Höhere Mathematik 4

Kapitel 15

Funktionentheorie

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Höhere Mathematik 4

Kapitel 15

Inhaltsverzeichnis

15 Funktionentheorie

15.1 Komplexe Zahlenebene

Komplexe Zahlen

Für $x, y \in \mathbb{R}$ heißt

$z = x + j\,y$ komplexe Zahl

mit

$\mathrm{Re}(z) = x$ Realteil von z

und

$\mathrm{Im}(z) = y$ Imaginäreteil von z

Menge der komplexen Zahlen

Die Menge

$$\mathbb{C} = \left\{ x + j\,y : \; x \in \mathbb{R},\, y \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen.

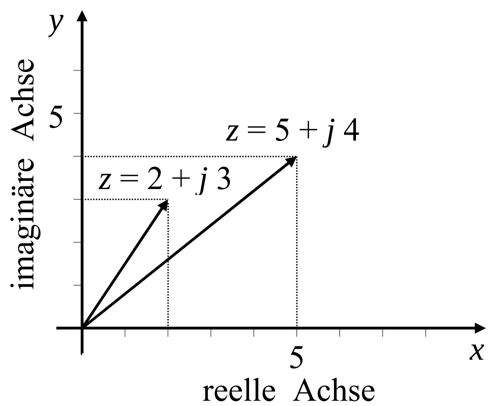
Gaußsche Zahlenebene

$$\mathbb{R} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) = 0 \right\} \subset \mathbb{C}$$

definiert die reelle und

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) = 0 \right\}$$

die imaginäre Achse.

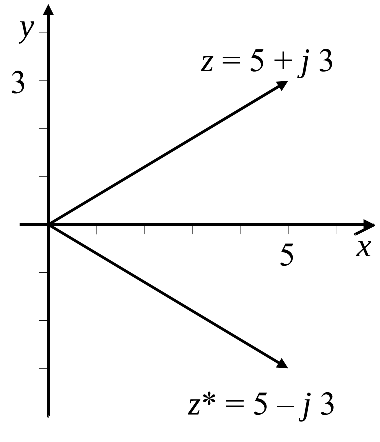


Konjugiert komplexe Zahlen

Es sei $z = x + jy \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$z^* := x - j\,y$$

die zu z konjugiert komplexe Zahl.



Betrag komplexer Zahlen

Es sei $z = x + jy \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$$

der Betrag von *z*.

Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen

Für $z = x + jy \in \mathbb{C}$ und $z \neq 0$ gilt die trigonometrische Darstellung

$$z = x + j\,y = r\cos\varphi + j\,r\sin\varphi = r\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)$$

mit

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(y/x\right) & \text{für } x > 0 \\ \pi/2 & \text{für } y \geq 0 \wedge x = 0 \\ -\pi/2 & \text{für } y < 0 \wedge x = 0 \\ \pi + \arctan\left(y/x\right) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

erhält man die exponentielle Darstellung komplexer Zahlen gemäß

$$z = r\,e^{j\varphi}$$

und es gilt

$$z^* = re^{-i\varphi}, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi} = \frac{z^*}{|z|^2}, \quad z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n\left(\cos(n\varphi) + j\sin(n\varphi)\right).$$

Wurzeln komplexer Zahlen

Es sei $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Mit $z^n = a = r\,e^{j\varphi}$ und $z = p\,e^{j\vartheta}$ folgt

$$\begin{aligned} & z^n = p^n\,e^{jn\vartheta} = r\,e^{j\varphi} \\ & \Rightarrow p^n = r \quad \text{und} \quad n\vartheta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{N} \\ & \Rightarrow p = \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \vartheta = \left(\varphi + 2k\pi\right)/n \end{aligned}$$

Also sind

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{j\frac{\varphi+2k\pi}{n}} \quad \text{mit } k = 0,1,\ldots,n-1$$

die n-ten Wurzeln aus a.

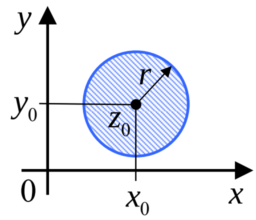
Abstand komplexer Zahlen

Mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ist $|z_1 - z_2|$ der Abstand zwischen z_1 and z_2.

Beispiel:

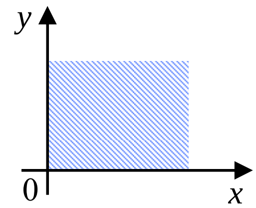
1) Kreisfläche um z_0 mit Radius r

$\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \le r\}.$



2) 1ter Quadrant

$\{z \in \mathbb{C}: 0 \le \arg z \le \pi/2\}.$



15.1.1 Folgen und Reihen in $\mathbb{C}$

Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{C}$ ist konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} |z_n - z| = 0 \iff \left\{\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \text{ und } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)\right\}.$$

Definition 15-1:

1) Unendlich ferner Punkt

$$z_n \to \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|z_n|} = 0.$$

2) Erweiterte Zahlenebene

$$\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

3) Umgebung des unendlich fernen Punktes

$$U_r(\infty) = \{z \in \mathbb{C}: |z| > r\} \cup \{\infty\}.$$

Die mit der komplexen Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildete Partialsummenfolge

$$(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad s_n = \sum_{k='1}^{n} z_k$$

heißt unendliche Reihe, sie wird mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

bezeichnet. Man sagt die Reihe konvergiert gegen $s \in \mathbb{C}$ und schreibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s, \text{ wenn } \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = s.$$

Die Reihe divergiert, wenn sie nicht konvergiert. Eine unendliche Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

heißt absolut konvergent, wenn die reelle Reihe der Beträge

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

konvergiert.

Anmerkung:

1) Eine Reihe komplexer Glieder

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k + jy_k)$$

ist dann und nur dann konvergent, wenn die Reihen der Real- und Imaginärteile, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Re}(z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Im}(z_k) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

konvergent sind.

2) Absolute Konvergenz kann mit Hilfe des Majoranten-, Wurzel- oder Quotientenkriteriums nachgewiesen werden.

3) Aus der absoluten Konvergenz folgt die gewöhnliche Konvergenz, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| \text{ konvergent} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ konvergent,}$$

denn

$$|\mathrm{Re}\, z_n| = |x_n| \le |z_n| \text{ und } |\mathrm{Im}\, z_n| = |y_n| \le |z_n|.$$

Eine Reihe der Form

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

mit

$$a_n \in \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C} \text{ fest},\ z \in \mathbb{C},\ n \geq 0$$

heißt Potenzreihe um z_0.

Zu jeder Potenzreihe existiert eindeutig ein Konvergenzradius R mit

$$0 \leq R \leq \infty.$$

Wie im reellen zeigt man, dass nur die folgenden drei Fälle auftreten.

1) $R = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur in z_0.
2) $0 < R < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in $\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < R\}$ für $|z - z_0| > R$ ist die Reihe divergent.
3) $R = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beispiel:

1) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow R = \infty,$ konvergiert in $\mathbb{C}$, denn

$$\left| \frac{z^{n+1} n!}{(n+1)!\, z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1} \to 0 < 1.$$

2) $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \Rightarrow R = \infty,$ konvergent in $\mathbb{C}$,

$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \Rightarrow R = \infty,$ konvergent in $\mathbb{C}$.

3) $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \Rightarrow R = 1,$ konvergent für $|z| < 1$.

15.1.2 Kurven in $\mathbb{C}$

Definition 15-2: (*Kurve in* $\mathbb{C}$)
Die Punktmenge

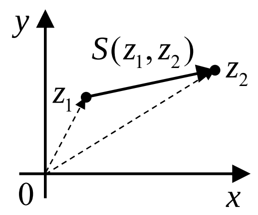
$$K = \{ z \in \mathbb{C}:\ z = z(t) = x(t) + j\,y(t),\ t \in [\alpha, \beta] \}$$

heißt Kurve in $\mathbb{C}$, t ist der Parameter, $[\alpha,\beta]$ der Parameterbereich.

Beispiel:

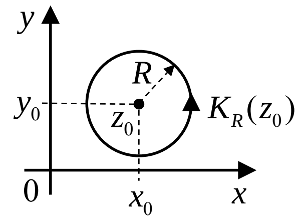
1) Strecke zwischen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$S(z_1, z_2) = \{ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1):\ t \in [0,1] \}.$$



2) Kreislinie um z_0 mit Radius R

$$K_R(z_0) = \{ z(t) = z_0 + Re^{jt}:\ t \in [0, 2\pi] \}.$$



Definition 15-3:
Es sei

$$K = \{ z \in \mathbb{C}:\ z = z(t) = x(t) + j\,y(t),\ t \in [\alpha, \beta] \}.$$

a) K heißt glatt, wenn $x(t)$ und $y(t)$ stetig differenzierbar auf $[\alpha,\beta]$, d.h.

$$x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$$

und

$$|z'(t)| = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} \neq 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \ \text{ mit } \ z'(t) = x'(t) + j\,y'(t).$$

In diesem Fall heißt

$$T_{z(t_0)} = \{ z(\lambda) = z(t_0) + \lambda z'(t_0):\ \lambda \in \mathbb{R} \}$$

die Tangente an K im Punkt $z(t_0)$.

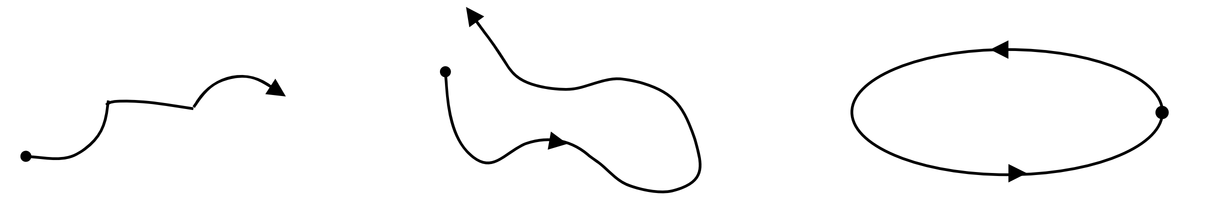
b) K heißt stückweise glatt, wenn K aus endlich vielen glatten Stücken besteht.

c) K heißt geschlossen, wenn $z(\alpha) = z(\beta)$.

d) Eine bis auf eventuell den Anfangs- und Endpunkt doppelpunktfreie Kurve heißt Jordan-Kurve.

e) Eine geschlossene Jordan-Kurve heißt positiv orientiert, wenn beim Durchlaufen der Kurve das Innere zur Linken liegt.

f) $(-K)$ bezeichnet die Kurve mit umgekehrtem Durchlaufsinn.

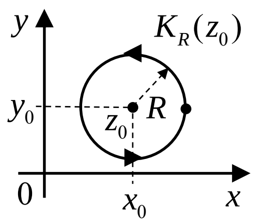


stückweise glatte Kurve — Jordan-Kurve — positiv orientierte Jordan-Kurve

Beispiel:

1) $K_R(z_0) = \left\{ z(t) = z_0 + Re^{jt} :\ t \in [0, 2\pi] \right\}$

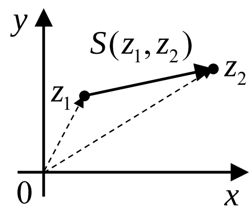
ist positiv orientierte Jordan-Kurve.

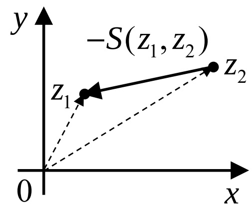


2) $S(z_1, z_2) = \left\{ z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) :\ t \in [0,1] \right\}$

$$\Rightarrow -S(z_1, z_2) = S(z_2, z_1)$$

$$= \left\{ z(t) = z_2 + t(z_1 - z_2) :\ t \in [0,1] \right\}$$





Die Kurvenlänge einer glatten Kurve K mit

$$K = \left\{ z(t) = x(t) + iy(t) :\ \ t \in [\alpha, \beta] \right\}$$

ist gegeben durch

$$L(K) = \int_\alpha^\beta |z'(t)|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt.$$

Beispiel:

$$L\left(K_R(z_0)\right) = \int_0^{2\pi} |(Re^{jt})'|\, dt = \int_0^{2\pi} |\, jRe^{jt}\,|\, dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

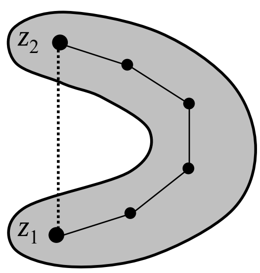
15.1.3 Gebiete in $\mathbb{C}$

Definition 15-4:

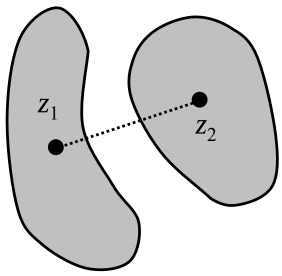
Eine Punktmenge $G \subset \mathbb{C}$ heißt Gebiet, wenn G offen, d.h.

$$\forall z_0 \in G \;\; \exists U_\delta(z_0) = \{z : |z - z_0| < \delta\} \subset G \quad (\delta > 0)$$

und G zusammenhängend, d.h. je zwei Punkte lassen sich in G durch einen Polygonzug verbinden.



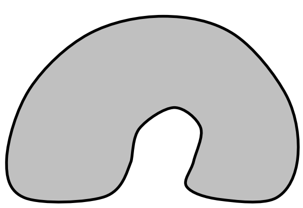
zusammenhängend ⇒ Gebiet



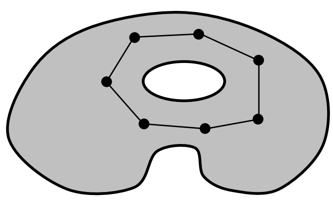
nicht zusammenhängend ⇒ kein Gebiet

Definition 15-5:

Eine Punktmenge $G \subset \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängendes Gebiet, wenn G Gebiet und jeder in G verlaufende einfach geschlossene Polygonzug nur Punkte von G umschließt.



einfach zusammenhängend



nicht einfach zusammenhängend

Beispiel:

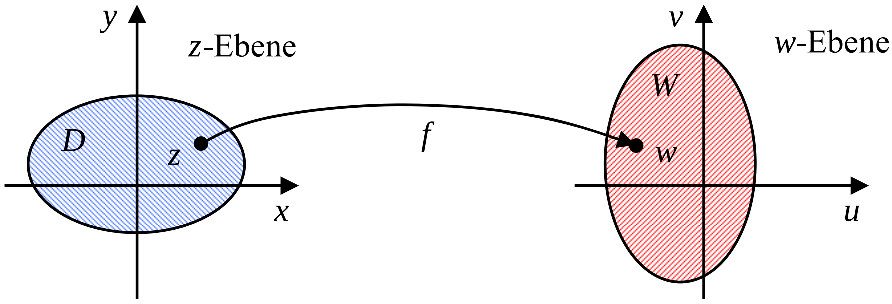
1) $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet.

2) $\{z \in \mathbb{C}: \; |z - z_0| < R\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet.

3) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist nicht einfach zusammenhängend.

15.2 Komplexe Funktionen

Eine Abbildung $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die einen Bereich D einer komplexen Ebene (Urbildebene) eindeutig in einen Bildbereich $W = f(D)$ einer anderen komplexen Ebene (Bildebene) abbildet heißt komplexe Funktion.



Mit $z = x + jy$ sei $f(z) = w = u + jv$, also

$$f(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y) \;\Rightarrow\; u(x,y) = \mathrm{Re}\big(f(z)\big),\; v(x,y) = \mathrm{Im}\big(f(z)\big).$$

Wir schreiben also

$$f(z) = u(x,y) + jv(x,y) \text{ mit } u = \mathrm{Re}(f),\; v = \mathrm{Im}(f)$$

Hierbei sind

$$u : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ und } v : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

zwei reelle Funktionen. Jede komplexe Funktion f lässt sich in dieser Weise in Real- und Imaginärteil aufspalten.

Beispiel:

1) $e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j\sin y)$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(e^z) = u(x,y) = e^x \cos y$ und $\mathrm{Im}(e^z) = v(x,y) = e^x \sin y$.

2) $f(z) = z^2 = (x+jy)^2 = (x^2 - y^2) + j2xy$

$\Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$.

3) $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{z^*}{|z|^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} + j\dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ und $v(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$.

4) $f(z) = \sin z = \sin(x + jy)$

$$= \frac{e^{jx-y} - e^{-jx+y}}{2j} = \frac{1}{2j}\left(e^{-y}(\cos x + j\sin x) - e^{y}(\cos x - j\sin x)\right)$$

$$= \frac{e^{-y} - e^{y}}{2j}\cos x + j\frac{e^{y} + e^{-y}}{2j}\sin x = \sin x\cosh y + j\cos x\sinh y$$

$\Rightarrow$ $u(x,y) = \sin x\cosh y$ und $v(x,y) = \cos x\sinh y$.

Analog erhält man für $\cos z$ die Darstellung

$\cos z = \cos x\cosh y - j\sin x\sinh y$

$\Rightarrow$ $u(x,y) = \cos x\cosh y$ und $v(x,y) = -\sin x\sinh y$.

15.2.1 Stetigkeit komplexer Funktionen

Definition 15-6: (*Stetigkeit*)

Es sei $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in D$.

a) f heißt stetig in z_0, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ derart existiert, dass

$$\left|f(z) - f(z_0)\right| < \varepsilon \quad \forall z \in D \cap U_{\delta_\varepsilon}(z_0)$$

b) f heißt stetig auf D, wenn f für alle $z \in D$ stetig ist.

Satz 15-1:

f ist genau dann stetig in $z_0 \in D$, wenn für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus D mit $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0)$.

Die Folgerung

$$f(z_n) \to f(z_0) \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(f(z_n)\right) \to \mathrm{Re}\left(f(z_0)\right),\ \mathrm{Im}\left(f(z_n)\right) \to \mathrm{Im}\left(f(z_0)\right)$$

motiviert dann den folgende Satz.

Satz 15-2:
Es sei $f = u + jv$ und $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$. Dann ist f genau dann in z_0 stetig, wenn u und v in $(x_0,y_0)^T$ stetig sind.

Hieraus folgt sofort der folgende Satz.

Satz 15-3:
Summe, Differenz, Produkt und Quotient (falls Nenner $\neq 0$) von in z_0 stetigen Funktionen sind wieder stetig in z_0. Ist g stetig in z_0 und f stetig in $g(z_0)$, so ist auch $h = f \circ g$ stetig in z_0.

Für stetige Funktionen gelten nun die folgenden Eigenschaften.

Satz 15-4:
Es sei $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig in D und eineindeutig, d.h. $f^{-1}: f(D) \to D$ existiert. Dann gilt

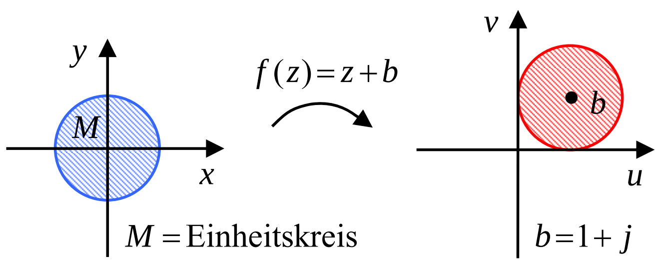
a) Ist $M \subset D$ offen $\Rightarrow f(M)$ ist offen und $f^{-1}: f(M) \to M$ ist stetig in $f(M)$.

b) Ist $M \cup \partial M \subset D$, so gilt für die stetige, eineindeutige Abbildung $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dass das Innere von M in das Innere von $f(M)$ und der Rand von M in den Rand von $f(M)$ übergehen.

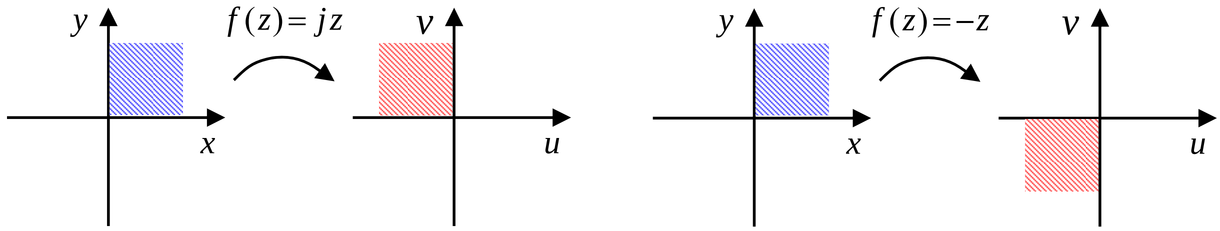
c) Ist M ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so ist auch $f(M)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Beispiel:

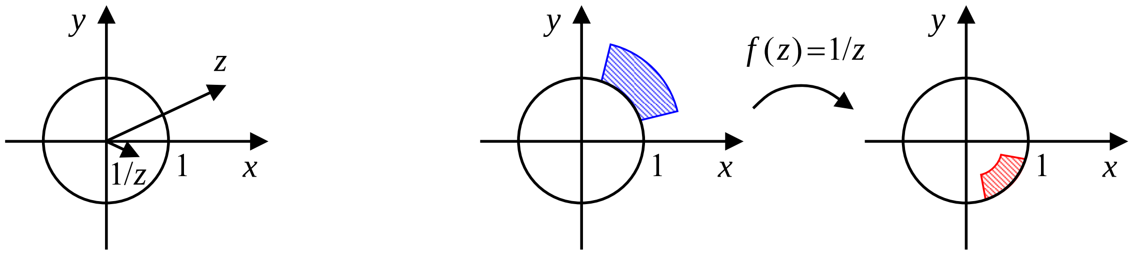
1) $f(z) = c$ konstante Abbildung ist stetig auf $\mathbb{C}$, aber nicht eineindeutig.
2) $f(z) = z$ identische Abbildung ist stetig und eineindeutig auf $\mathbb{C}$.
3) $f(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$, Translation ist stetig und eineindeutig auf $\mathbb{C}$.



4) $f(z) = az\,,\ a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, Drehstreckung ist stetig und eineindeutig in $\mathbb{C}$. Für $a = |a|\,e^{j\alpha}$ und $z = |z|\,e^{j\varphi}$ erzeugt $f(z) = az = |a||z|\,e^{j(\varphi+\alpha)}$ eine Drehung um den Winkel α und eine Streckung mit dem Faktor $|a|$, z.B. $f(z) = jz$ Drehung um $\pi/2$, $f(z) = -z$ Drehung um π.



5) $f(z) = 1/z,\ z \neq 0$, Stürzung ist stetig und eineindeutig in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Für $z = |z|\,e^{j\varphi}$ folgt $f(z) = e^{-j\varphi}/|z|$.



