nur bestehen, falls beide konstant sind, etwa gleich $-\gamma$, mit $\gamma \in \mathbb{R}$. Also erhält man die zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$u_1'' = -\gamma u_1 \quad \text{und} \quad u_2'' = -c^2 \gamma u_2 .$$

Mit den Nebenbedingungen führt dies für u_1 auf die "Eigenwertaufgabe"

$$u_1'' + \gamma u_1 = 0, \quad u_1(0) = u_1(l) = 0$$

die zunächst falls möglich gelöst werden soll.

Die Lösungsgesamtheit der gewöhnlichen Differentialgleichungen für u_1 hängt von dem unbekannten Wert von γ ab.

a) $\gamma < 0: \quad u_1(x) = c_1 e^{\sqrt{-\gamma}\, x} + c_2 e^{-\sqrt{-\gamma}\, x}$

Randbedingungen liefern Gleichungssystem für c_1, c_2:

$$0 = u_1(0) = c_1 + c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = -c_1$$

$$0 = u_1(l) = c_1 e^{\sqrt{-\gamma}\, l} + c_2 e^{-\sqrt{-\gamma}\, l} = 2c_1 \sinh\left(\sqrt{-\gamma}\, l\right)$$

das offenbar nur trivial lösbar ist, so dass $\gamma < 0$ für die Lösung der partiellen Differentialgleichung bei den gegebenen Nebenbedingungen nicht in Frage kommt.

b) $\gamma = 0: \quad u_1(x) = c_1 + c_2 x$

Randbedingungen liefern Gleichungssystem für c_1, c_2:

$$0 = u_1(0) = c_1$$

$$0 = u_1(l) = c_1 + c_2 l$$

$\Rightarrow \; c_1 = c_2 = 0$, da $l > 0$, also keine Lösung

c) $\gamma > 0: \quad u_1(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\gamma}\, x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\gamma}\, x\right)$

Randbedingungen liefern Gleichungssystem für c_1, c_2:

$$0 = u_1(0) = c_1$$

$$0 = u_1(l) = c_1 \cos\left(\sqrt{\gamma}\, l\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\gamma}\, l\right) = c_2 \sin\left(\sqrt{\gamma}\, l\right)$$

Dieses System ist (bei gegebenem $l > 0$) nicht-trivial lösbar, falls

$$\gamma = \gamma_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 .$$

Die γ_n, $n \in \mathbb{N}_0$ heißen Eigenwerte. Man erhält dazu die nicht-trivialen Lösungen

$$u_{1,n}(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Für $\gamma = \gamma_n$ erhält man für die Differentialgleichung

$$u_2'' + c^2 \gamma u_2 = 0$$

die Lösungsgesamtheit

$$u_{2,n}(t) = d_{1,n} \cos\left(\frac{\pi n c}{l} t\right) + d_{2,n} \sin\left(\frac{\pi n c}{l} t\right), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad d_{1,n}, d_{2,n} \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt sind damit

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= u_{1,n}(x)\, u_{2,n}(t) \\ &= a_n \cos\left(\frac{\pi n c}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n c}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \end{aligned}$$

für $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ Lösungen der Wellengleichung, die jedoch im allgemeinen nicht einzeln die Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad u_t(x,0) = \psi(x)$$

befriedigen können.

Anwendung des Superpositionsprinzips liefert mit

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n c}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n c}{l} t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \right)
\end{aligned}
$$

eine Lösung der Wellengleichung, sofern die Reihe zweimal gliedweise differenziert werden darf (was bei geeigneter Wahl der a_n, b_n sicher möglich ist).

Die Koeffizienten a_n, b_n kann man nun oft so bestimmten, dass die Anfangsbedingungen

$$
\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)
$$

$$
\psi(x) = u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\pi n c}{l} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)
$$

erfüllt werden. Lassen sich $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in $0 \le x \le l$ in Fourier-Reihen entwickeln

$$
\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n c}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)
$$

so liefert

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n c}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n c}{l} t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) \right)
$$

die Lösung der Wellengleichung unter den gestellten Nebenbedingungen, wenn diese Reihe zwei Mal gliedweise differenzierbar ist (was als Bedingung an $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ aufgefasst werden kann).