15.2.2 Elementare komplexe Funktionen

Gebrochen lineare Funktionen

Die gebrochen linearen Funktionen haben die Gestalt

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ \ a,b,c,d \in \mathbb{C}\ \text{ mit }\ ad - bc \neq 0.$$

Für $ad - bc = 0$ ist f konstant, denn

$$d \neq 0 \ \Rightarrow\ f(z) = \frac{(az+b)d}{(cz+d)d} = \frac{adz+bd}{(cz+d)d} = \frac{bcz+bd}{(cz+d)d} = \frac{(cz+d)b}{(cz+d)d} = \frac{b}{d}$$

$$d = 0 \ \Rightarrow\ b = 0,\ (c \neq 0,\ \text{da sonst der Nenner} = 0) \ \Rightarrow\ f(z) = \frac{az}{cz} = \frac{a}{c}$$

Gebrochen lineare Funktionen besitzen die folgenden Eigenschaften:

a) f setzt sich zusammen aus Translation, Drehstreckung und Stürzung.

Ist $c = 0 \ \Rightarrow\ f(z) = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d} \ \Rightarrow\ f$ ist Drehstreckung und Translation

Ist $c \neq 0 \Rightarrow f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{az}{cz+d} + \dfrac{b}{cz+d} = \dfrac{acz+ad-ad}{c(cz+d)} + \dfrac{b}{cz+d}$

$$= \frac{a(cz+d)-ad}{c(cz+d)} + \frac{b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \left(b - \frac{ad}{c}\right)\frac{1}{cz+d},$$

also gilt $f(z) = f_5\Big(f_4\Big(f_3\Big(f_2\big(f_1(z)\big)\Big)\Big)\Big)$ mit

$$f_1(z) = cz,\quad f_2(z) = z+d,\quad f_3(z) = \frac{1}{z},$$

$$f_4(z) = \left(\frac{bc-ad}{c}\right)z \text{ und } f_5(z) = z + \frac{a}{c}.$$

b) f ist stetig auf $\left\{\begin{matrix} \mathbb{C}\backslash\{-d/c\} & \text{falls } c \neq 0 \\ \mathbb{C} & \text{falls } c = 0 \end{matrix}\right\}$ und f besitzt wegen

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow (cz+d)w = az+b \Leftrightarrow z(cw-a) = -dw+b$$

die ebenfalls gebrochen lineare inverse Funktion

$z = f^{-1}(w) = \dfrac{dw-b}{-cw+a}$ die stetig auf $\left\{\begin{matrix} \mathbb{C}\backslash\{a/c\} & \text{falls } c \neq 0 \\ \mathbb{C} & \text{falls } c = 0 \end{matrix}\right\}$ ist.

Es gilt also

$c = 0 \Rightarrow f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eineindeutig, $f(\infty) = \infty$

$c \neq 0 \Rightarrow f : \mathbb{C}\backslash\{-d/c\} \to \mathbb{C}\backslash\{a/c\}$ eineindeutig

und $f(\infty) = a/c,\ f(-d/c) = \infty.$

Mit $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ gilt sogar $f:\ \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist eineindeutig.

c) Die Hintereinanderausführung zweier gebrochen linearer Funktionen ergibt wieder eine gebrochen lineare Funktion, denn mit

$$f_1(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ und } f_2(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

gilt

$$f(z) = f_1\left(f_2(z)\right) = \frac{a\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)z+(c\beta+d\delta)} = \frac{Az+B}{Cz+D},$$

wobei

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Weiteren Eigenschaften gebrochen linearer Funktionen werden in dem folgendem Satz zusammengefasst.

<u>**Satz 15-5:**</u> (*Eigenschaften gebrochen linearer Funktionen*)

a) f ist durch 3 Punktepaare $(z_i,w_i)^T$, $i = 1,2,3$ eindeutig bestimmt mit $f(z_i) = w_i$, $i = 1,2,3$. Hierbei müssen z_i und w_i paarweise verschieden sein, es kann aber ein z_i oder w_i gleich ∞ sein.

b) Ist $f \neq id \Rightarrow f$ hat höchstens 2 Fixpunkte (*id* bezeichnet die Identitätsabbildung; ξ ist Fixpunkt, wenn $f(\xi) = \xi$).

c) Kreise und Geraden werden durch f in Kreise oder Geraden abgebildet. Fasst man die Geraden als Kreise durch ∞ auf, so gilt f bildet Kreise in Kreise ab (Kreisverwandtschaft).

d) f bildet innere Punkte in innere Punkte ab, f bildet Randpunkte in Randpunkte ab.

e) Sind K_1 and K_2 Kreise oder Geraden dann existiert eine gebrochen lineare Funktion f mit $f(K_1) = K_2$.

<u>*Beweis*:</u>

a) Sind z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 gegeben, so soll gelten

$$f(z_i) = w_i = \frac{az_i+b}{cz_i+d}, \quad (i=1,2,3).$$

Das sind 3 Gleichungen für die 4 Unbekannten a, b, c und d. Da aber a, b, c und d nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind (man kann den Bruch ja durch einen Faktor kürzen), ist immer eine Unbekannte frei wählbar.

Der Fall ∞ ergibt gemäß

$$z_i = \infty \;\Rightarrow\; f(\infty) = w_i = a/c \;\text{ (falls } w_i \neq \infty, \text{ sonst } c = 0\text{)},$$

bzw.

$$w_i = \infty \;\Rightarrow\; f(z_i) = \infty \;\Rightarrow\; cz_i + d = 0 \;\text{ (falls } z_i \neq \infty, \text{ sonst } c = 0\text{)}$$

auch jeweils eine Gleichung.

b) Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 verschiedene Fixpunkte, so muss gelten $f(\xi_i) = \xi_i$, $i = 1,2,3$. Nach a) ist f eindeutig bestimmt, also $f = id$.

c) f setzt sich zusammen aus Translation, Drehstreckung und Stürzung, also muss Eigenschaft c) für diese drei Abbildungen gezeigt werden.

Translation: geometrisch klar.

Drehstreckung: $f(z) = az, \; a = |a|\, e^{j\alpha} \in \mathbb{C}$.

Kreis: $z = z_0 + re^{j\varphi}, \; \varphi \in [0, 2\pi]$ (Kreis um z_0 mit Radius r),

$$w = f(z) = az \;\Rightarrow\; w = az_0 + are^{j\varphi} = az_0 + |a|\, re^{j(\varphi+\alpha)}$$

ist wieder ein Kreis (um az_0 mit Radius $|a|r$).

Gerade: $z = z_1 + t(z_2 - z_1) \;\Rightarrow\; f(z) = w = az_1 + t(az_2 - az_1), \; t \in \mathbb{R}$

ist wieder eine Gerade.

Stürzung: $f(z) = 1/z$.

Kreis: $|z - z_0| = r$ (Kreis um z_0 mit Radius r)

$$\Rightarrow (z - z_0)(z^* - z_0^*) = r^2 \;\Rightarrow\; zz^* - z_0^* z - z_0 z^* + e = 0$$

(Kreis um z_0 mit Radius r, $e = |z_0|^2 - r^2 \in \mathbb{R}$,

$e = 0 \;\Leftrightarrow\; |z_0| = r \;\Leftrightarrow\;$ Kreis geht durch 0).

Gerade: $z = z_1 + t(z_2 - z_1) = \alpha + t\beta$ mit $\beta \neq 0, \; t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{z-\alpha}{\beta} = t = t^* = \frac{z^*-\alpha^*}{\beta^*} \Rightarrow (z-\alpha)\beta^* = (z^*-\alpha^*)\beta$$

$$\Rightarrow \beta^* z - \beta z^* = \alpha\beta^* - \alpha^*\beta.$$

Ist $\alpha\beta^* - \alpha^*\beta = 0 \Rightarrow \beta^* z - \beta z^* = 0$
(Gerade durch 0),

$$\alpha\beta^* - \alpha^*\beta \neq 0 \Rightarrow \frac{\beta^*}{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta} z + \frac{\beta}{\alpha^*\beta - \alpha\beta^*} z^* = 1$$

$$\Rightarrow \gamma z + \gamma^* z^* = 1 \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{\beta^*}{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}$$

(Gerade nicht durch 0).

Anwenden der Stürzung $w = f(z) = 1/z$ liefert nun

Kreis: $zz^* - z_0^* z - z_0 z^* + e = 0, \; e \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{1}{ww^*} - \frac{z_0^*}{w} - \frac{z_0}{w^*} + e = 0 \Rightarrow eww^* - z_0 w - z_0^* w^* + 1 = 0$$

für $e \neq 0 \Rightarrow$ Kreis, für $e = 0 \Rightarrow$ Gerade.

Geht der ursprüngliche Kreis durch 0 (also $e = 0$), so entsteht eine Gerade, anderenfalls entsteht ein Kreis.

Gerade: $\beta^* z - \beta z^* = 0 \Rightarrow \frac{\beta^*}{w} - \frac{\beta}{w^*} = 0 \Rightarrow \beta w - \beta^* w^* = 0$
(Gerade durch 0),

$$\gamma z + \gamma^* z^* = 1 \Rightarrow \frac{\gamma}{w} + \frac{\gamma^*}{w^*} = 1 \Rightarrow ww^* - \gamma^* w - \gamma w^* = 0$$

(Kreis durch 0).

d) folgt aus Satz 15-4, da f stetig und eineindeutig ist.

e) Ein Kreis ist durch 3 Punkte eindeutig bestimmt (eine Gerade durch 2 Punkte). Wählt man jeweils 3 Punkte auf K_1 und auf K_2, so kann man nach a) die gebrochen lineare Funktion bestimmen.

Beispiel:

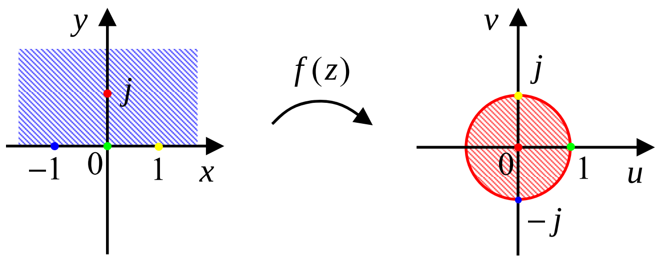
1) Gesucht ist die gebrochen lineare Funktion, die die obere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises abbildet, d.h.

$$G = \{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Im}(z) > 0\},\quad f(G) = \{w \in \mathbb{C}:\ |w| < 1\}.$$

Da der Rand von G in den Rand von $f(G)$ abgebildet wird, muss also die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abgebildet werden.

Wir wählen jeweils 3 Punkte auf der reellen Achse und auf der Einheitskreislinie, z.B.: $-1 \to -j,\ 0 \to 1,\ 1 \to j$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$



$$f(0) = \frac{b}{d} = 1 \;\Rightarrow\; b = 1 \quad \text{(falls man } d = 1 \text{ wählt),}$$

$$f(1) = \frac{a+1}{c+1} = j \;\Rightarrow\; a+1 = jc + j,$$

$$f(-1) = \frac{-a+1}{-c+1} = -j \;\Rightarrow\; -a+1 = jc - j$$

$$\Rightarrow 2jc = 2 \;\Rightarrow\; c = -j \;\Rightarrow\; a = 1 + j - 1 = j \;\Rightarrow\; f(z) = \frac{jz+1}{-jz+1}.$$

Da das Innere ins Innere abgebildet wird, reicht zur Überprüfung, ob G nach $f(G)$ abgebildet wird, ein innerer Punkt von G, z.B.

$$z = j \in G \;\Rightarrow\; f(j) = 0 \in f(G).$$

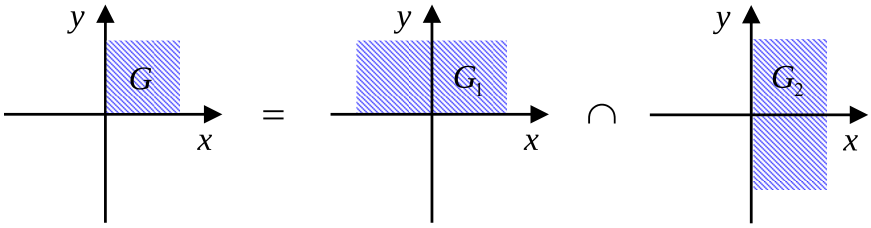
Also bildet $f(z) = (jz+1)/(-jz+1)$ die obere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises ab.

2) Für

$$f(z)=\frac{jz+1}{-jz+1} \quad \text{mit} \quad G=\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Re}(z)>0, \operatorname{Im}(z)>0\}$$

wird der Bildbereich $f(G)$ gesucht.

Da $G = G_1 \cap G_2$ mit G_1 obere Halbebene, G_2 rechte Halbebene, bilden wir zunächst G_1 und G_2 ab.



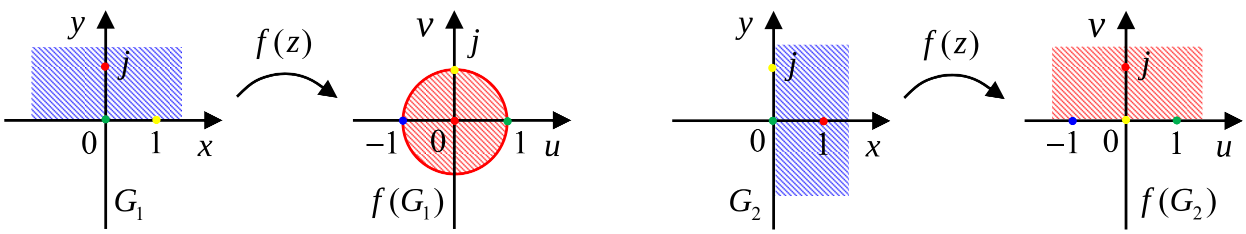
Das hat den Vorteil, dass die Ränder von G_1 und G_2 vollständige Geraden sind. Damit müssen diese Ränder wieder in ganze Geraden oder Kreise abgebildet werden. Es gilt dann

$$f(G)=f(G_1\cap G_2)=f(G_1)\cap f(G_2).$$

Wir wählen nun wieder jeweils 3 Punkte auf den Rändern und einen inneren Punkt, z.B.

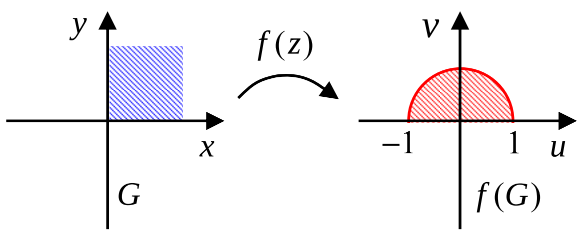
z	0	∞	j	1
$f(z)$	1	-1	0	j

und erhalten mit



das Gesamtergebnis

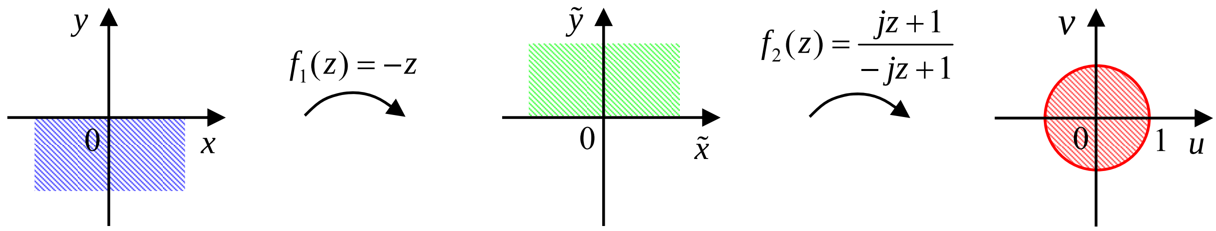
$$\begin{aligned} f(G) &= f(G_1)\cap f(G_2) \\ &= \{w\in\mathbb{C}:\ |w|<1, \operatorname{Im}(w)>0\} \end{aligned}$$



3) Gesucht ist die gebrochen lineare Funktion, die die untere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises abbildet, d.h.

$$G=\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Im}(z)<0\},\quad f(G)=\{w\in\mathbb{C}:\ |w|<1\}.$$

Wir drehen zunächst die untere Halbebene um π in die obere Halbebene und benutzen dann Beispiel 1), d.h.



liefert insgesamt die gebrochen lineare Funktion

$$f(z)=f_2\big(f_1(z)\big)=\frac{j(-z)+1}{-j(-z)+1}=\frac{-jz+1}{jz+1}=\frac{z+j}{-z+j}.$$

4) Gesucht ist die gebrochen lineare Funktion, die das Innere des Einheitskreises auf die rechte Halbebene abbildet, d.h.

$$G=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\},\quad f(G)=\{w\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(w)>0\}.$$

Nach Beispiel 1) bildet $f(z)=(jz+1)/(-jz+1)$ die obere Halbebene auf das Innere des Einheitskreises ab. Also bildet f^{-1} das Innere des Einheitskreises auf die obere Halbebene ab. Um in der rechten Halbebene zu landen drehen wir anschließend noch um $-\pi/2$.

Die Umkehrfunktion ergibt sich aus

$$w=\frac{jz+1}{-jz+1}\ \Rightarrow\ (-jz+1)w=jz+1\ \Rightarrow\ (1+w)\,jz=w-1\ \Rightarrow\ z=\frac{-jw+j}{w+1}$$

zu $f_1(z)=(-jz+1)/(z+1)$. Eine Drehung um $-\pi/2$ liefert die Funktion $f_2(z)=e^{-j\pi/2}z=-jz$. Insgesamt erhalten wir also

$$f(z)=f_2\big(f_1(z)\big)=-j\,\frac{-jz+j}{z+1}=\frac{-z+1}{z+1}.$$

Anmerkung:
Zur Lösung weiterer konkreter Abbildungsaufgaben seien ohne Beweis die folgenden Ergebnisse angeführt. Die allgemeine lineare Abbildung für

a) das Innere des Einheitskreises auf sich lautet

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z z_0^* - 1} \quad \text{mit} \quad \varphi \in \mathbb{R},\ |z_0| < 1.$$

b) die obere Halbebene auf sich lautet

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0.$$

c) die obere Halbebene auf den Einheitskreis lautet

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - z_0^*} \quad \text{mit} \quad \varphi \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im}(z_0) > 0.$$

Im folgenden werden weitere komplexe Funktionen behandelt.

Potenzfunktion
Die Potenzfunktion besitzt die Form

$$f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

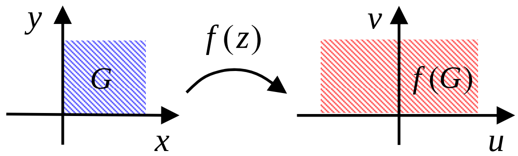
f ist stetig auf $\mathbb{C}$, aber für $n \geq 2$ nicht eineindeutig auf $\mathbb{C}$. Ist

$$z = |z|\, e^{i\varphi} \ \Rightarrow\ w = f(z) = |z|^n\, e^{in\varphi},$$

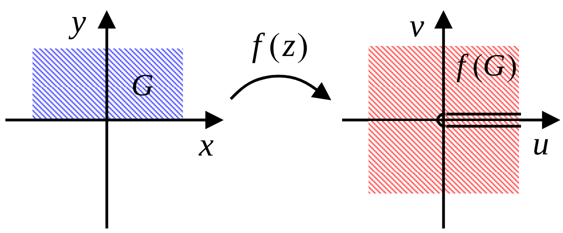
d.h. der Winkel wird mit n multipliziert.

Beispiel:

1) $f(z) = z^2,\ G = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(z) < \pi/2\}$
$\Rightarrow\ f(G) = \{w \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(w) < \pi\}.$

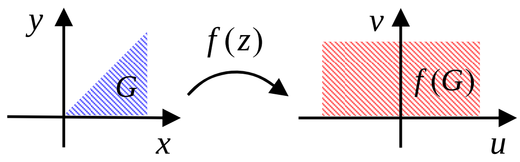


2) $f(z) = z^2,\ G = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(z) < \pi\}$
$\Rightarrow f(G) = \{w \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(w) < 2\pi\}$
$= \mathbb{C} \backslash \{z = x \in [0, \infty)\}.$



3) $f(z) = z^4,\ G = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(z) < \pi/4\}$

$\Rightarrow\ f(G) = \{w \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(w) < \pi\}.$

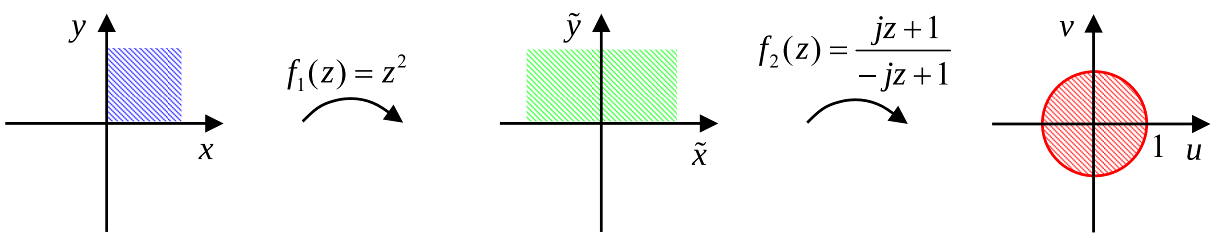


4) Das Innere des 1ten Quadranten soll auf das Innere des Einheitskreises abgebildet werden. Mit

$$f_1(z) = z^2 \quad \text{und} \quad f_2(z) = \frac{jz+1}{-jz+1}$$

gilt

$$f(z) = f_2\left(f_1(z)\right) = \frac{jz^2+1}{-jz^2+1} = \frac{-z^2+j}{z^2+j}.$$



Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion lautet

$$f(z) = e^z.$$

f ist stetig auf $\mathbb{C}$, aber nicht eineindeutig auf $\mathbb{C}$.

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

a) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R = \infty$.

b) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2},\ e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j\sin y),$

$e^{jy} = \cos y + j\sin y \ \Rightarrow\ \left|e^{jy}\right| = 1 \ \ \forall y \in \mathbb{R},$

also gilt $\left|e^z\right| = e^x$ und $\arg(e^z) = y$ falls $z = x + jy$.

c) $e^{z+2k\pi j} = e^z e^{2k\pi j} = e^z \quad k \in \mathbb{Z},$

da $e^{2k\pi j} = \cos(2k\pi) + j\sin(2k\pi) = 1 \ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$

d) $e^z \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$, da $\left|e^z\right| = e^x \neq 0 \;\; \forall z = x + jy \in \mathbb{C}$.

Also ist die e-Funktion bzgl. des Imaginärteils von z 2π-periodisch und somit in ganz $\mathbb{C}$ nicht eineindeutig, d.h.