B) Gegeben sei das sachgerechte Problem

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c \in \mathbb{R}, \quad c > 0$$

mit

$$G = \{(x,t):\ 0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty\},$$

den Anfangsbedingungen

$$\underbrace{u(x,0) = 0,\ x \geq 0}_{\text{Anfangslage}}, \quad \underbrace{u_t(x,0) = 0,\ x \geq 0}_{\text{Anfangsgeschwindigkeit}}$$

und den Randbedingungen

$$u(0,t) = h(t),\ u(\infty,t) = 0 \ \text{ für } \ t \geq 0 \ \text{ mit } \ h(0) = 0,\ \lim_{t \to \infty} h(t) = 0.$$

Physikalisch handelt es sich um eine "halbunendliche" Saite, die bei $t = 0$ in Ruhe und in "∞" fest eingespannt ist sowie bei $x = 0$ "bewegt" wird. In diesem Fall liefert die Anwendung der Laplace-Transformation ein günstiges Lösungsverfahren.

Anwendung der Laplace-Transformation

Hierbei besteht das Prinzip darin durch Anwendung der Laplace-Transformation auf eine partielle Differentialgleichung eine Ableitungssorte verschwinden zu lassen, so dass im Falle $n = 2$ aus einer partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung wird. Sei

$$U(x,s) := \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt$$

falls das Integral konvergiert, was als Voraussetzung an u gedeutet werden kann (es sollen nur solche Lösungen $u(x,t)$ bestimmt werden, die Laplace-transformierbar sind und für die die im folgenden auftretenden Integrale "genügend gut" konvergieren). Dann gilt

$$U_{xx}(x,s) = \int_0^\infty u_{xx}(x,t)\, e^{-st} dt$$

falls

$$\int_0^\infty u(x,t)\,e^{-st}dt, \quad \int_0^\infty u_x(x,t)\,e^{-st}dt \quad \text{und} \quad \int_0^\infty u_{xx}(x,t)\,e^{-st}dt$$

gleichmäßig in x und s konvergieren und

$$\int_0^\infty u_{tt}(x,t)\,e^{-st}dt = s^2\,U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$$

nach Satz 11-3d.

Somit liefert die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Wellengleichung unter Berücksichtigung der Werte $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$U_{xx} - (s/c)^2 U = 0.$$

Dazu kommen die Randbedingungen

$$U(0,s) = \int_0^\infty u(0,t)\,e^{-st}dt = \int_0^\infty h(t)\,e^{-st}dt =: H(s) \quad \text{und} \quad U(\infty,s) = 0.$$

Für $c > 0$, $s > 0$ hat die Differentialgleichung die Lösungsgesamtheit

$$U(x,s) = c_1(s)\,e^{(s/c)x} + c_2(s)\,e^{-(s/c)x},$$

wobei sich c_1 und c_2 aus den Randbedingungen

$$H(s) = U(0,s) = c_1(s) + c_2(s)$$
$$0 = U(\infty,s) = \lim_{x\to\infty}\left(c_1(s)\,e^{(s/c)x} + c_2(s)\,e^{-(s/c)x}\right)$$

zu $c_1(s) = 0$ und $c_2(s) = H(s)$ ergeben. Die Lösung lautet demzufolge

$$U(x,s) = H(s)\,e^{-(s/c)x}, \quad c > 0, s \ge 0, x \ge 0.$$

Mit dem Verschiebungssatz, vgl. Satz 11-3c, erhält man daraus

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le x/c \\ h(t - x/c) & x/c \le t \end{cases}.$$

Die Probe bestätigt

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h''(t - x/c) - c^2\,(-1/c)^2\,h''(t - x/c) = 0$$

sowie die Nebenbedingungen

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=0, \quad u(0,t)=h(t), \quad u(\infty,t)=0.$$

Bei partiellen Differentialgleichungen kommt es somit darauf an, die Lösungen der Differentialgleichung zu bestimmen, die am besten an die gegebenen Anfangs- und Randbedingungen angepasst werden können. Dazu ist es natürlich wichtig, möglichst viele Lösungsansätze zu kennen. Als ein besonders wichtiges Verfahren stellt sich dabei der Separationsansatz heraus, möglicherweise unter Benutzung verschiedener Koordinatensysteme (je nach Form von G).

Beispiel:

$$u_{tt}-4u_{xx}=0, \quad G=\left\{(x,t): \quad 0<x<5,\ 0<t<\infty\right\},$$

$$u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=5\sin(\pi x) \quad \text{(Anfangsbedingungen)}$$

$$u(0,t)=u(5,t)=0 \qquad \text{(Randbedingungen)}$$

1) Für die Lösungsgesamtheit gilt in G

$$u(x,t)=f(x-2t)+g(x+2t)$$

Anfangsbedingungen liefern

$$0=u(x,0)=f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad 5\sin(\pi x)=u_t(x,0)=-2f'(x)+2g'(x)$$

$$\Rightarrow f(x)=-g(x), \quad 4g'(x)=5\sin(\pi x)$$

$$\Rightarrow g(x)=-\frac{5}{4\pi}\cos(\pi x)+C \Rightarrow f(x)=\frac{5}{4\pi}\cos\pi x-C$$

und damit

$$u(x,t)=\frac{5}{4\pi}\Big(\cos\big(\pi(x-2t)\big)-\cos\big(\pi(x+2t)\big)\Big)=\frac{5}{2\pi}\sin(\pi x)\sin(2\pi t)$$

wobei $u(x,t)$ neben der Differentialgleichung und den Anfangsbedingungen $u(x,0)=0$ und $u_t(x,0)=5\sin(\pi x)$, wie die Probe zeigt, auch die Randbedingungen $u(0,t)=u(5,t)=0$ erfüllt.

2) Separationsansatz liefert

$$u_1'' + \gamma u_1 = 0 \qquad u_1(0) = u_1(5) = 0$$

$$u_2'' + 4\gamma u_2 = 0$$

sowie analog zu Seite 14-18 mit

$$\gamma = \gamma_n = \left(\frac{\pi n}{5}\right)^2$$

die Lösungen

$$u_{1,n}(x) = c_n \sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right) \quad \text{bzw.} \quad u_{2,n}(t) = d_{1,n}\cos\left(\frac{2\pi n}{5}t\right) + d_{2,n}\sin\left(\frac{2\pi n}{5}t\right)$$

und nach Superposition schließlich die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{5}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{5}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)\right).$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$\varphi(x) = u(x,0) \equiv 0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)$$

$$\psi(x) = u_t(x,0) = 5\sin(\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{2\pi n}{5}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{5}x\right)$$

folgt hier

$$a_n = 0 \;\text{ für }\; n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad b_n = \begin{cases} 5/2\pi & \text{für } n = 5 \\ 0 & \text{für } n \in \mathbb{N}, n \neq 5 \end{cases},$$

so dass

$$u(x,t) = \frac{5}{2\pi}\sin(2\pi t)\sin(\pi x).$$

3) Anwendung der Laplace-Transformation liefert für

$$U(x,s) = \int_0^\infty u(x,t) e^{-st} dt$$

mit

$$U_{xx}(x,s) = \int_0^\infty u_{xx}(x,t) e^{-st} dt$$

und

$$\int_0^\infty u_{tt}(x,t) e^{-st} dt = s^2 U(x,s) - s\,u(x,0) - u_t(x,0)$$

die Differentialgleichung in x

$$4U_{xx}(x,s) - s^2 U(x,s) + 5\sin(\pi x) = 0$$

mit der Lösungsgesamtheit

$$U(x,s) = \frac{5}{s^2 + 4\pi^2} \sin(\pi x) + c_1(s) e^{(s/2)x} + c_2(s) e^{-(s/2)x}$$

Die Randbedingungen $U(0,s) = U(5,s) = 0$ liefern

$$0 = c_1(s) + c_2(s)$$

$$0 = c_1(s) e^{(5/2)s} + c_2(s) e^{-(5/2)s}$$

und damit $c_1(s) = c_2(s) = 0$, d.h.

$$U(x,s) = \frac{5}{s^2 + 4\pi^2} \sin(\pi x) = \frac{5}{2\pi} \frac{2\pi}{s^2 + (2\pi)^2} \sin(\pi x).$$

Mit Hilfe der im Beispiel auf Seite 11-12 angegebenen Korrespondenz ergibt sich die Lösung dann ebenfalls zu

$$u(x,t) = \frac{5}{2\pi} \sin(2\pi t) \sin(\pi x).$$

14.3 Lösungsverfahren für die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t - a^2 u_{xx} = g(x,t), \quad a > 0$$

ist in

$$G = \{(x,t): \quad 0 < x < l,\ 0 < t\}$$

eine lineare inhomogene parabolische Differentialgleichung. Eine passende (sachgerechte) Nebenbedingung auf ∂G ist etwa

$$\begin{aligned} &u(0,t) = u(l,t) = 0 && \text{für} \quad t \geq 0 \\ &u(x,0) = r(x) && \text{für} \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned},$$

wobei gelten muss

$$u(0,0) = r(0) = u(l,0) = r(l) = 0.$$

Der Separationsansatz für das zugehörige homogene Problem

$$\begin{aligned} &u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = r(x) \end{aligned}$$

liefert mit

$$u(x,t) = u_1(x)\,u_2(t) \neq 0, \quad u_t = u_1 u_2', \quad u_{xx} = u_1'' u_2,$$

und demzufolge

$$\frac{u_2'}{a^2 u_2} = \frac{u_1''}{u_1} = -\gamma \quad \text{da} \quad u_1 u_2' - a^2 u_1'' u_2 = 0$$

für $u_1(x)$ das Eigenwertproblem

$$u_1'' + \gamma\, u_1 = 0, \quad u_1(0) = u_1(l) = 0$$

das nur für die Eigenwerte

$$\gamma = \gamma_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$$

nicht-trivial lösbar ist mit

$$u_{1,n}(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad c_n \in \mathbb{R}.$$