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi j, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

denn $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow \left|e^{z_1}\right| = \left|e^{z_2}\right|$ und $\arg(e^{z_1}) = \arg(e^{z_2})$

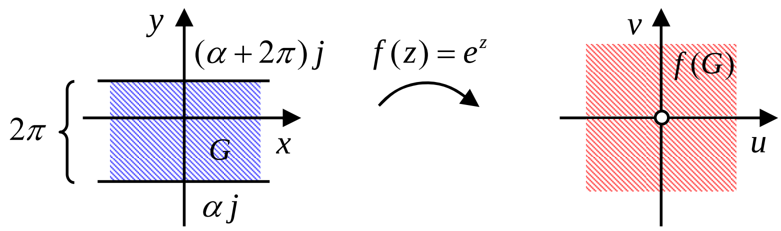
$$\Rightarrow e^{\operatorname{Re}(z_1)} = e^{\operatorname{Re}(z_2)} \text{ und } \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \text{ und } \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2) + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi j, \;\; k \in \mathbb{Z} \quad \text{umgekehrte Richtung s.o. c).}$$

Folglich bildet e^z jeden Streifen parallel zur reellen Achse der Breite $< 2\pi$ eineindeutig ab, also für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^z: \; S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}: \; \alpha < \operatorname{Im}(z) \leq \alpha + 2\pi\} \to \mathbb{C}\backslash\{0\} \quad \text{eineindeutig.}$$



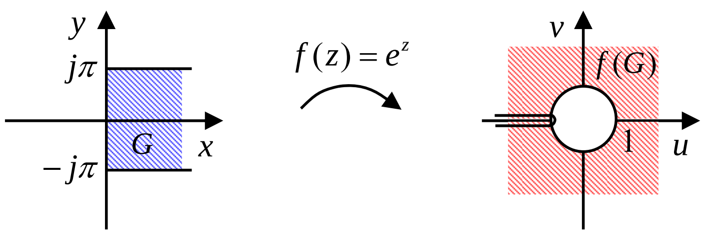
Beispiel:

1) $f(z) = e^z, \; G = \{z \in \mathbb{C}: \; \operatorname{Re}(z) > 0, \; -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$

$$\Rightarrow \; f(G) = \{w \in \mathbb{C}: \; |w| > 1, \; -\pi < \arg(w) < \pi\}$$

denn $\operatorname{Re}(z) = x > 0 \;\Rightarrow\; \left|e^z\right| = e^x > 1, \; -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi$

$$\Rightarrow \; -\pi < \arg(e^z) < \pi.$$

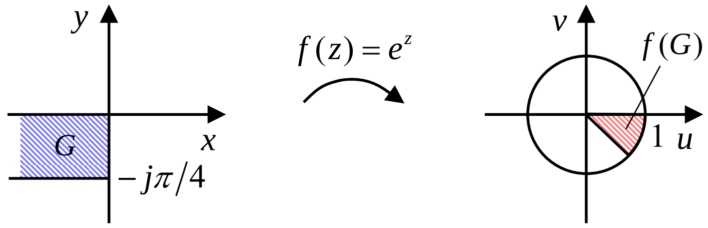


2) $f(z) = e^z,\ G = \{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}(z) < 0,\ -\pi/4 < \mathrm{Im}(z) < 0\}$

$\Rightarrow\ f(G) = \{w \in \mathbb{C}:\ |w| < 1,\ -\pi/4 < \arg(w) < 0\}$

denn $\mathrm{Re}(z) = x < 0\ \Rightarrow\ \left|e^z\right| = e^x < 1;\ -\pi/4 < \mathrm{Im}(z) < 0$

$\Rightarrow\ -\pi/4 < \arg(e^z) < 0.$



Trigonometrische Funktionen

Die Sinus- und Kosinusfunktionen

$f(z) = \sin z$ und $f(z) = \cos z$

sind stetig auf $\mathbb{C}$, aber nicht eineindeutig auf $\mathbb{C}$.

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

a) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1},\ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},\ R = \infty.$

b) $\sin z = \frac{1}{2j}\left(e^{jz} - e^{-jz}\right),\ \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{jz} + e^{-jz}\right),$

c) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$

d) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$

$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$

e) $\sin(z+2k\pi)=\sin z,\ \cos(z+2k\pi)=\cos z,\ k\in\mathbb{Z}$, also sind Sinus- und Kosinusfunktionen 2π-periodisch bzgl. des Realteils von z,

f) $\sin z=\sin(x+jy)=\sin x\cosh y+j\cos x\sinh y,$

$\cos z=\cos(x+jy)=\cos x\cosh y-j\sin x\sinh y,$

somit nehmen $\sin z$ und $\cos z$ anders als im Reellen jeden Wert auf $\mathbb{C}$ an, denn Real- und Imaginärteil können jeden Wert auf $\mathbb{R}$ annehmen.

g) $\sin z$ und $\cos z$ besitzen die gleichen Nullstellen wie die reellen Sinus- und Kosinusfunktionen, d.h. es kommen keine Nullstellen hinzu, denn

$$\sin z=0 \Leftrightarrow e^{jz}=e^{-jz} \Leftrightarrow e^{2jz}=1=e^{0} \Leftrightarrow 2jz=0+2k\pi j$$
$$\Leftrightarrow z=k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

$$\cos z=0 \Leftrightarrow e^{jz}=-e^{-jz} \Leftrightarrow e^{2jz}=-1=e^{j\pi} \Leftrightarrow 2jz=j\pi+2k\pi i$$
$$\Leftrightarrow z=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Hyperbolische Funktionen

Die Sinushyperbolikus- und Kosinushyperbolikusfunktionen

$f(z)=\sinh z$ und $f(z)=\cosh z$

sind stetig auf $\mathbb{C}$, aber nicht eineindeutig auf $\mathbb{C}$.

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

a) $\sinh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}z^{2n+1},\ \cosh z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n},\ R=\infty,$

b) $\sinh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right),\ \cosh z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right),$

c) $\cosh(jz)=\cos z,\quad \cos(jz)=\cosh z,$

$\sinh(jz)=j\sin z,\quad \sin(jz)=j\sinh z,$

denn $\cosh(jz)=(e^{jz}+e^{-jz})/2=\cos z,$

$\cos(jz)=\cosh\big(j(jz)\big)=\cosh(-z)=\cosh z,$

und $\sinh(jz) = (e^{jz} - e^{-jz})/2 = j\sin z,$

$$\sin(jz) = -j\sinh\big(j(jz)\big) = -j\sinh(-z) = j\sinh z,$$

d) $\cosh z = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(jz) = 0 \;\Leftrightarrow\; jz = \pi/2 + l\pi,\; l \in \mathbb{Z},$

$\sinh z = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(jz) = 0 \;\Leftrightarrow\; jz = l\pi,\; l \in \mathbb{Z},$

also gilt $\cosh z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = j\big(\pi/2 + k\pi\big),\; k \in \mathbb{Z},$

$\sinh z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = jk\pi,\; k \in \mathbb{Z},$

e) $\cosh z = \cosh(x + jy) = \cosh x \cosh(jy) + \sinh x \sinh(jy)$

$\Rightarrow\; \cosh z = \cosh x \cos y + j\sinh x \sin y,$

$\sinh z = \sinh(x + jy) = \sinh x \cosh(jy) + \cosh x \sinh(jy)$

$\Rightarrow\; \sinh z = \sinh x \cos y + j\cosh x \sin y,$

f) $|\cosh z| = \sqrt{\cos^2 y + \sinh^2 x},$

$|\sinh z| = \sqrt{\sinh^2 x + \sin^2 y},$

denn wegen $\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$ und $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ gilt

$$\begin{aligned}|\cosh z| &= \sqrt{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y} \\ &= \sqrt{(1 + \sinh^2 x)\cos^2 y + \sinh^2 x(1 - \cos^2 y)} \\ &= \sqrt{\cos^2 y + \sinh^2 x},\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}|\cosh z| &= \sqrt{\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y} \\ &= \sqrt{(1 + \sinh^2 x)\cos^2 y + \sinh^2 x(1 - \cos^2 y)} \\ &= \sqrt{\cos^2 y + \sinh^2 x}.\end{aligned}$$

15.2.3 Differenzierbarkeit komplexer Funktionen

Definition 15-7:

Es sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ innerer Punkt. f heißt komplex differenzierbar in $z_0 \in D$ genau dann, wenn ein $a \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a, \quad z \in D \setminus \{z_0\}$$

$f'(z_0) := a$ heißt dann Ableitung von f in z_0.

Beispiel:

1) $f(z) = c$ (konstant, $c \in \mathbb{C}$),

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{c - c}{z - z_0} = 0$$

$\Rightarrow$ $f(z) = c$ ist differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

2) $f(z) = z$ (Identitätsabbildung),

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1$$

$\Rightarrow$ $f(z) = z$ ist differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = 1 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Anmerkung:

f ist in $z_0 \in D$ (innerer Punkt) genau dann komplex differenzierbar, wenn f in einer Umgebung von z_0 komplex linear approximierbar ist, d.h.

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

Nach aufspalten der Funktion f in Real- und Imaginärteil, also

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y) \quad \text{mit} \quad z = x + jy,$$

wollen wir nun angeben, unter welchen Voraussetzungen bzgl. u und v die Funktion f komplex differenzierbar ist.

Satz 15-6:
Es sei $f(z) = u(x,y) + jv(x,y) : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z_0 = x_0 + jy_0 \in D$ innerer Punkt. Dann ist f in z_0 genau dann komplex differenzierbar, wenn u und v in $(x_0,y_0)^T$ total differenzierbar sind und dort die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \text{ und } u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0)$$

gelten. In diesem Fall ist dann

$$f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + jv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) - ju_y(x_0,y_0).$$

Beweis:
Der Real- und Imaginärteil von $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|)$ kann mit $f'(z_0) = a + jb$ wie folgt in reeller Form ausgedrückt werden.

$$u(x,y) = u(x_0,y_0) + (a,-b)(x - x_0, y - y_0)^T + o\left(\left\|(x - x_0, y - y_0)^T\right\|_2\right)$$

und

$$v(x,y) = v(x_0,y_0) + (b,a)(x - x_0, y - y_0)^T + o\left(\left\|(x - x_0, y - y_0)^T\right\|_2\right).$$

Ein Vergleich mit Satz 7-8 zeigt, dass dies nicht nur gleichbedeutend ist mit der totalen Differenzierbarkeit von u und v, sondern auch, dass zusätzlich

$$\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} = \operatorname{grad} u(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \operatorname{grad} v(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} v_x(x_0,y_0) \\ v_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

gelten muss.

Anmerkung: (*Kriterium für totale Differenzierbarkeit*, vgl. Satz 7-10)
Existieren in einer Umgebung von $(x_0,y_0)^T$ die partiellen Ableitungen von u und v, und sind diese dort stetig, so sind u und v in $(x_0,y_0)^T$ total differenzierbar.

Beispiel:

1) $f(z)=z^*$, also $u(x,y)=x, v(x,y)=-y$ (stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$), $u_x=1\neq v_y=-1 \Rightarrow f$ ist nirgends komplex differenzierbar.

2) $f(z)=|z|^2$, also $u(x,y)=x^2+y^2, v(x,y)=0$ (stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$), $u_x=2x=v_y=0$ nur für $x=0$, $u_y=2y=-v_x=0$ nur für $y=0 \Rightarrow f$ ist nur in $z=0$ komplex differenzierbar mit $f'(0)=0$.

3) $f(z)=\operatorname{Re} z$, also $u(x,y)=x, v(x,y)\equiv 0$ (stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$) $u_x=1\neq v_y=0 \Rightarrow f$ ist nirgends komplex differenzierbar.

4) $f(z)=e^z=e^x\cos y+je^x\sin y \Rightarrow u(x,y)=e^x\cos y, v(x,y)=e^x\sin y$ (stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$)
$u_x(x,y)=e^x\cos y=v_y(x,y)$,
$u_y(x,y)=-e^x\sin y=-v_x(x,y) \quad \forall (x,y)^T\in\mathbb{R}^2$
$\Rightarrow f(z)=e^z$ ist differenzierbar auf $\mathbb{C}$ mit $(e^z)'=e^z \quad \forall z\in\mathbb{C}$, denn

$$(e^z)'=u_x(x,y)+iv_x(x,y)=e^x\cos y+je^x\sin y=e^z.$$

Da die komplexe Differenzierbarkeit über den Grenzwert des Differenzenquotienten definiert ist (also analog wie die reelle Differenzierbarkeit von reellen Funktionen), gelten viele Eigenschaften wie bei reellen Funktionen (die Beweise verlaufen alle analog).

Satz 15-7:

Es seien f und g in $z_0\in D(f)\subset\mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Dann gilt

a) f ist stetig in z_0

b) $f+g$ ist komplex differenzierbar in z_0 mit
$$(f+g)'(z_0)=f'(z_0)+g'(z_0)$$

c) $f\cdot g$ ist komplex differenzierbar in z_0 mit
$$(f\cdot g)'(z_0)=f'(z_0)g(z_0)+f(z_0)g'(z_0) \quad \text{(Produktregel)}$$

d) f/g ist komplex differenzierbar in z_0 (falls $g(z_0)\neq 0$) mit

$$\left(f/g\right)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)} \quad \text{(Quotientenregel)}$$

e) Ist f in z_0 komplex differenzierbar und g in $f(z_0)$ komplex differenzierbar, so ist $h=g\circ f$ in z_0 komplex differenzierbar mit

$$h'(z_0)=g'\big(f(z_0)\big)\,f'(z_0) \quad \text{(Kettenregel)}$$

Beispiel:

1) $\sin' z=\cos z,\ \cos' z=-\sin z \quad \forall z\in\mathbb{C}$, denn

$$\sin' z=\frac{1}{2j}\left(e^{jz}-e^{-jz}\right)'=\frac{1}{2j}\left(je^{jz}+je^{-jz}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{jz}+e^{-jz}\right)=\cos z$$

$$\cos' z=\frac{1}{2}\left(e^{jz}+e^{-jz}\right)'=\frac{1}{2}\left(je^{jz}-je^{-jz}\right)=-\frac{1}{2j}\left(e^{jz}-e^{-jz}\right)=-\sin z$$

2) $f(z)=z^n \ \Rightarrow\ f'(z)=nz^{n-1},\ n\in\mathbb{N},\ \forall z\in\mathbb{C}$

3) $f(z)=e^{\sin z} \ \Rightarrow\ f'(z)=\cos z\, e^{\sin z},\ \forall z\in\mathbb{C}$

Definition 15-8: (*Holomorphie*)

Es sei $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und G ein Gebiet mit $G\subset D$.

a) f heißt holomorph (analytisch, regulär) auf G, wenn f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist.

b) f heißt holomorph in $z_0\in D$, wenn es eine Umgebung $U(z_0)\subset D$ gibt, in der f holomorph ist.

Anmerkung:

Die Holomorphie von f in z_0 stellt also stärkere Bedingung an f als die komplexe Differenzierbarkeit von f in z_0.

Beispiel:

1) $f(z)=|z|^2 \ \Rightarrow\ f$ ist nur in $z_0=0$ differenzierbar (s. Beispiel 2, S. 15-55)
$\Rightarrow\ f$ ist nirgends holomorph.

2) $f(z)=z^n,\ f(z)=e^z,\ f(z)=\sin z,\ f(z)=\cos z,\ f(z)=\sinh z,\ f(z)=\cosh z$ sind holomorph in $\mathbb{C}$ (da jeweils differenzierbar auf $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}$ Gebiet).

Anders als bei der reeller Differenzierbarkeit gilt für holomorphe Funktionen der folgende Satz.

Satz 15-8:
Es sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, G ein Gebiet mit $G \subset D$ und f holomorph auf G. Dann ist f beliebig oft differenzierbar (also auch beliebig oft holomorph) auf G.

Beweis: (s. Satz 15-24)

Satz 15-9:
Es sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, G ein Gebiet mit $G \subset D$ und f holomorph auf G. Dann sind $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ harmonische Funktionen auf G, d.h. es gilt $\Delta u = 0$ und $\Delta v = 0$ auf G.

Beweis:
Für eine auf G holomorphe Funktion $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ gilt

$$u_x = v_y,\; u_y = -v_x \;\text{ auf }\; G \;\Rightarrow\; u_{xx} = v_{yx},\; u_{yy} = -v_{xy} \;\text{ auf }\; G$$

bzw.

$$v_x = -u_y,\; v_y = u_x \;\text{ auf }\; G \;\Rightarrow\; v_{xx} = -u_{yx},\; v_{yy} = u_{xy} \;\text{ auf }\; G.$$

Da alle partiellen Ableitungen höherer Ordnung existieren und stetig sind, (vgl. Satz 15-8) gilt also

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\text{ und }\; \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \;\text{ auf }\; G.$$

Anmerkung:
Nur harmonische Funktionen können Real- oder Imaginärteil einer in einem Gebiet G holomorphen Funktion f sein.

Beispiel:
Für welche $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ ist $u(x,y) = x\varphi(y)$ der Realteil einer in $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion f? Wie lautet dann die Funktion $f(z)$?

Notwendige Bedingung:

$\Delta u = 0$, also $u_x = \varphi(y)$, $u_{xx} = 0$, $u_y = x\varphi'(y)$, $u_{yy} = x\varphi''(y)$

$$\Rightarrow \ \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = x\varphi''(y) = 0 \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ \varphi''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \ \varphi(y) = cy + d \ \text{ mit } \ c, d \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ u(x, y) = cxy + dx, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Bestimmung des zugehörigen Imaginärteils:

$v_y = u_x = cy + d$ und $v_x = -u_y = -cx$ (Cauchy-Riemannsche Dgln)

$$\Rightarrow \ v(x, y) = \int (cy + d)\,dy + h(x) = cy^2/2 + dy + h(x),$$

$$v_x = h'(x) = -u_y = -cx \ \Rightarrow \ h(x) = -cx^2/2 + e, \ e \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ v(x, y) = c(y^2 - x^2)/2 + dy + e, \ c, d, e \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \ f(z) = u(x, y) + jv(x, y) = cxy + dx + j\left(c(y^2 - x^2)/2 + dy + e\right)$$

$$= c\left(2xy + j(y^2 - x^2)\right)/2 + d(x + jy) + je$$

$$= -\frac{jc}{2} z^2 + dz + je, \ c, d, e \in \mathbb{R},$$

da $z = x + jy$ und $z^2 = (x^2 - y^2) + j2xy \ \Rightarrow \ -jz^2 = 2xy + j(y^2 - x^2)$.

15.2.4 Umkehrfunktionen

Lokale Umkehrbarkeit

Satz 15-10: (*Lokale Umkehrfunktion*)

Es sei $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ innerer Punkt. Ist f holomorph in z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$, so ist f in z_0 lokal eineindeutig, d.h. f bildet eine (genügend kleine) Umgebung $U(z_0) \subset D$ umkehrbar eindeutig auf $f\left(U(z_0)\right)$ ab. Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f\left(U(z_0)\right) \to U(z_0)$ ist holomorph in $w_0 = f(z_0)$ mit

$$f^{-1\prime}(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} \ \text{ und } \ w_0 = f(z_0), \ z_0 = f^{-1}(w_0).$$

Beweis:

f holomorph in z_0 $\Rightarrow$ es existiert eine Umgebung $U(z_0) \subset D$ (Gebiet) mit f holomorph auf $U(z_0)$ $\Rightarrow$ alle partiellen Ableitungen höherer Ordnung von $u = \mathrm{Re}(f)$ und $v = \mathrm{Im}(f)$ existieren und sind stetig (vgl. Satz 15-8).

Auf einer genügend kleinen Umgebung $U(z_0)$ gilt also

$$\det\begin{pmatrix} u_x(x,y) & u_y(x,y) \\ v_x(x,y) & v_y(x,y) \end{pmatrix} = u_x(x,y)v_y(x,y) - u_y(x,y)v_x(x,y)$$
$$= u_x^2(x,y) + v_x^2(x,y) = |f'(z)|^2 > 0$$

Nach dem Satz über die lokale Umkehrbarkeit vektorwertiger Funktionen ist $(u,v)^T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf $U(z_0)$ lokal umkehrbar und somit auch f.

Für die Umkehrfunktion $f^{-1} : f\left(U(z_0)\right) \to U(z_0)$ mit $w = f(z)$ und $\tilde{w} = f(\tilde{z})$ ergibt sich die Differentiationsregel aus

$$\lim_{\tilde{w}\to w} \frac{f^{-1}(\tilde{w}) - f^{-1}(w)}{\tilde{w} - w} = \lim_{\tilde{z}\to z} \frac{\tilde{z} - z}{f(\tilde{z}) - f(z)} = \frac{1}{f'(z)} \quad \forall w \in f\left(U(z_0)\right).$$

Beispiel:

1) $f(z) = z^n,\ n \geq 2 \ \Rightarrow\ f$ holomorph auf $\mathbb{C}$ mit
$$f'(z) = nz^{n-1} \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

$\Rightarrow$ f ist lokal umkehrbar auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, f ist aber nicht global umkehrbar auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, da f nicht eineindeutig auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Für $f^{-1}(w)$ folgt z.B. für $n = 2$ lokal

$$f^{-1\prime}(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{2z} = \frac{1}{2w^{1/2}}.$$

2) $f(z) = e^z \ \Rightarrow\ f$ holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = e^z \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ f ist lokal umkehrbar auf $\mathbb{C}$, f ist aber nicht global umkehrbar auf $\mathbb{C}$, da f nicht eineindeutig auf $\mathbb{C}$.

Für $f^{-1}(w)$ folgt lokal

$$f^{-1\prime}(w) = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

Globale Umkehrbarkeit

1) Potenzfunktion/Wurzelfunktion

$f(z) = z^n,\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

Da für $z = |z|\, e^{j\varphi} \;\Rightarrow\; w = f(z) = z^n = |z|^n\, e^{jn\varphi}$, wird der n-fache Winkelbereich des Urbildbereiches überstrichen.

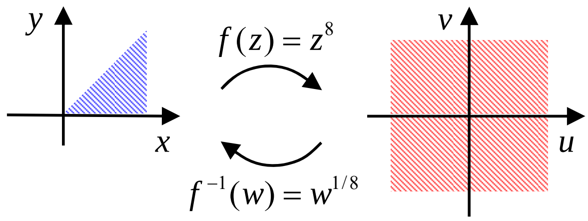
Also ist $f: W_\alpha \to \mathbb{C}$ für jedes $W_\alpha = \{z \in \mathbb{C}:\ \alpha \leq \arg z < \alpha + 2\pi/n\}$ eineindeutig und es existiert $f^{-1}: \mathbb{C} \to W_\alpha$.

Unter dem Hauptwert der Wurzelfunktion versteht man

$f^{-1}:\ \mathbb{C} \to W_0 = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 \leq \arg(z) < 2\pi/n\}$

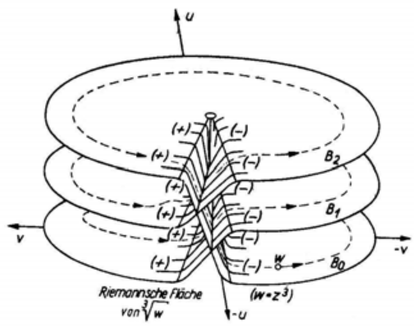
$w \mapsto w^{1/n} = \sqrt[n]{|w|}e^{j\varphi/n}$ mit

$w = |w|\, e^{i\varphi},\ 0 \leq \varphi < 2\pi.$



Riemannsche Fläche

Um eine globale Umkehrfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ zu erhalten, müsste man $\mathbb{C}$ in n Winkelbereich aufteilen und jeden dieser Winkelbereiche auf eine $\mathbb{C}$-Ebene abbilden. Diese n $\mathbb{C}$-Ebenen müsste man dann aneinanderheften. Auf dieser Riemannschen Fläche ist dann f^{-1} eindeutig erklärt.



2) Exponentialfunktion

$f(z) = e^z$

Da $w = f(z) = e^z$ 2π-periodisch bzgl. des Imaginärteils von z ist, also $e^{z+2k\pi j} = e^z\ \ \forall k \in \mathbb{Z}$, bildet $f(z) = e^z$ jeden Streifen parallel zur reellen Achse der Breite $< 2\pi$, also $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R},\ \alpha < \mathrm{Im}(z) \leq \alpha + 2\pi\}$ eineindeutig auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ab. Somit gilt

$$e^z:\ S_\alpha \to \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ ist eineindeutig mit } f^{-1}:\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S_\alpha.$$

Aus $\quad e^z = w \Leftrightarrow e^{x+iy} = e^x e^{iy} = w = |w|\, e^{i\varphi}$

$$\Leftrightarrow e^x = |w| \text{ und } \varphi = y + 2l\pi,\ l \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \ln|w| \text{ und } y = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow z = \ln|w| + j\left(\arg(w) + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

ergibt sich die Umkehrfunktion, die Logarithmusfunktion heißt, zu

$$z = \log_{(\alpha)} w = \ln|w| + j\left(\arg(w) + 2k\pi\right) \text{ mit } \alpha < \arg(w) + 2k\pi \le \alpha + 2\pi$$

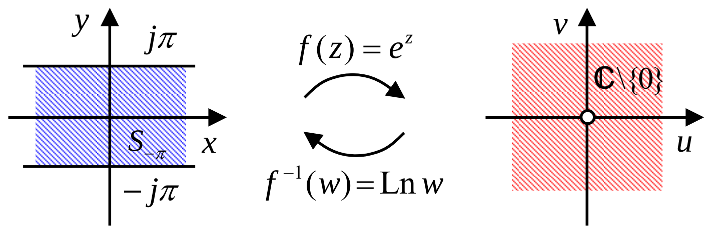
Unter dem Hauptwert der Logarithmusfunktion versteht man

$$f^{-1}:\ \mathbb{C}\setminus\{0\} \to S_{-\pi} = \left\{z \in \mathbb{C}:\ -\pi < \operatorname{Im} z \le \pi\right\}$$

Damit erhalten wir für den Hauptwert

$$\operatorname{Ln} w = \ln|w| + j\arg(w)$$

mit $-\pi < \arg(w) \le \pi$.



Anmerkung:

Für $w = u > 0$ gilt für den Hauptwert

$$\operatorname{Ln} w = \ln u,\quad w = u > 0.$$

Der Hauptwert liefert die Erweiterung der reellen Funktion auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Riemannsche Fläche

Auch hier kann man wieder mit Hilfe einer Riemannschen Fläche eine globale Umkehrfunktion log w erhalten. In diesem Fall müssen unendlich viele $\mathbb{C}$-Ebenen aneinandergeheftet werden.

Ableitung von log w

Als Umkehrfunktion der holomorphen Funktion $w = f(z) = e^z$ ist $z = f^{-1}(w) = \log w$ in $\mathbb{C}\setminus\{z = x \in \mathbb{R}:\ x \le 0\}$ holomorph mit der Ableitung

$$\log' w = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w} \Rightarrow \log' w = \frac{1}{w}\quad \forall w \in \mathbb{C}\setminus\left\{w = u \in \mathbb{R}:\ u \le 0\right\}.$$

Beispiel:

Für den Hauptwert $\operatorname{Ln} w = \ln|w| + j\arg(w),\ -\pi < \arg(w) \le \pi$ gilt

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + j\pi = j\pi, \qquad \operatorname{Ln} 1 = \ln 1 = 0,$$

$$\operatorname{Ln} j = \ln 1 + j\pi/2 = j\pi/2, \quad \operatorname{Ln}(-j) = \ln 1 - j\pi/2 = -j\pi/2.$$

3) *Allgemeine Potenzfunktion*

$$f(z) = z^a = e^{a \log z},\ a \in \mathbb{C}$$

Hierbei wird für den Hauptwert von z^α der Hauptwert von $\log z$ genommen.

Anmerkung:

1) Für $z = x > 0,\ a \in \mathbb{R}$, gilt

$$z^a = e^{a \ln x} = x^a.$$

2) Für $a = 1/n$ erhält man

$$z^{1/n} = e^{(1/n)\log z} = e^{(1/n)(\ln|z| + j\arg(z))} = e^{(1/n)\ln|z|} e^{j(1/n)\arg(z)}$$

$$\Rightarrow\ z^{1/n} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{j\arg(z)/n},\ -\pi < \arg(z) \le \pi.$$

Dies stimmt mit dem Hauptwert der Umkehrfunktion von z^n im Bereich $\{z \in \mathbb{C} :\ 0 \le \arg(z) \le \pi\}$ überein.

Ableitung von $f(z) = z^a$

$f(z) = z^a$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} :\ x \le 0\}$ mit der Ableitung

$$(z^a)' = (e^{a \log z})' = a z^{a-1}.$$

Beispiel:

Für den Hauptwert $f(z) = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z},\ a \in \mathbb{C}$ gilt

$$j^j = e^{j \operatorname{Ln} j} = e^{j(j\pi/2)} = e^{-\pi/2},$$

$$(-1)^j = e^{j \operatorname{Ln} j} = e^{j(j\pi)} = e^{-\pi}.$$

4) Trigonometrische Funktionen

$$\sin z = w \;\Rightarrow\; \sin z = (e^{jz} - e^{-jz})\big/(2j) = w \;\Rightarrow\; e^{jz} - e^{-jz} = 2jw$$

$$\Rightarrow\; e^{2jz} - 1 = 2jwe^{jz} \;\Rightarrow\; e^{2jz} - 2jwe^{jz} - w^2 = 1 - w^2$$

$$\Rightarrow\; (e^{jz} - jw)^2 = 1 - w^2 \;\Rightarrow\; e^{jz} - jw = (1-w^2)^{1/2} \quad \text{(Hauptwert)}$$

$$\Rightarrow\; e^{jz} = jw + (1-w^2)^{1/2} \;\Rightarrow\; jz = \mathrm{Ln}\left(jw + (1-w^2)^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow\; z = -j\,\mathrm{Ln}\left(jw + (1-w^2)^{1/2}\right).$$

$$\cos z = w \;\Rightarrow\; \cos z = (e^{jz} + e^{-jz})\big/2 = w \;\Rightarrow\; e^{jz} + e^{-jz} = 2w$$

$$\Rightarrow\; e^{2jz} + 1 = 2we^{jz} \;\Rightarrow\; e^{2jz} - 2we^{jz} + w^2 = -(1 - w^2)$$

$$\Rightarrow\; (e^{jz} - w)^2 = j^2(1 - w^2) \;\Rightarrow\; e^{jz} - w = j(1-w^2)^{1/2} \quad \text{(Hauptwert)}$$

$$\Rightarrow\; e^{jz} = w + j(1-w^2)^{1/2} \;\Rightarrow\; jz = \mathrm{Ln}\left(w + j(1-w^2)^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow\; z = -j\,\mathrm{Ln}\left(w + j(1-w^2)^{1/2}\right).$$

Somit definiert man als Hauptwert

$$\mathrm{Arcsin}\, w = -j\,\mathrm{Ln}\left(jw + (1-w^2)^{1/2}\right),$$

$$\mathrm{Arccos}\, w = -j\,\mathrm{Ln}\left(w + j(1-w^2)^{1/2}\right)$$

Beispiel:

$$\mathrm{Arcsin}\,1 = -j\,\mathrm{Ln}(j) = -j(j\pi/2) = \pi/2,$$

$$\mathrm{Arcsin}\,(-1) = -j\,\mathrm{Ln}(-j) = -j(-j\pi/2) = -\pi/2,$$

$$\mathrm{Arccos}\,1 = -j\,\mathrm{Ln}(1) = 0,$$

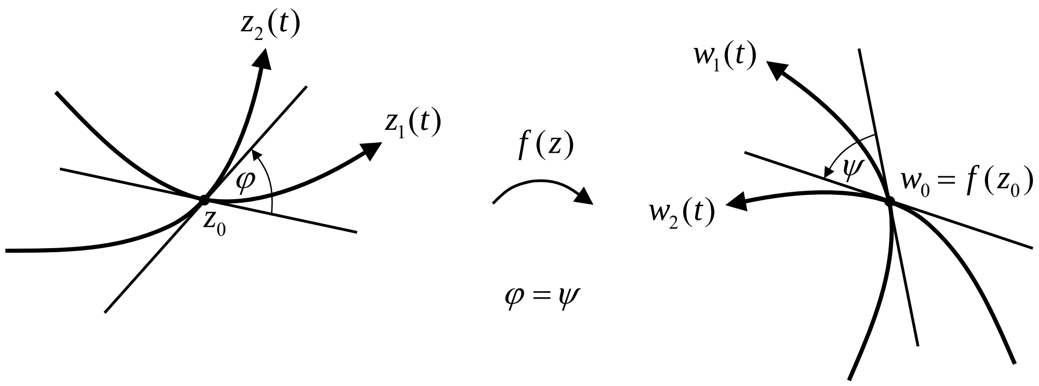
$$\mathrm{Arccos}\,(-1) = -j\,\mathrm{Ln}(-1) = -j(j\pi) = \pi,$$

$$\mathrm{Arcsin}\; j = -j\,\mathrm{Ln}\left(j^2 + (1-j^2)^{1/2}\right) = -j\,\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}-1\right) = -j\ln\left(\sqrt{2}-1\right),$$

$$\mathrm{Arcsin}\,(-j) = -j\,\mathrm{Ln}\left(-j^2 + (1-j^2)^{1/2}\right) = -j\,\mathrm{Ln}\left(\sqrt{2}+1\right) = -j\ln\left(\sqrt{2}+1\right).$$

15.2.5 Konforme Abbildungen

<u>Definition 15-9:</u> (*Winkeltreue*)
Es sei $f: D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$ innerer Punkt. f heißt winkeltreu in z_0, wenn für alle Kurven $\{z = z_1(t):\ t \in [\alpha,\beta]\}$ und $\{z = z_2(t):\ t \in [\gamma,\delta]\}$ die sich in z_0 schneiden und die in z_0 Tangenten besitzen, auch die Bildkurven $\{w = w_1(t):\ t \in [\alpha,\beta]\}$ und $\{w = w_2(t):\ t \in [\gamma,\delta]\}$ in $f(z_0)$ Tangenten besitzen und die Winkel zwischen den Tangentenvektoren nach Größe und Drehsinn übereinstimmen.



<u>Satz 15-11:</u>
Ist f holomorph in z_0 mit $f'(z_0) \neq 0$ dann ist f winkeltreu in z_0

<u>Beweis:</u>
Seien

$$\{z = z_1(t):\ t \in [-1,1]\} \text{ und } \{z = z_2(t):\ t \in [-1,1]\}$$

zwei Kurven mit $z_1(0) = z_2(0) = z_0$ und

$$\{w = w_1(t) = f(z_1(t)):\ t \in [-1,1]\} \text{ und } \{w = w_2(t) = f(z_2(t)):\ t \in [-1,1]\}$$

die Bildkurven. Dann gilt $z_1'(0) \neq 0$ und $z_2'(0) \neq 0$, da Tangenten existieren.

$$\Rightarrow\ w_1'(0) \neq f'(z_1(0))\, z_1'(0) = f'(z_0) z_1'(0) \neq 0 \text{ und}$$

$$\Rightarrow\ w_2'(0) \neq f'(z_2(0))\, z_2'(0) = f'(z_0) z_2'(0) \neq 0, \text{ da } f'(z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow\ w_2'(0)/w_1'(0) = z_2'(0)/z_1'(0).$$

Mit $z_k'(0) = |z_k'(0)|\, e^{j\varphi_k}$ und $w_k'(0) = |w_k'(0)|\, e^{j\psi_k}$ für $k = 1,2$ folgt

$$|z_2'(0)/z_1'(0)|\,e^{j(\varphi_2-\varphi_1)} = |w_2'(0)/w_1'(0)|\,e^{j(\psi_2-\psi_1)}$$

$$\Rightarrow\ e^{j(\varphi_2-\varphi_1)} = e^{j(\psi_2-\psi_1)} \ \Rightarrow\ \varphi_2-\varphi_1 = \psi_2-\psi_1+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ die Winkel stimmen nach Größe und Drehsinn überein.

<u>Definition 15-10:</u> (*Maßstabstreue*)
Es sei $f: D\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und $z_0\in D$ innerer Punkt. f heißt maßstabstreu in z_0, wenn eine Konstante $K>0$ existiert mit

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| = K > 0.$$

D.h. für z nahe bei z_0 sind die Verzerrungsfaktoren der Abbildung f, d.h. der Quotient der Strecken von $f(z)$ nach $f(z_0)$ und von z nach z_0, näherungsweise gleich. Die Abbildung f ist somit lokal maßstabstreu.

<u>Satz 15-12:</u>
Ist f holomorph in z_0 mit $f'(z_0)\neq 0$ dann ist f maßstabstreu in z_0

<u>Beweis</u>:

$$\lim_{z\to z_0}\left|\big(f(z)-f(z_0)\big)/(z-z_0)\right| = |f'(z_0)| > 0.$$

<u>Definition 15-11:</u> (*lokal konform, konform*)
Es sei $f: G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und G ein Gebiet.

a) f heißt lokal konform auf G, wenn f in allen $z\in G$ winkeltreu und maßstabstreu ist.

b) f heißt konform auf G, wenn f lokal konform und eineindeutig auf G ist.

<u>Satz 15-13:</u>
Es sei $f: G\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ und G ein Gebiet.

a) Ist f holomorph auf G mit $f'(z)\neq 0\ \ \forall z\in G$
$\Rightarrow$ f ist lokal konform auf G.

b) Ist f holomorph auf G mit $f'(z)\neq 0\ \ \forall z\in G$ und eineindeutig auf G
$\Rightarrow$ f ist konform auf G.

Beweis:
Diese Aussagen folgen sofort aus Satz 15-11 und Satz 15-12.

Beispiel:

1) $f(z) = az,\ a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ fest (*Drehstreckung*).

f ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit $f'(z) = a \neq 0$, f ist eineindeutig auf $\mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ ist konform auf $\mathbb{C}$.

2) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d},\ ad - bc \neq 0$ (*gebrochen lineare Abbildung*).

f ist holomorph und eineindeutig auf $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$

$$f'(z) = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \text{ auf } \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$$

$\Rightarrow f$ ist konform auf $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$.

3) $f(z) = z^n,\ n \geq 2$ (*Potenzfunktion*).

$f'(z) = nz^{n-1} \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

f ist holomorph mit $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$\Rightarrow f$ ist lokal konform auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

f ist eineindeutig auf jedem Winkelbereich
$W_\alpha = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \alpha < \arg(z) < \alpha + 2\pi/n\}$

$\Rightarrow f$ ist konform auf jedem Winkelbereich $W_\alpha \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$

4) $f(z) = e^z$ (*Exponentialfunktion*).

$f'(z) = e^z \neq 0\ \ \forall z \in \mathbb{C}$

f ist homomorph mit $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$ ist lokal konform auf $\mathbb{C}$

f ist eineindeutig auf jedem Streifen $S_\alpha = \{z \in \mathbb{C}\colon\ \alpha < \operatorname{Im}(z) < \alpha + 2\pi\}$

$\Rightarrow f$ ist konform auf jedem Streifen $S_\alpha \subset \mathbb{C}$

5) $f(z) = \operatorname{Ln} z$ (*Hauptwert der Logarithmusfunktion*)

$f'(z) = 1/z \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \leq 0\}$

f ist holomorph mit $f'(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \leq 0\}$

$\Rightarrow f$ ist lokal konform auf $\mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \leq 0\}$.

f ist eineindeutig auf $\mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \leq 0\}$

$\Rightarrow f$ ist konform auf $\mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \leq 0\}$.

6) $f(z) = z^{1/n}$ (*Hauptwert der Wurzelfunktion*)

$f'(z) = z^{(1/n)-1}/n \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \geq 0\}$

f ist holomorph mit $f'(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \geq 0\}$

$\Rightarrow f$ ist lokal konform auf $\mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \geq 0\}$.

f ist eineindeutig auf $\mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \geq 0\}$

$\Rightarrow f$ ist konform auf $\mathbb{C} \setminus \{z = x: \; x \geq 0\}$.

Satz 15-14:

Sind $f_1: G_1 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_2: G_2 \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und G_1, G_2 Gebiete mit f_1 konform auf G_1 und f_2 konform auf $G_2 = f_1(G_1)$ dann ist $f = f_1 \circ f_2$ konform auf G_1

Beweis:

Eine Hintereinanderschachtelung von maßstabstreuen, winkeltreuen und eineindeutigen Abbildungen besitzt wieder diese Eigenschaften.

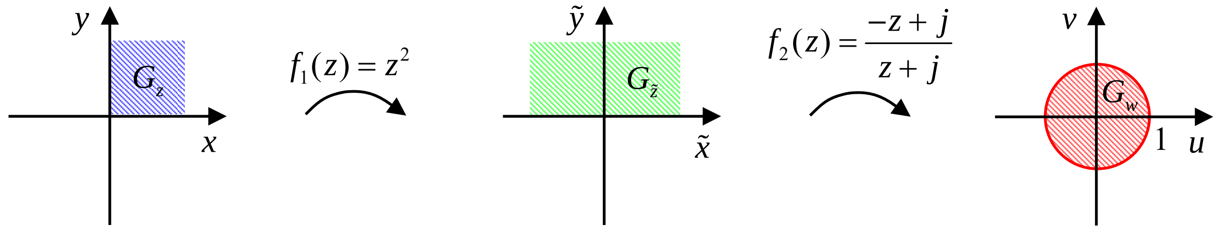
Beispiel:

$$f(z) = \frac{-z^2 + j}{z^2 + j}, \;\; G_z = \{z \in \mathbb{C}: \; \operatorname{Re}(z) > 0, \; \operatorname{Im}(z) > 0\}.$$

Es soll überprüft werden, ob f das Gebiet G_z konform auf $G_w = f(G_z)$ abbildet. Hierzu zerlegen wir f gemäß

$$f(z) = f_2\left(f_1(z)\right) \;\text{ mit }\; f_1(z) = z^2, \;\; f_2(z) = \frac{-z + j}{z + j},$$

in einfacher zu untersuchenden Standardabbildungen.



$$G_z = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(z) < \pi/2\} \ \Rightarrow\ G_{\tilde{z}} = f_1(G_z) = \{\tilde{z} \in \mathbb{C}:\ 0 < \arg(\tilde{z}) < \pi\}$$

$$\Rightarrow\ G_w = f_2(G_{\tilde{z}}) = \{w \in \mathbb{C}:\ |w| < 1\}$$

f_1 ist konform auf G_z, da $z = 0 \notin G_z$ und der Winkelbereich $< 2\pi/2 = \pi$ ist,

f_2 ist konform auf $G_{\tilde{z}}$, da gebrochen lineare Abbildung mit $(-j) \notin G_{\tilde{z}}$

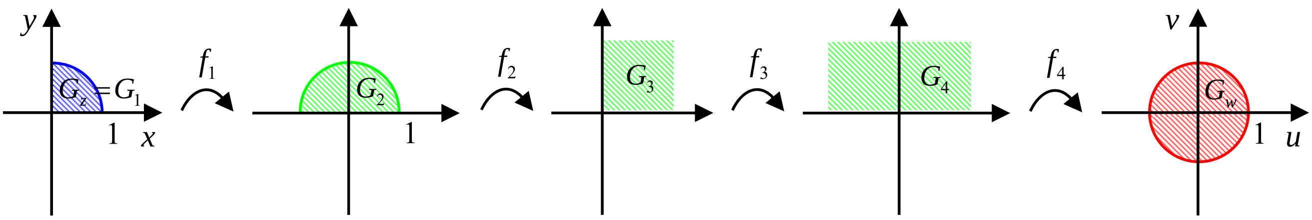
$\Rightarrow\ f$ ist konform auf $G_z \ \Rightarrow\ f$ bildet G_z konform auf $G_w = f(G_z)$ ab.

Für Anwendungen ist die Fragestellung wichtig, ob es für zwei Gebiete G_1 und G_2 in $\mathbb{C}$ eine konforme Abbildung $f: G_1 \to G_2$ mit $f(G_1) = G_2$ gibt. Die Antwort auf diese Frage liefert der folgende hier ohne Beweis zitierte Satz.

Satz 15-15: (*Riemannscher Abbildungssatz*)
Sind $G_z, G_w \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängende Gebiete mit $G_z \neq \mathbb{C}$, $G_w \neq \mathbb{C}$ dann existiert eine konforme Abbildung $f: G_z \to G_w$ mit $f(G_z) = G_w$.

Beispiel:
Für $G_z = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $G_w = \{w \in \mathbb{C}:\ |w| < 1\}$.
suchen wir die konforme Abbildung $f: G_z \to G_w$ mit $f(G_z) = G_w$.

$$f_1(z) = z^2, \quad f_2(z) = \frac{-jz + j}{z+1}, \quad f_3(z) = z^2, \quad f_4(z) = \frac{jz + j}{-jz+1}$$



Insgesamt erhalten wir dann

$$f(z) = f_4\Big(f_3\big(f_2\big(f_1(z)\big)\big)\Big)$$

$$= f_4\left(\left(\frac{-jz^2+j}{z^2+1}\right)^2\right) = \frac{j\left(\frac{-jz^2+j}{z^2+1}\right)^2+1}{-j\left(\frac{-jz^2+j}{z^2+1}\right)^2+1} = (-j)\frac{z^4+2jz^2+1}{z^4-2jz^2+1}.$$

f_1 ist konform auf $G_1 = G_z$, $z = 0 \notin G_1$ und der Winkelbereich $< \pi$,

f_2 ist konform auf $G_1 = f_1(G_z)$, da $(-1) \notin G_2$,

f_3 ist konform auf $G_3 = f_2(G_2)$, da $z = 0 \notin G_3$ und der Winkelbereich $< \pi$,

f_4 ist konform auf $G_4 = f_3(G_3)$, da $(-j) \notin G_4$

Da die Einzelabbildungen f_k jeweils auf G_k konform sind bildet f das Gebiet G_z konform auf G_w ab.

15.3 Komplexe Integration

15.3.1 Komplexe Kurvenintegrale

Für $K = \{z(t) = x(t) + j\,y(t):\ t \in [\alpha,\beta]\}$ einer Kurve in $\mathbb{C}$ und $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $K \subset D$ und f stetig auf K wollen wir im folgenden definieren, was wir unter dem Integral von f entlang K verstehen wollen.

Hierzu definieren wir zunächst analog zur Riemann-Summe die Riemann-Stieltjes-Summe.

<u>Definition 15-12:</u> (*Riemann-Stieltjes-Summe*)

Es sei $Z = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[\alpha,\beta]$, $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $(k=1,2,\ldots,n)$ Zwischenpunkte. Dann heißt

$$S_Z(f,\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{n} f\big(z(\tau_k)\big)\big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big),\ \ \boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)^T$$

Riemann-Stieltjes-Summe von f bzgl. der Zerlegung Z.