Für den Faktor $u_2(t)$ in $u(x,t) = u_1(x)\, u_2(t)$ erhält man für $\gamma = \gamma_n$ die Differentialgleichung

$$u_2' + \gamma_n a^2 u_2 = 0$$

mit der Lösungsgesamtheit

$$u_{2,n}(t) = d_n e^{-(n\pi a/l)^2 t}, \quad d_n \in \mathbb{R}$$

also insgesamt

$$u_n(x,t) = u_{1,n}(x) u_{2,n}(t) = b_n e^{-(n\pi a/l)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right).$$

Zur Aufnahme der Bedingung $u(x,0) = r(x)$ bildet man

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi a/l)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

und erhält die Bedingung

$$r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad 0 \le x \le l$$

für b_n. Lässt sich also $r(x)$ in eine Fourier-Reihe der obigen Form mit Fourier-Sinus-Koeffizienten b_n entwickeln, so stellt

$$u_h(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n\pi a/l)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right)$$

mit diesen b_n eine Lösung des homogenen Problems dar, sofern diese Reihe in G zweimal gliedweise differenziert werden darf.

Um die Lösung des Gesamtproblems zu erhalten, muss zur Lösung $u_h(x,t)$ des homogenen Problems noch eine partikuläre Lösung $u_p(x,t)$ des inhomogenen Problems

$$u_t - a^2 u_{xx} = g(x,t)$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad u(x,0) = 0$$

addiert werden, da

$$u(x,t) = u_h(x,t) + u_p(x,t)$$

wegen der Linearität dann sowohl die Differentialgleichung als auch die Nebenbedingungen erfüllt. Zur Bestimmung $u_p(x,t)$ erweist sich der Ansatz "Variation der Konstanten" der $u_{1,n}(x,t)$ benutzt, d.h.

$$u_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

als geeignet. Mit $u_p(x,0) = 0$ für $0 \le x \le l$ folgt $c_n(0) = 0$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 c_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right) = g(x,t)$$

Gibt es nun für $g(x,t)$ eine Darstellung

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right),$$

so folgt, dass $c_n(t)$ für $n \in \mathbb{N}$ das AWP

$$c_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 c_n(t) = e_n(t), \quad c_n(0) = 0$$

erfüllen muss, wodurch c_n eindeutig bestimmt ist.

<u>Beispiel:</u>

$$u_t - 4u_{xx} = \sin(2x), \quad G = \{(x,t): \quad 0 < x < \pi,\ t > 0\},$$

$$u(x,0) = 2\sin(3x) - 4\sin(5x) \quad \text{(Anfangsbedingungen)}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad \text{(Randbedingungen)}$$

a) homogenes Problem
   Für $l = \pi$ ergibt sich aus

$$r(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)$$

mit

$$b_3 = 2, b_5 = -4 \quad \text{und} \quad b_n = 0 \;\text{ für }\; n \in \mathbb{N}, n \neq 3\; n \neq 5$$

die Lösung der homogenen Differentialgleichung zu

$$u_h(x,t) = 2e^{-36t}\sin(3x) - 4e^{-100t}\sin(5x)$$

b) inhomogenes Problem
Der Ansatz

$$u_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(nx)$$

liefert über

$$c_n'(t)+4n^2c_n(t)=e_n(t)=\begin{cases}1 & \text{für }\; n=2\\ 0 & \text{für }\; n\in\mathbb{N}, n\neq 2\end{cases}, \quad c_n(0)=0$$

mit

$$c_n(t) \equiv 0 \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 2$$

und

$$c_2(t) = \frac{1}{16}\left(1-e^{-16t}\right)$$

die partikuläre Lösung

$$u_p(x,t)=\frac{1}{16}\left(1-e^{-16t}\right)\sin(2x).$$

Die Lösung des Gesamtproblems lautet dann schließlich

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_h(x,t)+u_p(x,t)\\ &= \frac{1}{16}\left(1-e^{-16t}\right)\sin(2x)+2e^{-36t}\sin(3x)-4e^{-100t}\sin(5x). \end{aligned}$$