Existiert nun ein $I \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{|z|\to 0} S_Z(f,\boldsymbol{\tau}) = I$ unabhängig von der Wahl der Zerlegung und der Wahl der Zwischenpunkte, so nennt man diesen Wert I das Riemann-Stieltjes Integral von f entlang K.

Definition 15-13: (*Riemann-Stieltjes-Integral*)
Existiert ein $I \in \mathbb{C}$ und existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ so, dass aus $|Z| < \delta$ bei beliebiger Wahl der Zwischenpunkte τ_k folgt

$$\left|S_Z(f,\boldsymbol{\tau}) - I\right| < \varepsilon,$$

dann heißt

$$I = \int_K f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)\,dz(t)$$

das Riemann-Stieltjes Integral von f entlang K.

Beispiel:
Es sei $K = \{z(t) : t \in [\alpha,\beta], z(\alpha)=a, z(\beta)=b\}$ eine beliebige stückweise glatte Kurve zwischen a und b in $\mathbb{C}$

1) $\int_K dz = \int_\alpha^\beta dz(t) = b - a$, denn

$$\int_K dz = \lim_{|z|\to 0} S_Z(f,\boldsymbol{\tau}) = \lim_{|z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big)$$

$$= \lim_{|z|\to 0} \big(z(t_n) - z(t_0)\big) = \lim_{|z|\to 0}(b-a) = b - a$$

2) $\int_K z\,dz = \int_\alpha^\beta z(t)\,dz(t) = (b^2 - a^2)/2$, denn

$$\int_K z\,dz = \lim_{|Z|\to 0} S_Z(f,\boldsymbol{\tau})$$

$$= \lim_{|Z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} z(t_{k-1})\big(z(t_k) - z(t_{k-1})\big) \quad (\text{Zwischenpunkte } \tau_k = t_{k-1})$$

$$= \lim_{|Z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} z(t_k)(z(t_k) - z(t_{k-1})) \quad (\text{Zwischenpunkte } \tau_k = t_k)$$

$$\Rightarrow\ 2\int_K z\,dz = \lim_{|Z|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\big(z(t_k)+z(t_{k-1})\big)\big(z(t_k)-z(t_{k-1})\big)$$

$$= \lim_{|Z|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\big(z^2(t_k)-z^2(t_{k-1})\big) = \lim_{|Z|\to 0}\big(z^2(t_n)-z^2(t_0)\big)$$

$$= \lim_{|Z|\to 0}(b^2-a^2) = b^2-a^2.$$

Ist K eine geschlossene Kurve, so gilt

$$\int_K dz = 0 \quad \text{und} \quad \int_K z\,dz = 0.$$

Die Voraussetzungen für die Existenz des Integrals von f entlang K werden im folgende Satz und der sich daran anschließende Anmerkung aufgezeigt.

Satz 15-16:

Es sei $K = \{z(t) : t \in [\alpha,\beta]\}$ eine glatte Kurve in $\mathbb{C}$ und f stetig auf K. Dann existiert das Integral $\int_K f(z)dz$ mit

$$\int_K f(z)dz = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)\,dz(t) = \int_\alpha^\beta f\big(z(t)\big)\,z'(t)dt$$

und es gilt die Abschätzung

$$\left|\int_K f(z)dz\right| \le \int_\alpha^\beta \left|f(z(t))z'(t)\right|dt.$$

Beweis:

$$S_Z(f,\boldsymbol{\tau}) = \sum_{k=1}^{n} f\big(z(\tau_k)\big)\big(z(t_k)-z(t_{k-1})\big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\Big[u\big(z(\tau_k)\big)+jv\big(z(\tau_k)\big)\Big]\Big[\big(x(t_k)-x(t_{k-1})\big)+j\big(y(t_k)-y(t_{k-1})\big)\Big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}u\big(z(\tau_k)\big)\,x'(\xi_k)\Delta t_k - \sum_{k=1}^{n}v\big(z(\tau_k)\big)\,y'(\eta_k)\Delta t_k$$

$$+\ j\sum_{k=1}^{n}v\big(z(\tau_k)\big)\,x'(\xi_k)\Delta t_k + j\sum_{k=1}^{n}u\big(z(\tau_k)\big)\,y'(\eta_k)\Delta t_k.$$

Wählen wir $\tau_k = \xi_k$ bzw. $\tau_k = \eta_k$ so sind diese 4 Summen Riemann-Summen für die stetigen reellen Funktionen ux', vy', vx', vy' die gegen die Integrale

$$\int_\alpha^\beta u\big(z(t)\big)\, x'(t)dt - \int_\alpha^\beta v\big(z(t)\big)\, y'(t)dt + j\int_\alpha^\beta v\big(z(t)\big)\, x'(t)dt +$$

$$+ j\int_\alpha^\beta u\big(z(t)\big)\, y'(t)dt = \int_\alpha^\beta \Big[u\big(z(t)\big) + jv\big(z(t)\big)\Big]\big(x'(t) + jy'(t)\big)dt$$

$$= \int_\alpha^\beta f\,\big(z(t)\big)\, z'(t)dt$$

konvergieren. Nun muss nur noch gezeigt werden, dass die Konvergenz unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte τ_k ist (vgl. hierzu Literatur). Die Abschätzung erhält man durch Abschätzung der Riemann-Stieltjes-Summe.

Anmerkung:

Der Satz 15-16 gilt auch für stückweise glatte Kurven. Man muss für den Beweis nur das Intervall $[\alpha,\beta]$ in Teilintervalle $[\alpha_i,\beta_i]$ glatter Kurvenstücken K_i aufspalten und dann jeweils Satz 15-16 anwenden.

Beispiel:

$K_R(z_0) = \left\{z(t) = z_0 + Re^{jt} :\ t \in [0, 2\pi]\right\}$

beschreibt einen positiv orientierten Kreis um z_0 mit dem Radius R. $K_R(z_0)$ ist eine glatte und geschlossene Kurve.

Für die Funktion $f(z) = (z - z_0)^m,\ m \in \mathbb{Z}$ untersuchen wir nun das Integral

$$\int_{K_R(z_0)} f(z)dz.$$

f ist stetig auf $K_R(z_0)$ (die Singularität $z = z_0$ für $m < 0$ liegt nicht auf der Kurve, sondern im Inneren von $K_R(z_0)$). Mit

$$z(t) = z_0 + Re^{jt} \;\Rightarrow\; z'(t) = jRe^{jt},\;\; f(z) = (z - z_0)^m = (Re^{jt})^m$$

erhalten wir für das Integral

$$\int_{K_R(z_0)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } m \neq -1 \\ 2\pi j & \text{falls } m = -1 \end{cases}$$

denn

$$\int_{K_R(z_0)}(z-z_0)^m dz=\int_0^{2\pi}(Re^{jt})^m jRe^{jt}dt=jR^{m+1}\int_0^{2\pi}e^{j(m+1)t}dt=$$

$$=R^{m+1}\begin{cases} e^{j(m+1)t}\big/(m+1)\Big|_{t=0}^{2\pi} & \text{falls } m\neq -1 \\ 2\pi j & \text{falls } m=-1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} R^{m+1}(e^{j(m+1)2\pi}-1)\big/(m+1) & \text{falls } m\neq -1 \\ 2\pi j & \text{falls } m=-1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{falls } m\neq -1 \\ 2\pi j & \text{falls } m=-1 \end{cases}.$$

z.B.

$$\int_{K_R(z_0)}(z-z_0)^3 dz=0 \quad \text{und} \quad \int_{K_R(z_0)}\frac{1}{(z-z_0)^2}dz=0,$$

aber

$$\int_{K_R(z_0)}\frac{1}{z-z_0}dz=2\pi j.$$

Zusammenhang zwischen komplexem Kurvenintegral und Kurvenintegral im $\mathbb{R}^2$

Es sei $f=u+jv$, $\mathbf{v}=(u,-v)^T$ und $\mathbf{w}=(v,u)^T$, dann gilt

$$\int_K f(z)dz=\int_K(u+jv)(dx+jdy)=\int_K(udx-vdy)+j\int_K(vdx+udy).$$

Für die Vektorfelder $\mathbf{v}=(v_1,v_2)^T=(u,-v)^T$ und $\mathbf{w}=(w_1,w_2)^T=(v,u)^T$ entsprechen die Integrabilitätsbedingungen

$$v_{1,y}=u_y=-v_x=v_{2,x} \quad \text{und} \quad w_{1,y}=v_y=u_x=w_{2,x}.$$

den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Will man das Integral

$$\int_K(udx+(-v)dy) \text{ bzw. } \int_K(vdx+udy)$$

berechnen, so gilt

$$\int_K(udx+(-v)dy)=\mathrm{Re}\left(\int_K f(z)dz\right) \text{ bzw. } \int_K(vdx+udy)=\mathrm{Im}\left(\int_K f(z)dz\right)$$

mit $f(z)=u+jv$.

Beispiel:

$$\int_{K_R(0)}\left(\frac{y}{x^2+y^2}dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy\right)=\operatorname{Re}\int_{K_R(0)}\frac{j}{z}dz=\operatorname{Re}(j\cdot 2\pi j)=-2\pi,$$

(vgl. vorheriges Beispiel)

denn

$$f(z)=\frac{j}{z}=\frac{jz^*}{|z|^2}=\frac{j(x-y)}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}+j\frac{x}{x^2+y^2}=u(x,y)+jv(x,y).$$

Satz 15-17: (*Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals*)
Es sei K eine stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$. Ferner seien f, f_1, f_2 stetige Funktionen auf K und $c \in \mathbb{C}$. Dann gilt

a) Linearität

$$\int_K \left(f_1(z)+f_2(z)\right)dz=\int_K f_1(z)dz+\int_K f_2(z)dz,$$

$$\int_K cf(z)dz=c\int_K f(z)dz.$$

b) Setzt sich K aus K_1 und K_2 zusammen, so gilt

$$\int_{K_1+K_2} f(z)dz=\int_{K_1} f(z)dz+\int_{K_2} f(z)dz.$$

c) Mit $L(K)$ der Länge von K gilt die Abschätzung

$$\left|\int_K f(z)dz\right|\le \max_{z\in K}\left|f(z)\right|L(K).$$

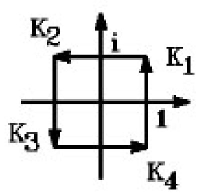
d) Für die Kurve $-K$ (umgekehrter Durchlaufungssinn) gilt

$$\int_{-K} f(z)dz=-\int_K f(z)dz.$$

Beispiel:

$$K=K_1+K_2+K_3+K_4,\quad f(z)=1/z,$$

$$\int_K \frac{1}{z}dz=\int_{K_1}\frac{1}{z}dz+\int_{K_2}\frac{1}{z}dz+\int_{K_3}\frac{1}{z}dz+\int_{K_4}\frac{1}{z}dz=?$$



$$
\begin{aligned}
K_1 &: \ z(t) = 1 + jt, \ t \in [-1,1] \Rightarrow z'(t) = j, \\
-K_2 &: \ z(t) = t + j, \ t \in [-1,1] \Rightarrow z'(t) = 1, \\
-K_3 &: \ z(t) = -1 + jt, \ t \in [-1,1] \Rightarrow z'(t) = j, \\
K_4 &: \ z(t) = t - j, \ t \in [-1,1] \Rightarrow z'(t) = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_K \frac{1}{z}dz &= \int_{K_1} \frac{1}{z}dz - \int_{-K_2} \frac{1}{z}dz - \int_{-K_3} \frac{1}{z}dz + \int_{K_4} \frac{1}{z}dz \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{j}{1+jt}dt - \int_{-1}^{1} \frac{1}{t+j}dt - \int_{-1}^{1} \frac{j}{-1+jt}dt + \int_{-1}^{1} \frac{1}{t-j}dt \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{j(1-jt)}{1+t^2} - \frac{t-j}{1+t^2} - \frac{j(-1-jt)}{1+t^2} + \frac{t+j}{1+t^2} \right) dt \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{j+t-t+j+j-t+t+j}{1+t^2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{4j}{1+t^2} dt \\
&= 8j \int_0^t \frac{1}{1+t^2} = 8j \arctan 1 = 8j\frac{\pi}{4} = 2\pi j
\end{aligned}
$$

15.3.2 Cauchyscher Integralsatz

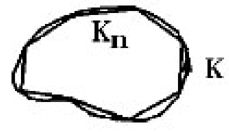
Der folgende Satz ist einer der wichtigsten Sätze der komplexen Funktionentheorie. Er wird auch Hauptsatz der Funktionentheorie genannt.

Satz 15-18: (*Cauchyscher Integralsatz*)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf *G*. Dann gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve *K*, die ganz in *G* verläuft

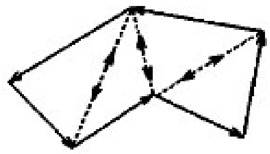
$$\int_K f(z)dz = 0.$$

Beweisskizze:

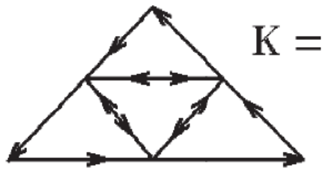
1. Schritt: Jede einfach geschlossene rektifizierbare Kurve *K* kann beliebig genau durch einen Polygonzug K_n approximiert werden (ohne Beweis). Man kann *K* daher ohne Einschränkung als Polygonzug annehmen.



2. Schritt: Jeder geschlossene Polygonzug K kann aus Dreiecken zusammengesetzt werden (ohne Beweis). Die Integrale über die inneren Wege heben sich auf, da sie in beiden Richtungen einmal durchlaufen werden. Man kann K daher ohne Einschränkung als Dreiecksrand annehmen.



3. Schritt: K sei der Rand des Dreiecks Δ mit dem Umfang $L(K)$. Δ_1 wird durch Verbinden der Mittelpunkte der Dreiecksseiten in 4 kongruente Dreiecke $\Delta_{1,1}$, $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$, $\Delta_{1,4}$ aufgeteilt. K und $K_{1,k}$ seien jeweils die positiv orientierten Randkurven der entsprechenden Dreiecke. Dann gilt



$$\int_K f(z)dz = \int_{K_{1,1}} f(z)dz + \int_{K_{1,2}} f(z)dz + \int_{K_{1,3}} f(z)dz + \int_{K_{1,4}} f(z)dz,$$

da sich die Integrale über die inneren Strecken aufheben.

$$\Rightarrow \ |I| = \left|\int_K f(z)dz\right| = \left|\sum_{k=1}^{4}\int_{K_{1,k}} f(z)dz\right| \le \sum_{k=1}^{4}\left|\int_{K_{1,k}} f(z)dz\right|$$

Also gilt für eines dieser 4 Dreiecke, welches wir nun mit Δ_{1,k_1} bezeichnen wollen

$$\left|\int_{K_{1,k_1}} f(z)dz\right| \ge \frac{1}{4}|I| \quad \text{mit} \quad k_1 = \arg\max_{1\le k\le 4}\left|\int_{K_{1,k}} f(z)dz\right|.$$

Für die Länge von K_{1,k_1} gilt

$$L(K_{1,k_1}) = \frac{1}{2}L(K).$$

Wird nun Δ_{1,k_1} ebenfalls in 4 kongruente Dreiecke aufgeteilt, so kann man wieder ein Dreieck Δ_{2,k_2} auswählen, für das gilt

$$\left|\int_{K_{2,k_2}} f(z)dz\right| \ge \frac{1}{4}\left|\int_{K_{1,k_1}} f(z)dz\right| \ge \frac{1}{4^2}|I|, \quad L(K_{2,k_2}) = \frac{1}{2^2}L(K).$$

Durch Fortsetzen dieser Vorgehensweise erhalten wir eine Folge $(\Delta_{n,k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ von ineinandergeschachtelten Dreiecken, die alle in G liegen und für die gilt

$$\left|\int_{K_{n,k_n}} f(z)dz\right| \geq \frac{1}{4^n}|I|, \quad L(K_{n,k_n}) = \frac{1}{2^n}L(K).$$

Wählt man aus jedem Δ_{n,k_n} ein z_n, so ist die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $z_0 \in G,$ da G einfach zusammenhängendes Gebiet.

4. Schritt: Sei nun $\varepsilon > 0$. Da f holomorph auf G ist, existiert eine Umgebung $U_{\delta_\varepsilon}(z_0) \subset G$ mit

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon\,|z - z_0| \quad \forall z \in U_{\delta_\varepsilon}(z_0).$$

Ab einem $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sind alle

$$\Delta_{n,k_n} \subset U_{\delta_\varepsilon}(z_0), \; n \geq N_\varepsilon.$$

Für diese $n \geq N_\varepsilon$ gilt dann

$$\begin{aligned}\left|\int_{K_{n,k_n}} f(z)dz\right| &\leq \left|\int_{K_{n,k_n}} \big(f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\big)dz\right| + \\ &\quad + \left|\int_{K_{n,k_n}} f(z_0)dz\right| + \left|\int_{K_{n,k_n}} f'(z_0)(z - z_0)dz\right| \leq \\ &\leq \varepsilon \max_{z\in\Delta_n} |z - z_0|\, L(K_{n,k_n}) + |f(z_0)| \cdot \left|\int_{K_{n,k_n}} dz\right| + \\ &\quad + |f'(z_0)| \cdot \left|\int_{K_{n,k_n}} z\,dz - z_0 \int_{K_{n,k_n}} dz\right|.\end{aligned}$$

Wegen

$$\int_{K_{n,k_n}} dz = 0, \; \int_{K_{n,k_n}} z\,dz = 0 \quad \text{und} \quad \max_{z\in\Delta_{n,k_n}} |z - z_0| \leq L(K_{n,k_n})$$

gilt

$$\left|\int_{K_{n,k_n}} f(z)dz\right| \leq \varepsilon \max_{z\in\Delta_{n,k_n}} |z - z_0|\, L(K_{n,k_n}) \leq \varepsilon L^2(K_{n,k_n})$$

und somit

$$|I| \le 4^n \left| \int_{K_{n,k_n}} f(z)dz \right| \le 4^n \varepsilon L^2(K_{n,k_n}) = \varepsilon L^2(K).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $|I| = 0$ und damit $I = \int_K f(z)dz = 0.$

Anmerkung:

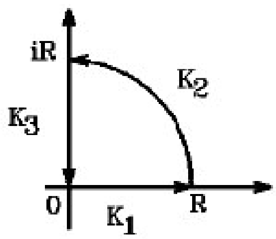
Auch bei Kurvenintegralen in $\mathbb{R}^2$ mussten die Integrabilitätsbedingungen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet gelten, um zu folgern, dass Kurvenintegrale über geschlossene Kurven in G gleich Null sind.

Beispiel:

1) $f(z) = (z - z_0)^n,\ n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ f$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle geschlossenen, stückweise glatten Kurven K in $\mathbb{C}$ gilt dann

$$\int_K (z - z_0)^n dz = 0.$$

2) K setze sich der rechten Abbildung entsprechend aus den Kurvenstücken K_1,K_2 und K_3 zusammen.



$$\int_K e^{-z} dz = 0,$$

da $f(z) = e^{-z}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ und K eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$.

Nun berechnen wir das Integral direkt. Mit

$$\begin{array}{llll} K_1 & : & z(t) = t,\ t \in [0,R] & \Rightarrow z'(t) = 1, \\ K_2 & : & z(t) = Re^{jt},\ t \in [0,\pi/2] & \Rightarrow z'(t) = jRe^{jt}, \\ -K_3 & : & z(t) = jt,\ t \in [0,R] & \Rightarrow z'(t) = j, \end{array}$$

gilt

$$\begin{aligned} I = \int_K e^{-z} dz &= \int_{K_1} e^{-z} dz + \int_{K_2} e^{-z} dz - \int_{-K_3} e^{-z} dz \\ &= \int_0^R e^{-t} dt + \int_0^{\pi/2} e^{-Re^{jt}} jRe^{jt} dt - \int_0^R e^{-jt} jdt \end{aligned}$$

$$= -e^{-t}\Big|_0^R + jR\int_0^{\pi/2} e^{-R(\cos t + j\sin t)} e^{jt}dt + e^{-jt}\Big|_0^R$$

$$= (1-e^{-R}) + jR\int_0^{\pi/2} e^{-R\cos t} e^{j(t-R\sin t)}dt + (e^{-jR}-1).$$

Aus $I = 0$ folgt $\operatorname{Re}(I) = 0$ und $\operatorname{Im}(I) = 0$, also

$$(1-e^{-R}) - R\int_0^{\pi/2} e^{-R\cos t}\sin(t - R\sin t)\,dt + (\cos R - 1) = 0$$

$$R\int_0^{\pi/2} e^{-R\cos t}\cos(t - R\sin t)\,dt - \sin R = 0.$$

Somit gilt für alle $R > 0$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\cos t}\cos(t - R\sin t)\,dt = \frac{\sin R}{R}$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\cos t}\sin(t - R\sin t)\,dt = \frac{\cos R - e^{-R}}{R}.$$

Es uns also mit Hilfe komplexer Integrale und des Cauchyschen Integralsatzes gelungen, zwei schwierige reelle Integrale zu berechnen.

3) Wir wollen nun die reellen Integrale

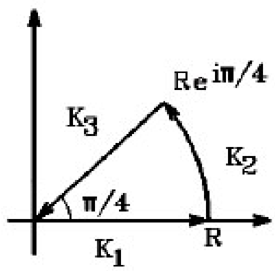
$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \sin(x^2)dx$$

mit Hilfe eines komplexen Integrals bestimmen. Dazu berechnen wir

$$\int_K e^{jz^2}dz$$

entlang der Kurve K die sich aus den Kurvenstücken K_1, K_2 und K_3 wie folgt zusammensetzt.

$$\begin{aligned}
K_1 &: \ z(t) = t,\ t\in[0,R] &&\Rightarrow\ z'(t) = 1,\\
K_2 &: \ z(t) = Re^{jt},\ t\in[0,\pi/4] &&\Rightarrow\ z'(t) = jRe^{jt},\\
-K_3 &: \ z(t) = te^{j\pi/4},\ t\in[0,R] &&\Rightarrow\ z'(t) = e^{j\pi/4}.
\end{aligned}$$



$$I = \int_K e^{jz^2}dz = 0,$$

da $f(z) = e^{jz^2}$ holomorph auf $\mathbb{C}$ und K eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$.

Direkte Berechnung des Integrals

$$I=0=\int_{K_R} e^{jz^2}dz=\int_{K_1} e^{jz^2}dz+\int_{K_2} e^{jz^2}dz-\int_{-K_3} e^{jz^2}dz$$

liefert mit

$$\int_{K_1} e^{jz^2}dz=\int_0^R e^{jt^2}dt=\int_0^R \cos(t^2)dt+j\int_0^R \sin(t^2)dt,$$

$$\int_{K_2} e^{jz^2}dz=\int_0^{\pi/4} e^{iR^2e^{j2t}}\, jRe^{jt}dt$$

$$=jR\int_0^{\pi/4} e^{j(R^2e^{2jt}+t)}dt=jR\int_0^{\pi/4} e^{j\left(R^2\cos(2t)+t\right)}e^{-R^2\sin 2t}dt,$$

also

$$\left|\int_{K_2} e^{jz^2}dz\right|\le \underbrace{R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2\sin(2t)}dt\le R\int_0^{\pi/4} e^{-R^2t}dt}_{\text{da }\sin(2t)\ge t\ \ \forall t\in[0,\pi/4]}=-e^{-R^2t}\Big/R\Big|_0^{\pi/4}$$

$$=(1-e^{-R^2\pi/4})\Big/R<1\big/R\to 0\ \text{ für }\ R\to\infty$$

und

$$\int_{K_3} e^{jz^2}dz=-\int_0^R e^{jt^2e^{j\pi/2}}e^{j\pi/4}dt=e^{-j\pi/4}\int_0^R e^{-t^2}dt$$

wegen

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-t^2}dt=\int_0^\infty e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\big/2$$

insgesamt für $R\to\infty$

$$0=\lim_{R\to\infty}\int_{K_R} e^{jz^2}dz=\int_0^\infty \cos(t^2)dt+j\int_0^\infty \sin(t^2)dt-e^{j\pi/4}\cdot\sqrt{\pi}\big/2.$$

Da $e^{j\pi/4}=\cos(\pi/4)+j\sin(\pi/4)=(1+j)\big/\sqrt{2}$, folgt hieraus für den Realteil bzw. Imaginärteil

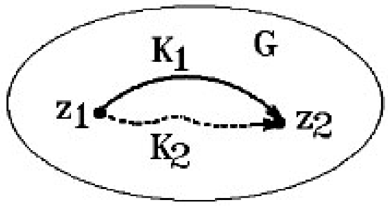
$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,dt=\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt=\sqrt{\pi/8}.$$

Die nächsten Sätze sind unmittelbare Folgerungen aus dem Cauchyschen Integralsatz.

Satz 15-19: (*Wegunabhängigkeit*)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G und $z_1, z_2 \in G$. Dann hat das Integral für alle stückweise glatten Kurven $K(z_1,z_2)$ die die Punkte z_1 und z_2 in G verbinden, den gleichen Wert. Also ist dann das Integral wegunabhängig, und wir schreiben

$$\int_{K(z_1,z_2)} f(z)dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz.$$

Beweis:
Es seien K_1 und K_2 zwei stückweise glatte Kurven von z_1 nach z_2 $\Rightarrow$ $K = K_1 + (-K_2)$ ist eine geschlossene, stückweise glatte Kurve in G. Folglich gilt



$$0 = \int_K f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz - \int_{K_2} f(z)dz$$

und damit die Behauptung.

Bezeichnung:
Es sei K eine geschlossene Jordankurve, d.h. doppelpunktfrei, dann bezeichnen wir mit

$I(K)$ das Innere von K,

$A(K)$ das Äußere von K,

$\bar{I}(K) = I(K) \cup K$ das Innere von K einschließlich K,

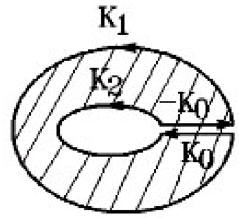
$\bar{A}(K) = A(K) \cup K$ das Äußere von K einschließlich K.

Satz 15-20:
Sind K_1 und K_2 zwei geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurven, d.h. doppelpunktfrei, mit $K_2 \subset I(K_1)$ und ist f holomorph auf dem Ringgebiet $\bar{R}(K_1, K_2)$, d.h. zwischen K_1 und K_2 einschließlich K_1 und K_2. Dann gilt

$$\int_{K_1} f(z)\,dz = \int_{K_2} f(z)\,dz.$$

Beweis:

Wir führen eine Hilfskurve K_0 ein, die die Kurven K_1 und K_2 verbindet. Die Kurve



$$K = K_1 + K_0 + (-K_2) + (-K_0)$$

ist dann eine geschlossene, stückweise glatte Kurve.

$R(K_1,K_2)\backslash\{K_0\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet, auf dem f holomorph ist. Ferner seien K_n geschlossene Kurven in $R(K_1,K_2)\backslash\{K_0\}$ mit $K_n \to K$ für $n \to \infty$. Nach dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_{K_n} f(z)dz = 0 \;\Rightarrow\; \int_{K_n} f(z)dz \to \int_K f(z)dz = 0,$$

so dass aus

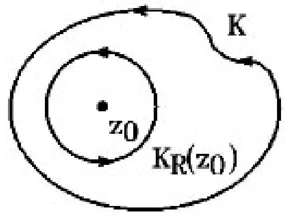
$$\begin{aligned} 0 &= \int_K f(z)dz = \int_{K_1} f(z)dz + \int_{K_0} f(z)dz - \int_{K_2} f(z)dz - \int_{K_0} f(z)dz \\ &= \int_{K_1} f(z)dz - \int_{K_2} f(z)dz \end{aligned}$$

die Behauptung folgt.

Beispiel:

Es gilt für alle geschlossenen, positiv orientierten, stückweise glatten Jordankurven mit $z_0 \in I(K)$

$$\int_K \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi j, \text{ denn } \int_{K_R(z_0)} \frac{1}{z - z_0} dz = 2\pi j$$

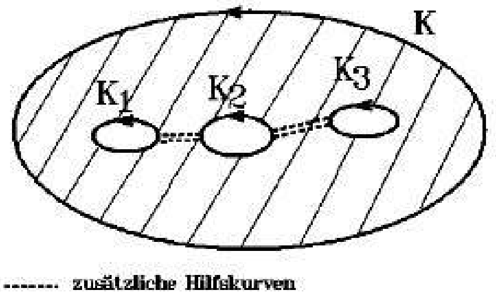


(vgl. S. 15-9x).

Satz 15-21:

Sind $K, K_1, K_2,\ldots,K_n$ geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurven mit $K_i \subset I(K)\;\; \forall i = 1,2,\ldots,n$ und $K_i \subset A(K_j)\;\; \forall i \neq j$ und ist f holomorph auf $\overline{I}(K)\backslash\{I(K_1) \cup I(K_2) \cup \ldots \cup I(K_n)\}$, d.h. f muss nicht holomorph im Inneren der Kurven K_i sein, dann gilt

$$\int_K f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} f(z)\,dz.$$



Beweis:
Wir verbinden die Kurven K_i mit Hilfskurven. Zusammen mit diesen Hilfskurven wird $K_1 + K_2 + \ldots + K_n$ eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve.

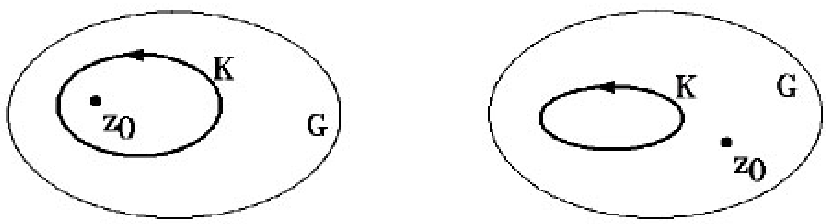
Für diese geschlossene Jordankurve können wir zusammen mit der Kurve K den Satz 15-20 anwenden. Da diese Hilfskurven zweimal in unterschiedlichen Richtungen durchlaufen wird, heben sich die Integrale über diese Hilfskurven gegenseitig auf und wir erhalten insgesamt

$$\int_K f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{n} \int_{K_i} f(z)\,dz.$$

15.3.3 Cauchysche Integralformeln

Satz 15-22: (*Cauchysche Integralformel*)
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G und K eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve mit $\overline{I}(K) \subset G$, dann gilt die Cauchysche Integralformel

$$\int_K \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \begin{cases} 2\pi j\, f(z_0) & \text{für } z_0 \in I(K) \\ 0 & \text{für } z_0 \in A(K) \end{cases}.$$



Fall a) *Fall b)*

Beweis:

Für $z_0 \in A(K)$ folgt $f(z)/(z-z_0)$ ist holomorph auf $\overline{I}(K)$. Da $I(K)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, liefert der Cauchysche Integralsatz

$$\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Für $z_0 \in I(K)$ und beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned}\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz &= \int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)\int_K \frac{1}{z-z_0}\,dz\\ &= \int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + 2\pi j\, f(z_0).\end{aligned}$$

Ist $K_R(z_0)$ ein Kreis um z_0 mit r so klein, dass

$$|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon \quad \forall z \in K_r(z_0) \quad \text{(möglich, da } f \text{ stetig)},$$

dann gilt nach Satz 15-20

$$\begin{aligned}\left|\int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right| &= \left|\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|\\ &\le \frac{\varepsilon}{r} L\big(K_r(z_0)\big) = \frac{\varepsilon}{r}2\pi r = 2\pi\varepsilon.\end{aligned}$$

Aus $\varepsilon > 0$ beliebig folgt

$$\int_K \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz = 0.$$

Somit erhalten wir insgesamt letztendlich

$$\int_K \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi j\, f(z_0).$$

Anmerkung:

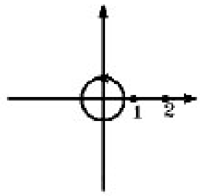
Die Cauchysche Integralformel besagt, dass die Funktionswerte von f im Inneren von K bereits durch die Werte auf K festgelegt sind.

Beispiel:

1) $I_R = \int_{K_R(0)} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz, \quad R > 0, R \neq 1, R \neq 2.$

1. Fall: $0 < R < 1$

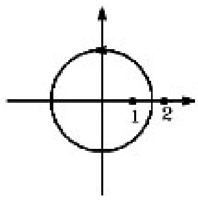
$I_R = 0$, denn die Singularitäten $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$ liegen im Äußeren von $K_R(0)$, d.h. der Integrand ist holomorph auf $\overline{I}\left(K_R(0)\right)$.



2. Fall: $1 < R < 2$

$$I_R = \int_{K_R(0)} \frac{e^z/(z-2)}{z-1} dz = 2\pi j \left(\frac{e^z}{z-2}\right)\Bigg|_{z=1} = -2\pi je,$$

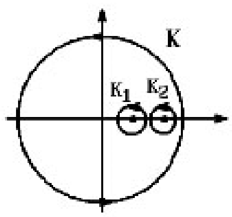
denn $e^z/(z-2)$ ist holomorph auf $\overline{I}\left(K_R(0)\right)$, da die Singularität in $z_2 = 2$ im Äußeren von $K_R(0)$ liegt.



3. Fall: $R > 2$

Es seien K_1 und K_2 kleine Kreise um $z_1 = 1$ und $z_2 = 2$, vgl. nebenstehende Abbildung, dann gilt nach Satz 15-21.

$$\int_{K_R(0)} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{K_1} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz + \int_{K_2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz.$$



$$\int_{K_1} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{K_1} \frac{e^z/(z-2)}{z-1} dz = 2\pi j \left(\frac{e^z}{z-2}\right)\Bigg|_{z=1} = -2\pi je,$$

$$\int_{K_2} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)} dz = \int_{K_2} \frac{e^z/(z-1)}{z-2} dz = 2\pi j \left(\frac{e^z}{z-1}\right)\Bigg|_{z=2} = 2\pi je^2.$$

Damit erhalten wir im 3. Fall

$$I_R = -2\pi je + 2\pi je^2 = 2\pi j(\varepsilon^2 - e).$$

Alle drei Fälle zusammen ergeben

$$\int_{K_R(0)} \frac{e^z}{(z-1)(z-2)}dz = \begin{cases} 0 & \text{falls } 0 < R < 1 \\ -2\pi je & \text{falls } 1 < R < 2. \\ 2\pi j(e^2 - e) & \text{falls } 2 < R \end{cases}$$

2) Sei f holomorph auf $\overline{I}\left(K_R(z_0)\right)$, dann gilt mit der Parameterdarstellung

$K_R(z_0) : z(t) = z_0 + Re^{jt}, t \in [0, 2\pi], z'(t) = jRe^{jt}$

folglich

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{K_R(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{jt})}{Re^{jt}} jRe^{jt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{jt})\,dt.$$

Als eine Anwendung der Cauchysche Integralformel beweisen wir nun die Poissonsche Integralformel.

Satz 15-23: (*Poissonsche Integralformel*)
Ist f holomorph auf $\overline{I}\left(K_R(z_0)\right)$, dann gilt für $0 \le r < R,\ 0 \le \varphi < 2\pi$

$$f(re^{j\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(t-\varphi) + r^2} f(Re^{jt})dt.$$

Beweis:
Für $z_0 = 0 = 0e^{j\varphi}$, d.h. $r = 0$, folgt die Behauptung aus obigem Beispiel 2.
Ist $z_0 \in I\left(K_R(0)\right)$ mit $0 < |z_0| < R$, also $z_0 = re^{j\varphi}$ mit $0 < r < R$, dann gilt

$$\int_{K_R(0)}\left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - R^2/z_0^*}\right) f(z)\,dz = \int_{K_R(0)} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - \int_{K_R(0)} \frac{f(z)}{z - R^2/z_0^*}dz$$

$$= 2\pi j\, f(z_0),$$

da das 2. Integral gleich null ist, denn aus

$\left|R^2/z_0^*\right| > R^2/R = R \;\Rightarrow\; R^2/z_0^* \in A\left(K_R(0)\right).$

Also gilt

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\int_{K_R(0)}\left(\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z-R^2/z_0^*}\right)f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{K_R(0)}\left(\frac{1}{z-z_0}-\frac{z_0^*}{zz_0^*-R^2}\right)f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{K_R(0)}\frac{zz_0^*-R^2-zz_0^*+|z_0|^2}{(z-z_0)(zz_0^*-R^2)}\,f(z)\,dz$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{K_R(0)}\frac{R^2-|z_0|^2}{(z-z_0)(R^2-zz_0^*)}\,f(z)\,dz.$$

Mit

$$z(t)=Re^{jt},\ t\in[0,2\pi],\ z'(t)=jRe^{jt},\ z_0=re^{j\varphi},\ 0<r<R,$$

gilt dann

$$f(re^{j\varphi})=\frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{(Re^{jt}-re^{j\varphi})(R^2-rRe^{-jt}e^{-i\varphi})}\,f(Re^{jt})\,jRe^{jt}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{(Re^{jt}-re^{j\varphi})(Re^{-jt}-re^{-i\varphi})}\,f(Re^{jt})dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-rRe^{j(t-\varphi)}-rRe^{-j(t-\varphi)}}\,f(Re^{jt})dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(t-\varphi)}\,f(Re^{jt})dt.$$

Anmerkung:

Ist $f(re^{j\varphi})=u(r,\varphi)+jv(r,\varphi)$, dann gilt für den Realteil u von f

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2+r^2-2rR\cos(t-\varphi)}u(R,t)dt.$$

Aus f holomorph auf $I\big(K_R(0)\big)$ folgt u harmonisch auf $I\big(K_R(0)\big)$ und es gilt

$\Delta u = 0$ auf $I\left(K_R(0)\right)$.

Demzufolge ist

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2rR\cos(t-\varphi)} h(t)dt$$

Lösung des inneren Dirichlet-Problems für den Kreis, d.h.

$\Delta u = 0$ auf $I\left(K_R(0)\right)$ mit $u\big|_{K_R(0)} = h$,

in Integraldarstellung.

<u>Satz 15-24:</u> (*Erweiterte Cauchysche Integralformel*)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G und K eine geschlossene, positiv orientierte und stückweise glatte Jordankurve mit $\overline{I}(K) \subset G$.
Dann gilt $\forall z_0 \in I(K)$ die erweiterte Cauchysche Integralformel

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j}\int_K \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. Differentiation und Integration dürfen vertauscht werden, und es existieren auf G die Ableitungen $f^{(n)}(z)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und diese sind wieder holomorph auf G.

<u>Beweis</u>:
Sei $z_0 \in I(K)$, dann existiert ein Kreis $K_r(z_0)$ um z_0 mit $\overline{I}\left(K_r(z_0)\right) \subset G$.
Nach der (einfachen) Cauchyschen Integralformel gilt dann

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi j}\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_1} dz \quad \forall z_1 \in I\left(K_r(z_0)\right),$$

also auch für z_0. Zu zeigen ist

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz.$$

Es gilt

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} - \frac{1}{2\pi j}\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz \right| =$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{K_r(z_0)}\left\{\frac{1}{z-z_0}\left(\frac{f(z)}{z-z_1}-\frac{f(z)}{z-z_0}\right)-\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right\}dz\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{K_r(z_0)} f(z)\left\{\frac{1}{(z-z_1)(z-z_0)}-\frac{1}{(z-z_0)^2}\right\}dz\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{K_r(z_0)} f(z)\frac{z_1-z_0}{(z-z_1)(z-z_0)^2}dz\right|$$

$$\le |z_1-z_0|\frac{M}{2\pi}\cdot\frac{2}{r}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot 2\pi r=|z_1-z_0|\frac{2M}{r^2}\to 0 \text{ für } z_1\to z_0$$

mit $M=\max\limits_{z\in K_r(z_0)}|f(z)|$ und $|z-z_1|>r/2$. Also gilt für alle $z_0\in I(K)$

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi j}\int_{K_r(z_0)}\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz=\frac{1}{2\pi j}\int_K\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz.$$

Mit Hilfe dieser Formel zeigt man entsprechend, dass

$$f''(z_0)=\frac{2j}{2\pi j}\int_K\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

gilt. Mit vollständiger Induktion erhält man dann schließlich die allgemeine Formel. Wegen $z_0\in G$ beliebig folgt, dass f auf G beliebig oft differenzierbar ist und dass die abgeleiteten Funktionen, da G ein Gebiet, auf G holomorph sind.

Beispiel:

1) $$\int_{K_r(z_0)}\frac{e^z}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi j}{n!}(e^z)^{(n)}\Big|_{z=z_0}=\frac{2\pi j}{n!}e^{z_0}\quad\forall z_0\in\mathbb{C}$$

Im folgenden berechnen wir das Integral direkt.

Mit $K_r(z_0)$: $z(t)=z_0+re^{jt},\ t\in[0,2\pi],\ z'(t)=jre^{jt}$ gilt

$$\int_{K_r(z_0)}\frac{e^z}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\int_0^{2\pi}\frac{e^{z_0+re^{jt}}}{(re^{jt})^{n+1}}jre^{jt}dt=je^{z_0}\int_0^{2\pi}\frac{e^{r(\cos t+i\sin t)}}{r^ne^{jt}}dt$$

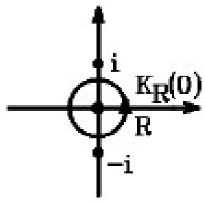
$$= \frac{je^{z_0}}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{r\cos t} e^{j(r\sin t - nt)}dt = \frac{2\pi j}{n!}e^{z_0} \;\Rightarrow\; \int_0^{2\pi} e^{r\cos t} e^{j(r\sin t - nt)}dt = \frac{2\pi r^n}{n!}.$$

Damit ergibt sich der Real- bzw. Imaginärteil für alle $r \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ zu

$$\int_0^{2\pi} e^{r\cos t}\cos(r\sin t - nt)dt = \frac{2\pi r^n}{n!} \text{ bzw. } \int_0^{2\pi} e^{r\cos t}\sin(r\sin t - nt)dt = 0.$$

2) $I_R = \int_{K_R(0)} \frac{\sin z}{z^2(z^2+1)}dz, \; R > 0, \; R \neq 1.$

<u>1) Fall:</u> $0 < R < 1$



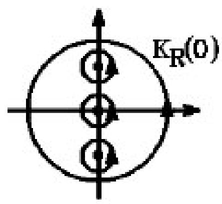
$$I_R = \int_{K_R(0)} \frac{\sin z/(z^2+1)}{(z-0)^2}dz = \frac{2\pi j}{1}\left(\frac{\sin z}{z^2+1}\right)'\Bigg|_{z=0}$$

$$= 2\pi j \frac{(z^2+1)\cos z - 2z\sin z}{(z^2+1)^2}\Bigg|_{z=0} = 2\pi j,$$

da $\sin z/(z^2+1)$ holomorph auf $\overline{I}\left(K_R(0)\right)$.

<u>2. Fall:</u> $R > 1$

Wir wählen jeweils kleine Kreise um die drei Singularitäten $z_1 = -j$, $z_2 = 0$ und $z_3 = j$, dann gilt



$$I_R = \int_{K_\delta(-j)} \frac{\sin z/\left(z^2(z-j)\right)}{\left(z-(-j)\right)}dz +$$

$$+\int_{K_\delta(0)} \frac{\sin z/(z^2+1)}{(z-0)^2}dz + \int_{K_\delta(j)} \frac{\sin z/\left(z^2(z+j)\right)}{(z-i)}dz$$

$$= 2\pi j\left(\frac{\sin z}{z^2(z-j)}\right)_{|z=-j} + 2\pi j + 2\pi j\left(\frac{\sin z}{z^2(z+j)}\right)_{|z=j}$$

$$= 2\pi j\left(\frac{\sin(-j)}{2j} + 1 + \frac{\sin j}{-2j}\right) = 2\pi i\left(1 - \frac{\sin j}{j}\right)$$

$$= 2\pi j(1 - \sinh 1).$$

Satz 15-25:
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G. Dann ist f konstant auf G genau dann, wenn in $f'(z) = 0 \;\; \forall z \in G$.

Beweis:
"$\Rightarrow$": klar.
"$\Leftarrow$": Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen liefern

$$f'(z) = u_x + jv_x = v_y - ju_y = 0 \Rightarrow \operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v = \mathbf{0} \;\; \forall (x,y)^T \in G$$

$$\Rightarrow u \text{ und } v \text{ konstant auf } G \Rightarrow f \text{ konstant auf } G.$$

Satz 15-26: (*Cauchysche Ungleichung*)
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G und $K_R(z_0)$ ein Kreis um z_0 mit $\overline{I}\big(K_R(z_0)\big) \subset G$, dann gilt die Cauchysche Ungleichung

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{r^n} \text{ mit } M = \max_{z \in K_r(z_0)} |f(z)| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis:
Die erweiterte Cauchysche Integralformel liefert

$$f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi j} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \le \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

Satz 15-27: (*Liouville*)
Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant.

Beweis:
Für $|f(z)| \le M \;\; \forall z \in \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ folgt aus Satz 15-26

$$|f'(z_0)| \le M/r \to 0 \text{ für } r \to \infty \Rightarrow |f'(z_0)| = 0 \;\; \forall z_0 \in \mathbb{C}$$

und aus Satz 15-25 schließlich f ist konstant auf $\mathbb{C}$.

Aus diesem Satz folgt nun der Fundamentalsatz der Algebra, den wir schon in Kapitel 3, Satz 3-2, zitiert haben.

Satz 15-28: (*Fundamentalsatz der Algebra*)

a) Jedes Polynom vom Grad $n > 0$ hat mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

b) Jedes Polynom vom Grad $n > 0$ hat genau n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

c) Jedes Polynom $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ vom Grad $n > 0$ kann auf $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerlegt werden, d.h.