14.4 Lösung der Laplace-Gleichung in speziellen Gebieten

Für eine offene Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ wurde für $f \in C^2(G)$ in Kapitel 12.1 der Laplace-Operator eingeführt.

$$\Delta f := \nabla^T \nabla f = div\big(grad(f)\big)$$

In diesem Abschnitt sollen nun für spezielle Gebiete $G \subset \mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ Lösungen der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \text{ in } G$$

bestimmt werden, die auf ∂G vorgeschriebene Werte annehmen.

Definition 14-3:
Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, so heißt u: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $u \in C^2(G)$ harmonisch in G, wenn in G gilt

$$\Delta u = 0.$$

Beispiel:

a) $p(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$ ist harmonisch in $\mathbb{R}^3$, da $p_{xx} = p_{yy} = 2$, $p_{zz} = -4$

b) Jedes lineare Polynom ist harmonisch

c) $f(x,y) = e^{xy}$ ist nirgends harmonisch in $\mathbb{R}^2$, da $f_{xx} + f_{yy} = e^{xy}(y^2 + x^2) = 0$ nur für $(x,y) = (0,0)$.

Zur Lösung von $\Delta u = 0$ im Gebiet G und Anpassung an vorgegebene Werte von u auf ∂G kommt es nun wieder darauf an, möglichst viele Darstellungsformen für harmonische Funktionen zu finden, mit denen bei gegebenem G und Werten auf ∂G gut zu arbeiten ist. Für einige Sonderfälle von G soll das nun ausführlich diskutiert werden.

14.4.1 Lösung der Laplace-Gleichung in Kreisen

Gesucht ist eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad G = \left\{(x,y):\ x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

mit $R > 0$ fest. Hier ist der Übergang zu Polarkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

mit

$$G \leftrightarrow \tilde{G} = \left\{(r,\varphi):\ 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi\right\}$$

zweckmäßig, da in ihnen die Randbedingung leichter formulierbar ist. Aus

$$u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v(r,\varphi)$$

folgt die Äquivalenz

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0,$$

wobei

$$\lim_{(\sigma,\eta)\to(x,y)\in\partial G} u(\sigma,\eta) = u(x,y) \Leftrightarrow \lim_{r\to R} v(r,\varphi) = V(\varphi).$$

Ausgangspunkt zur Lösung der transformierten Laplace-Gleichung ist hier wieder der Separationsansatz

$$v(r,\varphi) = v_1(r)v_2(\varphi).$$

Einsetzen liefert

$$\frac{v_2(\varphi)}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_1(r)}{dr}\right) + \frac{v_1(r)}{r^2}\frac{d^2v_2(\varphi)}{d\varphi^2} = 0$$

und für $v_1(r)v_2(\varphi) \neq 0$ nach Umformen

$$\frac{r}{v_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_1}{dr}\right) = -\frac{1}{v_2}\frac{d^2v_2}{d\varphi^2}.$$

Es muss also mit $\gamma \in \mathbb{R}$ gelten

$$\frac{r}{v_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv_1}{dr}\right) = \gamma, \quad \frac{1}{v_2}\frac{d^2v_2}{d\varphi^2} = -\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} r^2v_1'' + rv_1' - \gamma v_1 = 0 \\ v_2'' + \gamma v_2 = 0 \end{cases}.$$

Die zweite Differentialgleichung liefert nur für $\gamma = n^2$, $n \in \mathbb{N}_0$ Lösungen, die 2π-periodisch sind, so dass nur für $\gamma = n^2$ die so zu erhaltenden Lösungen $v(r,\varphi)$ eindeutig bleiben, wenn φ um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π wächst, d.h.

$$v_{2,n}(\varphi) = a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi), \quad a_n, b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0 .$$

Die erste Gleichung braucht natürlich nur für diese γ gelöst zu werden, d.h.

$$r^2 v_1'' + r v_1' - n^2 v_1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0 .$$

Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung mit der Lösungsgesamtheit

$$n = 0 \Rightarrow v_{1,0}(r) = c_0 + d_0 \ln r, \quad c_0, d_0 \in \mathbb{R},$$

$$n \geq 1 \Rightarrow v_{1,n}(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}, \quad c_n, d_n \in \mathbb{R}.$$