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n),$$

wobei $z_1, z_2, \ldots, z_n$ die Nullstellen von $p(z)$ bezeichnet.

Beweis:

a) Annahme: $p(z) \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $f(z) = 1/p(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$ (Quotient holomorpher Funktionen mit Nenner $\neq 0$). Da $|p(z)| \to \infty$ für $|z| \to \infty$ $\Rightarrow$ f ist beschränkt auf $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ f ist konstant auf $\mathbb{C}$ (Satz von Liouville) $\Rightarrow$ p ist konstant $\Rightarrow$ grad $p = 0$ $\Rightarrow$ Widerspruch zu $n > 0$.

b) & c)

Da $p(z)$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt, z.B. z_1 kann man diese Nullstelle mit Hilfe des Horner-Schemas abspalten. Man erhält dann $p(z) = (z - z_1)q(z)$ mit grad $q(z) = n - 1$. Nach a) besitzt dann auch $q(z)$ wieder mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, z.B. z_2 (falls $n \geq 2$). Diese Nullstelle kann man wieder abspalten. Fortsetzen dieser Vorgehensweise liefert dann die Aussagen b) und c).

Satz 15-29: (*Maximumprinzip*)

Der Absolutbetrag einer in einem beschränkten Gebiet G holomorphen aber nicht konstante Funktion f, die auf $G \cup \partial G$ stetig ist, nimmt sein Maximum nicht im Inneren von G, sondern auf dem Rand ∂G von G an, d.h. es existiert ein $z_0 \in \partial G$ mit $\max\limits_{z \in G \cup \partial G} |f(z)| = |f(z_0)|$.

Beweis:

f sei holomorph aber nicht konstant auf G.

Annahme: Es existiert ein $z_0 \in G$ mit

$$|f(z_0)| = \max_{z \in G \cup \partial G} |f(z)| \;\Rightarrow\; |f(z)| \le |f(z_0)| \quad \forall z \in G.$$

Sei $K_r(z_0)$ der größtmögliche Kreis um z_0, der mitsamt seinem Inneren noch ganz in G liegt, also $\overline{I}\left(K_r(z_0)\right) \subset G$.

Wir wollen nun zeigen das $f(z) = f(z_0) \;\; \forall z \in I\left(K_r(z_0)\right)$.

Annahme: Es existiert ein $z_1 \in I\left(K_R(z_0)\right)$ mit

$|f(z_1)| < |f(z_0)| \;\Rightarrow\; z_1 \in K_{\tilde r}(z_0)$ mit $0 < \tilde r < r$.

Wegen der Stetigkeit gilt auf einem Stück Kreisbogen $K_{\tilde r}(z_0)$

$|f(z)| < |f(z_0)|$, auf dem ganzen Kreis gilt $|f(z)| \le |f(z_0)|$.

$$\Rightarrow\; |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi j} \int_{K_{\tilde r}(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \tilde r e^{jt})\, dt \right|$$

$$< \frac{1}{2\pi} |f(z_0)| \cdot 2\pi = |f(z_0)| \;\Rightarrow\; \text{Widerspruch}$$

$$\Rightarrow\; f(z) = f(z_0) \;\; \forall z \in I\left(K_R(z_0)\right) \;\Rightarrow\; f \text{ konstant auf } I\left(K_R(z_0)\right)$$

Es sei nun $z_1 \in G$ beliebig. Dann existiert in G ein Polygonzug von z_0 nach z_1 (da G Gebiet). Mit Hilfe von endlich vielen Kreisen entlang dieses Polygonzuges kommt man von z_0 nach z_1. Für jeden dieser Kreise gilt dann nach dem 1. Teil des Beweises, dass f konstant im Inneren dieser Kreise ist. Also gilt $f(z) = f(z_0)$. Da $z_1 \in G$ beliebig $\Rightarrow f(z) = f(z_0) \;\; \forall z \in G \;\Rightarrow f$ ist konstant auf $G \;\Rightarrow$ Widerspruch. Also wird für eine nichtkonstante holomorphe Funktion das Maximum nicht im Inneren von G, sondern auf dem Rand ∂G von G angenommen.

Beispiel:

Gesucht wird $\max\limits_{|z| \le 1} |z^2 - 1|$. Nach dem Maximumprinzip gilt

$$\max_{|z| \le 1} |z^2 - 1| = \max_{|z| = 1} |z^2 - 1| = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |e^{2i\varphi} - 1| =$$

$$= \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sqrt{\left(\cos(2\varphi) - 1\right)^2 + \sin^2(2\varphi)} = \max_{\varphi \in [0, 2\pi]} \sqrt{2 - 2\cos(2\varphi)} = 2$$

$$\Leftrightarrow\; 2\varphi = \pi, 3\pi \;\Leftrightarrow\; \varphi = \pi/2, 3\pi/2 \;\Leftrightarrow\; = e^{j\pi/2}, e^{j3\pi/2} \;\Leftrightarrow\; z = \pm j.$$

15.3.4 Stammfunktionen

Gewisse komplexe Integrale können auch mit Hilfe von Stammfunktionen berechnet werden. Dazu muss natürlich das komplexe Integral wegunabhängig sein.

<u>Definition 15-14:</u> (*Stammfunktion*)
Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und sind $f: G \to \mathbb{C}$ und $F: G \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen auf G, dann heißt F Stammfunktion von f auf G wenn

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in G.$$

Da F als holomorphe Funktion auf G beliebig oft holomorph ist, muss auch f holomorph auf G sein. Also nur holomorphe Funktionen können Stammfunktionen besitzen.

Wie im Reellen unterscheiden sich zwei Stammfunktionen nur durch eine Konstante, denn für

$$h(z) = F_2(z) - F_1(z) \quad \text{mit} \quad F_1'(z) = F_2'(z) = f(z) \quad \forall z \in G$$

gilt

$$h'(z) = 0 \quad \forall z \in G \;\Rightarrow\; h \text{ konstant auf } G$$

und damit

$$F_2(z) = F_1(z) + c, \;\; c \in \mathbb{C}, \;\; \forall z \in G.$$

<u>Satz 15-30:</u>
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G. Dann ist für festes $z_0 \in G$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \;\; z \in G$$

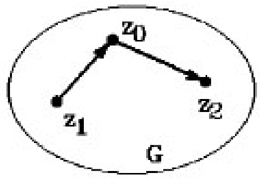
eine Stammfunktion von f auf G. Ist F Stammfunktion von f auf G, so gilt für beliebige $z_1, z_2 \in G$ und für beliebige in G verlaufende stückweise glatte Kurven $K(z_1,z_2)$ von z_1 nach z_2

$$\int_{K(z_1,z_2)} f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Beweis:

Nach Satz 15-19 ist das Integral $\int_{K(z_1,z_2)} f(z)dz$ wegunabhängig.

Für $F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$ gilt also



$$F(z_2)-F(z_1)=\int_{z_0}^{z_2} f(\zeta)d\zeta-\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta$$
$$=\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta)d\zeta$$

Zu zeigen bleibt die Differenzierbarkeit von F auf $z \in G$ mit $F'(z)=f(z)$.

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(\zeta)d\zeta-f(z)\right| \quad h\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Wählen wir für die Strecke von z nach $z+h$ die Parameterdarstellung

$\zeta(t)=z+t(z+h-z)=z+th,\ t\in[0,1],\ \zeta'(t)=h,$

so erhalten wir, da f stetig in z,

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{0}^{1} f(z+th)hdt-f(z)\right|=\left|\int_{0}^{1}\big(f(z+th)-f(z)\big)dt\right|$$
$$\le \max_{t\in[0,1]}\left|f(z+th)-f(z)\right|<\varepsilon \ \text{ für } |h|<\delta \ \Rightarrow\ F'(z)=f(z).$$

Da $z\in G$ beliebig $\Rightarrow F'(z)=f(z)\ \ \forall z\in G \Rightarrow F$ ist Stammfunktion von f.

Beispiel:

1) $G=\mathbb{C}\setminus\{z=x: x\le 0\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet, $f(z)=1/z^2$ ist holomorph auf G und $K(1,j)$ ist Kurve in G von 1 nach j, dann gilt
$$\int_{K(1,j)} 1/z^2\,dz=\int_{1}^{j} 1/z^2\,dz=-1/z\Big|_1^j=-1/j+1=1+j.$$

2) $G=\mathbb{C}\setminus\{z=x: x\le 0\}$ ist einfach zusammenhängendes Gebiet, $f(z)=1/z$ ist holomorph auf G und $K(1,z)$ ist Kurve in G von 1 nach z, dann gilt
$$\int_{K(1,z)} 1/z\,dz=\int_{1}^{z} 1/\zeta\,d\zeta=\operatorname{Ln} z\Big|_1^z=\operatorname{Ln} z,\ \ \forall z\in G=\mathbb{C}\setminus\{z=x:\ x\le 0\}.$$

15.4 Reihenentwicklung komplexer Funktionen

15.4.1 Einführung

Funktionenfolgen

Es seien $f_n : \ G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, komplexwertige Funktionen auf einem Gebiet G, dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge auf G.

Definition 15-15: (*Konvergenz von Funktionenfolgen*)

a) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt punktweise konvergent auf G gegen f genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \forall z \in G.$$

$f : G \to \mathbb{C}$ heißt dann Grenzfunktion der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt gleichmäßig konvergent auf G gegen f genau dann, wenn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{z\in G} \left| f_n(z) - f(z) \right| \right) = 0.$$

c) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt kompakt konvergent auf G genau dann, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $T \subset G$ konvergiert.

Sind alle Funktionen f_n der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ holomorph auf G, und liegt kompakte Konvergenz auf G vor, so gilt der folgende Satz.

Satz 15-31:

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f_n holomorph auf G $\forall n \in \mathbb{N}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere kompakt auf G gegen $f : G \to \mathbb{C}$. Dann gilt:

a) Die Grenzfunktion f ist holomorph auf G.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in G$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$$

mit kompakter Konvergenz auf G.
(d.h. Differentiation und Grenzprozess dürfen vertauscht werden)

c) Für jede stückweise glatte Kurve K in G gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_K f_n^{(k)}(z)dz = \int_K f^{(k)}(z)dz$$

(d.h. Integration und Grenzprozess dürfen vertauscht werden)

Funktionenreihen

Nun sei $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ eine unendliche Reihe von komplexen Funktionen $f_k : G \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit G Gebiet, $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ die n-te Partialsumme und $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Partialsummenfolge.

Defintion 15-15: (*Konvergenz einer Funktionenreihe*)

a) Die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt punktweise bzw. gleichmäßig bzw. kompakt konvergent auf G, wenn die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diese Eigenschaft erfüllt.

b) Die Funktionenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ heißt absolut (punktweise bzw. gleichmäßig bzw. kompakt) konvergent auf G, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k|$ diese Eigenschaft erfüllt.

Wenden wir den Satz 15-31 auf die Partialsummenfolge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, so erhalten wir sofort folgenden Satz.

Satz 15-32:

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, f_n holomorph auf G $\forall n \in \mathbb{N}$ und die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiere kompakt auf G.

Dann gilt für die Grenzfunktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$

a) Die Grenzfunktion $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ ist holomorph auf G.

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und für alle $z \in G$ gilt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

mit kompakter Konvergenz auf G.
(d.h. Differentiation und Summation dürfen vertauscht werden)

c) Für jede stückweise glatte Kurve K in G gilt

$$\int_K \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_K f_n(z)dz.$$

(d.h. Integration und Summation dürfen vertauscht werden)

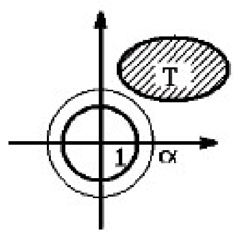
Beispiel:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n}, \quad G = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\}.$$

G ist Gebiet und $f_n(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ ist holomorph auf G (da Nenner $\neq 0$).`

Sei $T \subset G$ kompakt

$\Rightarrow \exists \alpha > 1$ mit $|z| \geq \alpha \quad \forall z \in T \Rightarrow |z^n| = |z|^n \geq \alpha^n \quad \forall z \in T.$



Es gilt allgemein für $a,b \in \mathbb{C}$

$|a-b| \geq |a| - |b| \geq 0$ falls $|a| \geq |b|$,

denn $|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b| + |b| \quad \Rightarrow \quad |a| - |b| \leq |a-b|.$

Also gilt

$$|1+z^n| = |z^n - (-1)| \geq |z^n| - |-1| \geq \alpha^n - 1 \Rightarrow |f_n(z)| = \left|\frac{1}{1+z^n}\right| \leq \frac{1}{\alpha^n - 1} \quad \forall z \in T.$$

Da $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n - 1}$ konvergent, denn (Quotientenkriterium)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha^{n+1} - 1} = \frac{1-(1/\alpha)^n}{\alpha - (1/\alpha)^n} \to \frac{1}{\alpha} < 1,$$

folgt hieraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n}$$

konvergiert gleichmäßig auf *T*.

Da $T \subset G$ beliebig folgt $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ist kompakt konvergent auf *G*.

Also gilt nach Satz 15-32

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n} \quad \text{ist holomorph auf } G,$$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+z^n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)nz^{n-1}}{(1+z^n)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{(1+z^n)^2},$$

$$\int_K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+z^n} dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_K \frac{1}{1+z^n} dz \quad \text{falls } K \subset G \text{ stückweise glatt.}$$

15.4.2 Potenzreihen

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ a_n \in \mathbb{C}, \ z_0 \in \mathbb{C}$ fest , eine Potenzreihen um z_0.

<u>Satz 15-33:</u> (*Potenzreihen*)
Für Potenzreihen existiert eindeutig ein Konvergenzradius *R* mit $0 \le R \le \infty$, so dass gilt

a) Ist $R = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur in z_0.

b) Ist $R = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe in $\mathbb{C}$ (mit absoluter Konvergenz).

c) Ist $0 < R < \infty$, so konvergiert die Potenzreihe im Inneren des Konvergenzkreises $U_R(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \}$.
(mit absoluter Konvergenz).
Sie divergiert außerhalb, d.h. in $\{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > R \}$.

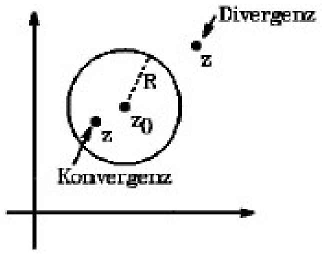
d) Die Konvergenz ist gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von $U_R(z_0)$. D.h. die Potenzreihe konvergiert kompakt in $U_R(z_0)$.

Bestimmung des Konvergenzradius R mit Hilfe des Quotientenkriteriums.

$$\left|\frac{a_n+1(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \left|\frac{a_n+1}{a_n}\right| |z-z_0| \to K\,|z-z_0| < 1 \;\Rightarrow\; |z-z_0| < \frac{1}{K} = R,$$

falls $0 < K < \infty$.

$(K = 0 \;\Rightarrow\; R = \infty,\;\; K = \infty \;\Rightarrow\; R = 0)$.



Auf dem Rand des Konvergenzbereichs kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

Aus Satz 15-32 und Satz 15-33 folgt nun sofort der folgende Satz.

Satz 15-34: (*Potenzreihen*)

Eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ ist im Inneren ihres Konvergenzkreises $U_R(z_0)$ holomorph mit

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k}$$

$$\Rightarrow\; f^{(k)}(z_0) = k!\,a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \;\Rightarrow\; a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

Hieraus folgt sofort der folgende Satz.

Satz 15-35: (*Identitätssatz für Potenzreihen*)

Es seien $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ und $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$ mit $R = \min\{R_1, R_2\}$, wobei R_i Konvergenzradius von f_i, $i = 1,2$, dann gilt

$$f_1(z) = f_2(z) \;\; \forall z \in U_R(z_0) \;\Rightarrow\; a_n = b_n \;\; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Nach Satz 15-34 ist jede Potenzreihe im Inneren ihres Konvergenzkreises holomorph. Umgekehrt lässt sich auch jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickeln.

<u>Satz 15-36:</u> (*Potenzreihenentwicklung*)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f: G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G. Ferner sei $z_0 \in G$ und $K_r(z_0)$ der größte Kreis um z_0 der mitsamt seinem Inneren noch ganz in G liegt. Dann lässt sich f auf $U_R(z_0)$ eindeutig in eine Potenzreihe (Taylorreihe) um z_0 entwickeln mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Nach Satz 15-35 ist diese Reihendarstellung eindeutig.

<u>Beispiel:</u>

1) $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1$ (Entwicklung um $z_0 = 0$).

Entwicklung um $z_0 = j$:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-j)-(z-j)} = \frac{1}{1-j} \cdot \frac{1}{1-(z-j)/(1-j)}$$

$$= \frac{1}{1-j} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-j}{1-j} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-j)^n}{(1-j)^{n+1}}$$

konvergent, falls $|(z-j)/(1-j)| < 1,$ also falls $|z-j| < \sqrt{2}.$

2) $$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \;\; |z| < 1.$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \quad \forall\ |z|<1.$$

$$\frac{1}{z^2-2z-3} = \frac{1}{(z-3)(z+1)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-z/3}-\frac{1}{1+z}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\underbrace{\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n}_{|z|<3} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n}_{|z|<1}\right) = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right)z^n, \quad |z|<1.$$

(Entwicklung um $z_0 = 0$)

3) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C} \quad$ (Entwicklung um $z_0 = 0$).

Entwicklung um $z_0 = j$:

$$e^z = e^{z-j+j} = e^j e^{z-j} = e^j \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-j)^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$e^{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

4) $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} = 1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Diese Gleichung gilt auch für $z = 0$, da $\lim_{z\to 0}\sin z/z = 1$ und die rechte Seite ebenfalls gegen 1 konvergiert für $z \to 0$. Also besitzt die Funktion

$$f(z) = \begin{cases}\sin z/z & \text{falls } z \neq 0\\ 1 & \text{falls } z = 0\end{cases}$$

die Reihendarstellung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Da diese Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergent und damit holomorph ist, gilt f ist holomorph auf $\mathbb{C}$.

5) $$e^z \sin z = \frac{1}{2j} e^z (e^{jz} - e^{-jz}) = \frac{1}{2i}(e^{(1+j)z} - e^{(1-j)z})$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+j)^n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-j)^n}{n!} z^n \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(1+j)^n - (1-j)^n}{2j} \right) \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Wegen $(1+j)^n - (1-j)^n = 2^{n/2} 2j \sin(n\pi/4)$ erhalten wir

$$e^z \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \sin(n\pi/4)\, z^n, \ z \in \mathbb{C}$$

und analog

$$e^z \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2}}{n!} \cos(n\pi/4)\, z^n, \ z \in \mathbb{C}.$$

<u>Satz 15-37</u>: (*Identitätssatz für holomorphe Funktionen*)
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und es seien $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph auf G.
Ferner sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendliche Folge auf G mit

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in G, \quad z_n \neq z_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$f(z_n) = g(z_n) \ \ \forall n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ f(z) = g(z) \ \ \forall z \in G.$$

Anmerkung:
Dieser Satz gilt nicht mehr, wenn z_0 (der Grenzwert der Folge) nicht mehr in G, sondern auf dem Rand von G liegt. Dies zeigt das folgende Gegenbeispiel.

Gegenbeispiel:

$f(z) = \sin(1/z), \quad g(z) \equiv 0, \quad G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ Gebiet

f und g sind holomorph auf G. Für $z_n = 1/(n\pi) \to z_0 = 0 \notin G$ gilt

$f(z_n) = g(z_n) = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N} \;\; \neq \; f(z) = g(z) \;\; \forall z \in G.$

Folgerung:
Enthält G ein Stück der reellen Achse und stimmen zwei in G holomorphe Funktionen auf diesem Stück der reellen Achse überein, so stimmen sie auf G überein.

Beispiel:
Der Hauptwert von log z stimmt für reelle positive $z = x$ mit ln x überein.
Für ln $(x + 1)$ gilt

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

Also stimmt auf einem Teil der positiven reellen Achse diese Potenzreihe mit log $(z + 1)$ überein. Dass sie dann auch auf $G = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ übereinstimmt folgt aus der obigen Folgerung, d.h.

$$\log(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n, \quad |z| < 1 \;\; \text{(gilt für den Hauptwert).}$$

Anmerkung:
Wie im Reellen können komplexe Potenzreihen in ihren gemeinsamen Konvergenzbereichen addiert, subtrahiert,multipliziert und dividiert (falls Nenner $\neq$ 0) werden.

15.4.3 Laurent-Reihen

Definition 15-16: (*Laurent-Reihe*)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \ a_n \in \mathbb{C}, \ \ z_0 \in \mathbb{C} \text{ fest}$$

heißt Laurent-Reihe um z_0. Für alle $z \in \mathbb{C}$, für die diese Reihe konvergiert, definiert sie eine komplexe Funktion f.

Man kann diese Reihe wie folgt zerlegen.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} \text{ Hauptteil} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^n \text{ Regulärteil}$$

der Laurent-Reihe heißt.

Der Regulärteil ist eine Potenzreihe, besitzt also einen Konvergenzradius R_2. Damit ist der Regulärteil holomorph in $U_{R_2}(z_0)$ falls $R_2 > 0$.

Setzen wir im Hauptteil $b_n := a_{-n}, \ \ \rho = 1/(z - z_0)$, so erhalten wir

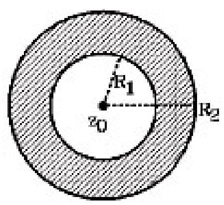
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^n .$$

Das ist eine Potenzreihe (für ρ) mit Konvergenzradius $\tilde{R}$ die für $|\rho| < \tilde{R}$ falls $\tilde{R} > 0$ konvergiert. Also konvergiert der Hauptteil für

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \tilde{R} \iff |z - z_0| > \frac{1}{\tilde{R}} = R_1 \quad (\text{falls } 0 < \tilde{R} < \infty \text{ })$$

Es können nun folgende Fälle auftreten:

a) Ist $0 < R_1 < R_2$, so konvergiert die Laurent-Reihe $f(z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$, mit $R_1 < |z - z_0| < R_2$, also im Ringgebiet



$$R_{R_1,R_2}(z_0)=\left\{z\in\mathbb{C}\ :\ R_1<|z-z_0|<R_2\right\}$$

Die Konvergenz ist kompakt im Inneren dieses Ringgebiets.

b) Ist $R_1 = R_2$, so ist das Ringgebiet entartet zu einer Kreislinie. Auf dieser Kreislinie kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen.

c) Ist $R_1 > R_2$, so konvergiert die Laurent-Reihe nirgends.

Beispiel:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{2^{|n|}}=\sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{|n|}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n=\frac{1/(2z)}{1-1/(2z)}+\frac{1}{1-z/2}=\frac{1}{2z-1}+\frac{2}{2-z}$$

$$\left(|1/(2z)|<1,\ |z/2|<1\ \Rightarrow\ |z|>1/2,\ |z|<2\right)$$

$$\Rightarrow\ f(z)=\frac{2-z+4z-2}{(2z-1)(2-z)}=\frac{3z}{5z-2z^2-2},\quad \text{falls}\ \ \frac{1}{2}<|z|<2,$$

also ist die Laurent-Reihe $f(z)$ konvergent auf dem Ringgebiet

$R_{1/2,2}(0)=\left\{z\in\mathbb{C}:\ 1/2<|z|<2\right\}.$

Da die Laurent-Reihe in ihrem Konvergenzring $R_{R_1,R_2}(z_0)$ kompakt konvergiert und die einzelnen Summanden dort holomorph sind, kann mithilfe von Satz 15-32 der folgende Satz formuliert werden.