Damit lösen

$$v_0(r,\varphi) = c_0 + d_0 \ln r,$$

$$v_n(r,\varphi) = \big(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\big)(c_n r^n + d_n r^{-n}), \quad n \in \mathbb{N}$$

die Laplace-Gleichung. Zur Anpassung der Randbedingung kann wieder das Superpositionsprinzip angewendet werden, d.h.

$$v(r,\varphi) = c_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\big)(c_n r^n + d_n r^{-n}).$$

Aus der Beschränktheit von $v(r,\varphi)$ für $r \to 0$ (physikalisch sinnvolle Lösung) folgt $d_n = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und somit

$$v(r,\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\big) r^n.$$

Ausnutzen der Randbedingung

$$v(R,\varphi) = V(\varphi) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)\big) R^n$$

und entwickeln von $V(\varphi)$ in einer Fourier-Reihe

$$V(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right)$$

liefert nach Koeffizientenvergleich

$$c_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_n = \frac{A_n}{R^n}, \quad b_n = \frac{B_n}{R^n},$$

schließlich die Lösung des Dirichlet-Problems im Inneren des Kreises mit dem Radius R,

$$v(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi) \right) \left(\frac{r}{R} \right)^n,$$

falls A_n, B_n die Fourier-Koeffizienten der Randfunktion $V(\varphi)$ bezeichnen.

14.4.2 Lösung der Laplace-Gleichung in Kugeln

Gesucht ist eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad G = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2 \right\}$$

mit $R > 0$ fest. Hier sind Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta$$

mit

$$G \leftrightarrow \tilde{G} = \left\{ (r,\varphi,\vartheta) :\ 0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ |\vartheta| \le \pi/2 \right\}$$

besonders geeignet. Aus

$$u(x,y,z) = u(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = w(r,\varphi,\vartheta)$$

folgt die Äquivalenz

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 w_r)}{\partial r} + \frac{w_{\varphi\varphi}}{r^2\cos^2\vartheta} + \frac{1}{r^2\cos\vartheta}\frac{\partial(\cos\vartheta\, w_\vartheta)}{\partial\vartheta} = 0,$$

wobei

$$\lim_{(\sigma,\eta,\mu)\to(x,y,z)\in\partial G} u(\sigma,\eta,\mu) = u(x,y,z) \Leftrightarrow \lim_{r\to R} w(r,\varphi,\vartheta) = W(\varphi,\vartheta).$$

Der Separationsansatz

$$w(r,\varphi,\vartheta) = w_1(r)w_2(\varphi)w_3(\vartheta) \neq 0$$

liefert nach Einsetzen und Multiplikation mit r^2/w

$$\frac{1}{w_1}\frac{d}{dr}(r^2 w_1') + \frac{w_2''}{w_2\cos^2\vartheta} + \frac{1}{w_3\cos\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\cos w_3') = 0.$$

Es muss also mit $\gamma \in \mathbb{R}$ gelten

$$\frac{d}{dr}(r^2 w_1') = \gamma w_1, \quad \frac{1}{w_2\cos^2\vartheta}w_2'' + \frac{1}{w_3\cos\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}(\cos\vartheta w_3') = -\gamma.$$

Die Differentialgleichung für w_1, d.h.

$$r^2 w_1'' + 2rw_1' - \gamma w_1 = 0,$$

ist eine Eulersche Differentialgleichung mit den Lösungen

$$w_1(r) = a\,r^{\rho_1} + b\,r^{\rho_2} \quad \text{mit } a,b \in \mathbb{R},$$

wobei ρ_1, ρ_2 die Nullstellen von $\rho^2 + \rho - \gamma = 0$ bezeichnet, also

$$\rho_1 + \rho_2 = -1 \quad \text{und} \quad \rho_1\rho_2 = -\gamma.$$

Zur besseren Darstellung sei $\rho_1 = l$ und daher $\rho_2 = -(l+1)$, also $\gamma = l\,(l+1)$. Einsetzen von γ in die Differentialgleichung für w_2, w_3 liefert

$$\frac{w_2''}{w_2} + \left(\frac{\cos\vartheta}{w_3}\frac{d}{d\vartheta}(\cos\vartheta\, w_3') + l(l+1)\cos^2\vartheta\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann nur dann erfüllt werden, wenn

$$\frac{w_2''}{w_2} = -\kappa \quad \text{und} \quad \frac{\cos\vartheta}{w_3}\frac{d}{d\vartheta}(\cos\vartheta w_3') + l(l+1)\cos^2\vartheta = \kappa \quad \text{mit } \kappa \in \mathbb{R}$$

gilt. Die Lösungen von

$$w_2'' + \kappa w_2 = 0$$

müssen 2π-periodisch sein. Somit muss $\kappa = m^2$ gelten mit $m \in \mathbb{N}_0$, d.h.

$$w_{2,m}(\varphi) = c_m \sin(m\varphi) + d_m \cos(m\varphi).$$

Aus der verbliebenen Gleichung für w_3

$$\cos\vartheta\, d(\cos\vartheta\, w_3')/d\vartheta + \left(l(l+1)\cos^2\vartheta - m^2\right) w_3 = 0$$

erhält man mittels der Transformation $t = \sin\vartheta,\ w_3 = q(t)$ mit

$$\frac{dw_3}{d\vartheta} = \frac{dq}{dt}\frac{dt}{d\vartheta} = \frac{dq}{dt}\cos\vartheta = \sqrt{1-t^2}\,\frac{dq}{dt} \quad \text{für } |\vartheta| < \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\vartheta}(\cos\vartheta \frac{dw_3}{d\vartheta}) &= -\sin\vartheta \frac{dw_3}{d\vartheta} + \cos\vartheta \frac{d^2 w_3}{d\vartheta^2} \\ &= -t\sqrt{1-t^2}\,\frac{dq}{dt} + \left(\sqrt{1-t^2}\right)^2 \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\frac{dq}{dt} + \sqrt{1-t^2}\,\frac{d^2q}{dt^2}\right) \\ &= -2t\sqrt{1-t^2}\,\frac{dq}{dt} + \left(\sqrt{1-t^2}\right)^3 \frac{d^2q}{dt^2}\end{aligned}$$

die Differentialgleichung

$$(1-t^2)^2\frac{d^2q}{dt^2} - 2t(1-t^2)\frac{dq}{dt} + \left(l(l+1)(1-t^2) - m^2\right) q = 0$$

oder für $|t| < 1 \Leftrightarrow |\vartheta| < \pi/2$

$$\frac{d^2q}{dt^2} - \frac{2t}{(1-t^2)}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{1-t^2}\left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-t^2}\right) q = 0.$$

Für $m = 0$ ist dies die bekannte Legendresche Differentialgleichung, die durch Potenzreihenansatz um $t = 0$ gelöst werden kann und für $l \in \mathbb{N}_0$ die Legendre-Polynome

$$L_0(t) = 1, \quad L_l(t) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l (x^2-1)^l}{dx^l} \ \text{ für } \ l \in \mathbb{N}_0$$

als Lösung besitzt. Da man zeigen kann, dass die $L_l(t)$ die einzigen Lösungen der Legendre-Differentialgleichung sind, die bei $t = \pm 1$ endlich bleiben, andererseits aber auch die Randwerte auf ∂G auch in den Polen, also für $\vartheta = \pm\pi/2$ im allgemeinen endlich sind, ist die Beschränkung auf $l \in \mathbb{N}_0$ sinnvoll, so dass man mit

$$q(t) = L_l(t) \;\Rightarrow\; w_3(\vartheta) = L_l(\sin\vartheta)$$

als Lösung

$$w_{l,0}(r,\varphi,\vartheta) = (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)})\, L_l(\sin\vartheta)\, d_0$$

erhält. Für $m \in \mathbb{N}$ kann man zeigen, dass

$$L_l^m(t) := \left(1-t^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dt^m} L_l(t)$$

die Differentialgleichung für q(t) für $m \leq l$ löst und überdies die einzige Lösung ist, die bei $t = \pm 1$ endlich bleibt. Damit sind

$$w_{l,m}(r,\varphi,\vartheta) = \left(a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}\right) L_l^m(\sin\vartheta)\left(c_m \sin(m\varphi) + d_m \cos(m\varphi)\right)$$

für $m, l \in \mathbb{N}$, $l \geq m$, $a_l, b_l, c_m, d_m \in \mathbb{R}$ Lösungen der Laplace-Gleichung. Aus der Beschränktheit von $w_{l,m}$ für $r \to 0$ (physikalisch sinnvolle Lösung) kann man wieder auf $b_l = 0$ schließen, d.h.

$$w_{l,m}(r,\varphi,\vartheta) = a_l r^l L_l^m(\sin\vartheta)\left(c_m \sin(m\varphi) + d_m \cos(m\varphi)\right).$$

Durch Anwenden des Superpositionsprinzips erhält man weitere Lösungen.

14.4.3 Lösung der Laplace-Gleichung in Zylindern

Gesucht ist eine Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad G = \left\{(x,y,z) : x^2 + y^2 < R^2\right\}$$

mit $R > 0$ fest. Hier sind nun Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = \xi$$

mit

$$G \leftrightarrow \tilde{G} = \left\{(r,\varphi,\xi):\; 0 \leq r < R,\; 0 \leq \varphi < 2\pi,\; \xi \in \mathbb{R}\right\}$$

besonders zweckmäßig. Aus

$$u(x,y,z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi, \xi) = w(r,\varphi,\xi)$$

folgt die Äquivalenz

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = 0,$$

wobei

$$\lim_{(\sigma,\eta,\mu)\to(x,y,z)\in\partial G} u(\sigma,\eta,\mu) = u(x,y,z) \Leftrightarrow \lim_{r\to R} w(r,\varphi,\xi) = W(\varphi,\xi).$$

Der Separationsansatz

$$w(r,\varphi,\xi) = w_1(r)w_2(\varphi)w_3(\xi) \neq 0$$

liefert ähnlich wie in Kapitel 14.4.2

$$\frac{1}{rw_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_1}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 w_2}\frac{d^2 w_2}{d\varphi^2} + \frac{1}{w_3}\frac{d^2 w_3}{d\xi^2} = 0.$$

Diese Gleichung kann nur dann erfüllt werden, wenn

$$w_3'' = \gamma w_3 \quad \text{und} \quad \frac{1}{rw_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_1}{dr}\right) + \frac{1}{r^2 w_2}\frac{d^2 w_2}{d\varphi^2} = -\gamma \quad \text{mit } \gamma \in \mathbb{R}$$

gilt. Aus der letzten Gleichungen folgt

$$\left(\frac{1}{rw_1}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_1}{dr}\right) + \gamma\right) r^2 = -\frac{1}{w_2}\frac{d^2 w_2}{d\varphi^2},$$

also

$$w_2'' + \kappa w_2 = 0 \quad \text{und} \quad r\frac{d}{dr}(r\,w_1') + (\gamma\, r^2 - \kappa)w_1 = 0 \quad \text{mit } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Damit w_2 eindeutig (2π-periodisch) ist, muss $\kappa = m^2$ gelten mit $m \in \mathbb{N}_0$, d.h.

$$w_{2,m}(\varphi) = c_m \sin(m\varphi) + d_m \cos(m\varphi).$$

Die Differentialgleichung für w_1

$$r^2 w_1'' + r w_1' + (\gamma r^2 - m^2)w_1 = 0$$

ist bis auf den Faktor γ eine Besselsche Differentialgleichung. Durch die Transformation für $\gamma > 0$

$$t = \sqrt{\gamma}\, r, \quad q(t) = w_1(r), \quad w_1' = q'\sqrt{\gamma}, \quad w_1'' = q''\gamma$$

erhält man die Besselsche Differentialgleichung

$$t^2 q'' + t\, q' + (t^2 - m^2)\, q = 0$$

mit den Lösungen

$$q_m(t) = a_m J_m(t) + b_m N_m(t), \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}_0,$$

wobei $J_m(t)$ die Bessel-Funktion und $N_m(t)$ die Neumann-Funktion m-ter Ordnung bezeichnet. Rücksubstitution liefert dann schließlich

$$w_{1,m}(r) = a_m J_m\left(\sqrt{\gamma} r\right) + b_m N_m\left(\sqrt{\gamma} r\right), \quad \gamma > 0.$$

Aus der Beschränktheit von $w_{l,m}$ für $r \to 0$ (physikalisch sinnvolle Lösung) kann man wegen $\lim_{r\to 0} N_m(\sqrt{\lambda}\, r) = \infty$ auf $b_m = 0$ schließen, d.h.

$$w_{1,m}(r) = a_m J_m\left(\sqrt{\gamma} r\right), \quad \gamma > 0.$$

Wegen $\gamma > 0$ erhält man für w_3

$$w_{3,\gamma}(\xi) = A_\gamma e^{\sqrt{\gamma}\,\xi} + B_\gamma e^{-\sqrt{\gamma}\,\xi}, \quad A_\gamma, B_\gamma \in \mathbb{R},\ \gamma \in \mathbb{R},\ \gamma > 0$$

und insgesamt also

$$w_{m,\gamma}(r,\varphi,\xi) = a_m J_m\left(\sqrt{\gamma}\, r\right)\left(c_m \sin(m\varphi) + d_m \cos(m\varphi)\right)\left(A_\gamma e^{\sqrt{\gamma}\,\xi} + B_\gamma e^{-\sqrt{\gamma}\,\xi}\right)$$

woraus man durch Superposition weitere Lösungen gewinnen kann.