Satz 15-38: (*Laurent-Reihen*)

Eine Laurent-Reihe stellt im Inneren ihres Kovergenz-Ringgebietes $R_{R_1,R_2}(z_0)$ eine holomorphe Funktion dar.

Umgekehrt lässt sich jede in einem Ringgebiet holomorphe Funktion dort in eine Laurent-Reihe entwickeln.

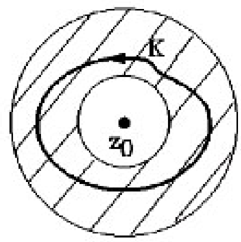
Satz 15-39:

Es sei $R_{R_1,R_2}(z_0)=\left\{z\in\mathbb{C}:\ R_1<\left|z-z_0\right|<R_2\right\}$ ein Ringgebiet und $f: R_{R_1,R_2}(z_0)\to\mathbb{C}$ holomorph auf $R_{R_1,R_2}(z_0)$. Dann lässt sich f in $R_{R_1,R_2}(z_0)$ eindeutig in eine Laurent-Reihe $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ um z_0 entwickeln. Die Reihe konvergiert kompakt in $R_{R_1,R_2}(z_0)$.

Für die Koeffizienten a_n gilt

$$a_n=\frac{1}{2\pi j}\int_K\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta\quad\forall n\in\mathbb{N}.$$

Hierbei ist K eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve in $R_{R_1,R_2}(z_0)$, die einmal um den inneren Kreis des Ringgebiets $R_{R_1,R_2}(z_0)$ verläuft.



Insbesondere gilt für $n=-1$: $\quad a_{-1}=\dfrac{1}{2\pi j}\displaystyle\int_K f(z)dz$

Beispiel:

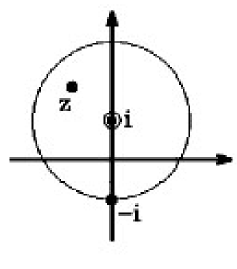
Soll eine rationale Funktion in eine Laurent-Reihe entwickelt werden, so führt man zunächst eine Partialbruchzerlegung durch und entwickelt dann die einzelnen Summanden jeweils mit Hilfe der geometrischen Reihe entweder in einen Haupt- oder Regulärteil (d.h. in eine Potenzreihe).

1) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1}=\dfrac{-j}{2}\cdot\dfrac{1}{z-j}+\dfrac{j}{2}\cdot\dfrac{1}{z+j}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{\pm j\}$

a) Laurententwicklung um $z_0=j$ auf $R_{0,2}(j)$:

$1/(z+j)$ muss in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe) entwickelt werden, da $1/(z+j)$ auf $I\left(K_2(j)\right)$ holomorph ist, die Singularität $-j$ liegt außerhalb von $I\left(K_2(j)\right)$.

$$\frac{1}{z+j}=\frac{1}{2j+(z-j)}=\frac{1}{2j}\cdot\frac{1}{1+(z-j)/(2j)}=\ldots$$



$$\ldots = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-j)^n}{(2j)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-j)^n}{(2j)^{n+1}}, \quad |z-j| < |2j| = 2.$$

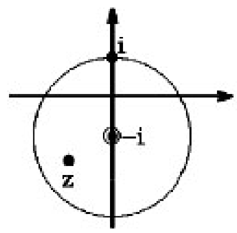
$1/(z-j)$ muss in einen Hauptteil entwickelt werden, da die Singularität j innerhalb von $I\left(K_2(j)\right)$ liegt. In diesem Fall ist $1/(z-j)$ schon fertiger Hauptteil. Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \underbrace{\frac{-j}{2}\cdot\frac{1}{z-j}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{j}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-j)^n}{(2j)^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z-j| < 2,$$

also konvergent in $R_{0,2}(j)$.

b) Laurententwicklung um $z_0 = -j$ auf $R_{0,2}(-j)$:
$1/(z-j)$ muss in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe) entwickelt werden, da $1/(z-j)$ auf $I\left(K_2(-j)\right)$ holomorph ist, die Singularität j liegt außerhalb von $I\left(K_2(-j)\right)$.

$$\frac{1}{z-j} = \frac{1}{-2j+(z+j)} = \frac{-1}{2j}\cdot\frac{1}{1-(z+j)/(2j)}$$
$$= -\frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+j)^n}{(2j)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+j)^n}{(2j)^{n+1}},$$
$$|z+j| < |2j| = 2$$

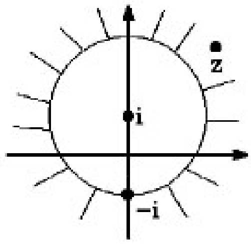


$1/(z+j)$ muss in einen Hauptteil entwickelt werden, da die Singularität $-j$ innerhalb von $I\left(K_2(-j)\right)$ liegt. In diesem Fall ist $1/(z+j)$ schon fertiger Hauptteil. Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \underbrace{\frac{j}{2}\cdot\frac{1}{z+j}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{j}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z+j)^n}{(2j)^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z+j| < 2,$$

also konvergent in $R_{0,2}(-j)$.

c) Laurententwicklung um $z_0 = j$ auf $R_{2,\infty}(j)$:
Da beide Singularitäten in $\overline{I}\left(K_2(j)\right)$ liegen, müssen $1/(z-j)$ und $1/(z+j)$ beide in einen Hauptteil entwickelt werden. $1/(z-j)$ ist schon fertig.



$$\frac{1}{z+j} = \frac{1}{2j+(z-j)} = \frac{1}{z-j}\cdot\frac{1}{1+2j/(z-j)}$$

$$= \frac{1}{z-j}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2j)^n}{(z-j)^{n+1}},\ \ |z-j|>|2j|=2.$$

Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \frac{-j}{2}\cdot\frac{1}{z-j} + \frac{j}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2j)^n}{(z-j)^{n+1}}$$

$$= \frac{-j}{2}\cdot\frac{1}{z-j} + \frac{j}{2}\cdot\frac{1}{z-j} + \frac{j}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2j)^n}{(z-j)^{n+1}}$$

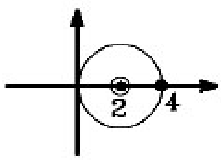
$$\Rightarrow\ f(z) = \frac{j}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2j)^n}{(z-j)^{n+1}},\quad |z-j|>2,$$

also konvergent in $R_{2,\infty}(j)$. In diesem Fall besteht die Laurent-Reihe nur aus einem Hauptteil, der Regulärteil ist $\equiv 0$.

2) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-4)} = \dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{z-4}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{2,4\}$

a) Laurententwicklung um $z_0 = 2$ auf $R_{0,2}(2)$:
$1/(z-4)$ muss in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe) entwickelt werden, da $1/(z-4)$ in $I\left(K_2(2)\right)$ holomorph ist, die Singularität 4 liegt außerhalb von $I\left(K_2(2)\right)$.

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{-2+(z-2)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(z-2)/2} = \ldots$$



$$\ldots = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}, \quad |z-2| < 2.$$

$1/(z-2)$ muss in einen Hauptteil entwickelt werden, da die Singularität 2 innerhalb von $I\big(K_2(2)\big)$ liegt. In diesem Fall ist $1/(z-2)$ schon fertiger Hauptteil. Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \underbrace{\frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z-2| < 2,$$

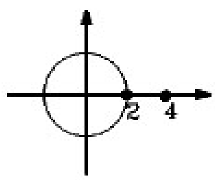
also konvergent auf $R_{0,2}(2)$.

b) Laurententwicklung um $z_0 = 0$ auf $R_{0,2}(0)$:
Da beide Summanden $1/(z-2)$ und $1/(z-4)$ holomorph auf $I\big(K_2(0)\big)$ sind, beide Singularitäten 2 und 4 liegen außerhalb

von $I\big(K_2(0)\big)$, müssen $1/(z-2)$ und $1/(z-4)$ beide in einen Regulärteil (also in eine Potenzreihe) entwickelt werden.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \quad |z| < 2,$$

$$\frac{1}{z-4} = \frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{1-z/4} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}, \quad |z| < 4.$$

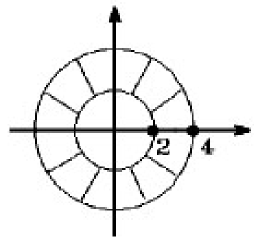


Insgesamt erhalten wir

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}}\right)z^n, \quad |z| < 2,$$

also konvergent auf $R_{0,2}(0)$. In diesem Fall besteht die Laurent-Reihe nur aus einem Regulärteil, der Hauptteil ist $\equiv 0$, f ist also holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$.

c) Laurententwicklung um $z_0 = 0$ auf $R_{2,4}(0)$:
$1/(z-4)$ muss in einen Regulärteil entwickelt werden, die Singularität 4 liegt außerhalb von $I\left(K_4(0)\right)$.



$$\frac{1}{z-4} = \frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{1-z/4} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}, \quad |z| < 4.$$

$1/(z-2)$ muss in einen Hauptteil entwickelt werden, die Singularität 2 liegt innerhalb von $\overline{I}\left(K_2(0)\right)$.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

Insgesamt erhalten wir

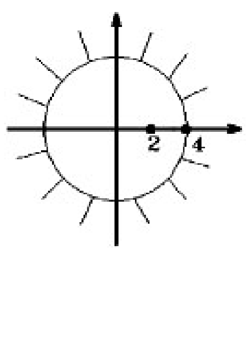
$$f(z) = \underbrace{\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^{n+1}}}_{\text{Regulärteil}}, \quad 2 < |z| < 4,$$

also konvergent auf $R_{2,4}(0)$.

d) Laurententwicklung um $z_0 = 0$ auf $R_{4,\infty}(0)$:
Beide Summanden $1/(z-2)$ und $1/(z-4)$ müssen in einen Hauptteil entwickelt werden, da beide Singularitäten 2 und 4 innerhalb $\overline{I}\left(K_4(0)\right)$ liegen.

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 2.$$

$$\frac{1}{z-4} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-4/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}, \quad |z| > 4.$$



Insgesamt erhalten wir

$$f(z)=\frac{-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{z^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(4^n-2^n)\frac{1}{z^{n+1}},\quad |z|>4,$$

also konvergent auf $R_{4,\infty}(0)$. In diesem Fall besteht die Laurent-Reihe nur aus einem Hauptteil, der Regulärteil ist $\equiv 0$.

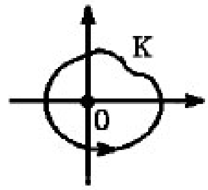
3) $f(z)=e^{1/z}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$

Laurent-Reihe auf $R_{0,\infty}(0)$:

$$e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\underbrace{1}_{\text{Regulärteil}}+\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}}_{\text{Hauptteil}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{3!z^3}+\ldots\Rightarrow a_{-1}=1.$$

Nach Satz 15-39 gilt

$$a_{-1}=\frac{1}{2\pi j}\int_K f(z)dz,$$



wobei K eine beliebige geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve mit $0\in I(K)$ ist. Also gilt

$$\int_K e^{1/z}dz=2\pi j a_{-1}=2\pi j.$$

4) $f(z)=e^z+e^{1/z}$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}=1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{z^n}{|n|!}$$

ist die Laurent-Reihe von f um $z_0=0$ auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

15.4.4 Isolierte Singularitäten

In der Anwendung kommt es oft vor (siehe vorige Beispiele), dass eine komplexe Funktion f in einer Umgebung eines Punktes z_0 definiert und sogar holomorph ist, in z_0 selbst aber nicht definiert ist, in z_0 also eine isolierte Singularität besitzt.

Definition 15-17: (*Isolierte Singularität*)
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\overset{\circ}{U}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C}:\ 0 < |z - z_0| < R\}$ eine punktierte Umgebung von z_0. Ist $f : \overset{\circ}{U}_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph in $\overset{\circ}{U}_R(z_0)$, so heißt z_0 eine isolierte Singularität von *f*.

Nach Satz 15-39 lässt sich f auf $\overset{\circ}{U}_R(z_0)$ um z_0 gemäß

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

in eine Laurent-Reihe entwickeln.

Beispiel:

1) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z^2+1)}$ holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{1, j, -j\}$

$\Rightarrow\ z_1 = 1,\ z_2 = j,\ z_3 = -j$ sind isolierte Singularitäten von f.

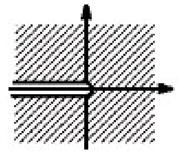
2) $f(z) = e^{1/z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{0\} \Rightarrow z_0 = 0$ ist isolierte Singularität.

3) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{0\} \Rightarrow z_0 = 0$ ist isolierte Singularität.

4) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ holomorph $\forall z \in \mathbb{C}$ bis auf $z_0 = 0$ und $z_k = \dfrac{1}{k\pi},\ k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$.

Da in jeder punktierten Umgebung von $z_0 = 0$ weitere Singularitäten liegen, denn $\lim\limits_{k \to \infty} 1/(k\pi) = 0 = z_0$, ist $z_0 = 0$ keine isolierte Singularität.

5) $f(z) = \log z$ holomorph auf $\mathbb{C} \backslash \{z = x:\ x \le 0\}$.



Da die komplexe Ebene an der negativen reellen Achse aufgeschnitten ist, ist $z_0 = 0$ keine isolierte Singularität.

Definition 15-18: (*Charakterisierung der isolierten Singularitäten*)
Es sei z_0 isolierte Singularität von $f : \overset{\circ}{U}_R(z_0) \to \mathbb{C}$ und

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}}_{\text{Hauptteil}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Regulärteil}}, \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

die Laurent-Reihe von f auf $\overset{\circ}{U}_R(z_0)$.

a) z_0 heißt hebbare Singularität $\Leftrightarrow$ $a_{-n} = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$,
d.h. der Hauptteil entfällt.

b) z_0 heißt Pol der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow$ $a_{-p} \ne 0,\ a_{-n} = 0 \ \ \forall n \ge p + 1$,

d.h. der Hauptteil $\sum_{n=1}^{p} a_{-n} \big/ (z - z_0)^n$ besitzt nur endlich viele Summanden.

c) z_0 heißt wesentliche Singularität $\Leftrightarrow$ $a_{-n} \ne 0$ für unendliche viele $n \in \mathbb{N}$,
d.h. der Hauptteil $\sum_{n=1}^{p} a_{-n} \big/ (z - z_0)^n$ besitzt unendlich viele Summanden.

Beispiel:

1) $f(z) = \begin{cases} \sin z / z & \text{falls } z \ne 0 \\ 1 & \text{falls } z = 0 \end{cases}$

ist holomorph auf $\mathbb{C}$ mit der Potenzreihe um $z_0 = 0$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}.$$

Das ist eine Laurent-Reihe mit Hauptteil $\equiv 0$ $\Rightarrow$ $z_0 = 0$ ist hebbare Singularität der Funktion $f(z) = \sin z / z$.

2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-j)(z+j)}$

hat die beiden isolierten Singularitäten $z_1 = j$ und $z_2 = -j$. Beide Singularitäten sind einfache Pole, d.h. Pole der Ordnung 1, denn die Laurent-Reihen um $z_1 = j$ bzw. um $z_2 = -j$ lauten

$$f(z) = \frac{-j}{2} \cdot \frac{1}{z-j} + \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2j)^{n+1}} (z-j)^n \quad \text{auf} \quad R_{0,2}(j)$$

$$\Rightarrow \ a_{-1} = -\frac{j}{2} \neq 0, \ a_{-n} = 0 \ \ \forall n \geq 2 \ \Rightarrow \ z_1 = j \quad \text{ist einfacher Pol.}$$

$$f(z) = \frac{j}{2} \cdot \frac{1}{z+j} + \frac{j}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2j)^{n+1}} (z+j)^n \quad \text{auf} \quad R_{0,2}(-j)$$

$$\Rightarrow \ a_{-1} = \frac{j}{2} \neq 0, \ a_{-n} = 0 \ \ \forall n \geq 2 \ \Rightarrow \ z_2 = -j \quad \text{ist einfacher Pol.}$$

3) $f(z) = e^{1/z}$ ist holomorph in $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ mit der Laurent-Reihe um $z_0 = 0$

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

Der Hauptteil besteht aus unendlich vielen Summanden $\Rightarrow$ $z_0 = 0$ ist wesentlich Singularität der Funktion $f(z) = e^{1/z}$.

<u>Definition 15-19</u>: (*Nullstelle der Ordnung p*)

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f: U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph auf $U_R(z_0)$ mit der Potenzreihe um z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Gilt $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1} = 0, \ a_p \neq 0,$ so heißt z_0 Nullstelle der Ordnung p. In diesem Fall gilt $f(z) = (z-z_0)^p g(z)$ mit g holomorph auf $U_R(z_0)$ und $g(z_0) \neq 0.$

Satz 15-40:
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f: U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph auf $U_R(z_0)$.

f hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung p

$$\Leftrightarrow \quad f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0$$

Beispiel:

1) $f(z) = \sin z$

$\Rightarrow \; z_k = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$, sind einfache Nullstellen, d.h. der Ordnung 1,

denn $f(k\pi) = \sin(k\pi) = 0, \quad f'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0.$

2) $f(z) = \cos z - 1$

$\Rightarrow \; z_k = 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$, sind doppelte Nullstellen, denn

$f(2k\pi) = 0, \; f'(2k\pi) = -\sin(2k\pi) = 0, \; f''(2k\pi) = -\cos(2k\pi) = -1 \neq 0.$

3) $f(z) = (z-1)^3(z^2+1) = (z-1)^3(z-j)(z+j)$

$\Rightarrow \; z_1 = 1$ ist dreifache Nullstelle, $z_{2,3} = \pm j$ sind einfache Nullstellen.

Satz 15-41: (*Regel von de l'Hospital*)
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f, g: U_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph auf $U_R(z_0)$. Ferner sei z_0 p-fache Nullstelle von f und ebenso p-fache Nullstelle von g. Dann gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(p)}(z)}{g^{(p)}(z)}.$$

Beispiel:

1) $\displaystyle \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = 1.$

2) $\displaystyle \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z^2} = \lim_{z \to 0} \frac{-\sin z}{2z} = \lim_{z \to 0} \frac{-\cos z}{2} = -\frac{1}{2}.$

Woran erkennt man nun, ob eine isolierte Singularität einer Funktion f ein Pol der Ordnung p ist? Eine Aussage liefert der folgende Satz.

<u>Satz 15-42:</u> (*Pol der Ordnung p*)
Es sei z_0 isolierte Singularität der Funktion f.

z_0 ist ein Pol der Ordnung p

$\Leftrightarrow$ $1/f$ hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung p.

<u>Beispiel:</u>

1) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ hat in $z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, einfache Pole, da $\sin z$ einfache Nullstellen in $z_k = k\pi$ besitzt.

2) $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ hat in $z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, einfache Pole, da $\sin z$ einfache Nullstellen in $z_k = k\pi$ besitzt und $\cos(k\pi) \neq 0$ ist.

3) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3} = \dfrac{1}{(z-j)^3(z+j)^3}$ hat in $z_1 = j$ und $z_2 = -j$ dreifache Pole.

4) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)}$ hat in $z_0 = 0$ einen dreifachen Pol, da 2fache Nullstelle von $(\cos z - 1)$ und 2fache Nullstellen von z^2 und einfache Nullstelle von $\sin z$. f hat in $z_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, jeweils einfache Pole, da 2fache Nullstellen von $(\cos z - 1)$ und einfache Nullstellen von $\sin z$.

In Satz 15-39 haben wir gezeigt, dass die Koeffizienten der Laurent-Reihe einer auf $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ holomorphen Funktion f durch ein Integral ausgedrückt werden können. Es gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\,d\zeta,\ \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

wobei K eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordankurve mit $z_0 \in I(K)$ ist.

Für Funktionen, die in z_0 einen Pol der Ordnung p besitzen, können wir die Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Reihe auf $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ um z_0 auch durch Ableitungen ausdrücken.

<u>Satz 15-43:</u> (*Koeffizienten der Laurent-Reihe bei p-fachen Polen*)
Es sei $f : \overset{\circ}{U}_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ und z_0 sei p-facher Pol von f. Dann gilt für die Koeffizienten a_{-k} des Hauptteils der Laurent-Reihe von f auf $\overset{\circ}{U}_r(z_0)$ um z_0

$$a_{-k} = \frac{1}{(p-k)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{p-k}}{dz^{p-k}} \Big((z - z_0)^p f(z) \Big), \ 1 \le k \le p.$$

Insbesondere gilt

$$a_{-p} = \lim_{z \to z_0} \Big((z - z_0)^p f(z) \Big) \ \text{ und } \ a_{-1} = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \Big((z - z_0)^p f(z) \Big).$$

Anwendung:
Man kann die Darstellung der Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Reihe dazu benutzen, die Koeffizienten der Partialbruchzerlegung zu berechnen.

Es sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion mit grad $p <$ grad q (sonst vorher Polynom-division durchführen). Überdies sei $z_0 \in \mathbb{C}$ l-facher Pol von f, also l-fache Nullstelle des Nennerpolynoms $q(z)$ und $p(z_1) \neq 0$, also

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z - z_1)^l r(z)} \quad \text{mit} \quad r(z_1) \neq 0.$$

Dann lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung bzgl. z_1:

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_2}{(z-z_1)^2} + \ldots + \frac{a_l}{(z-z_1)^l} + h(z)$$

mit h ist holomorph in $U_r(z_1)$, lässt sich also um z_1 in eine Potenzreihe entwickeln mit

$$h(z) = b_0 + b_1(z-z_1) + b_2(z-z_1)^2 + \ldots$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \frac{a_2}{(z-z_1)^2} + \ldots + \frac{a_l}{(z-z_1)^l} + b_0 + b_1(z-z_1) + b_2(z-z_1)^2 + \ldots$$

Das ist die Laurent-Reihe für die Funktion

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z-z_1)^l r(z)} \quad \text{um } z_1 \text{ in } \mathring{U}_r(z_1).$$

Also lauten die Koeffizienten nach Satz 15-43

$$a_k = \frac{1}{(l-k)!} \lim_{z\to z_1} \frac{d^{l-k}}{dz^{l-k}} \left((z-z_1)^l f(z) \right)^{(p-k)}_{|z=z_0}, \quad 1 \le k \le l.$$

Nach Ausnutzen von

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{(z-z_1)^l r(z)} \quad \Rightarrow \quad (z-z_1)^l f(z) = \frac{p(z)}{r(z)}.$$

erhalten wir die Koeffizienten bzgl. des l-fachen Pols z_1 durch

$$a_k = \frac{1}{(l-k)!} \lim_{z\to z_1} \frac{d^{l-k}}{dz^{l-k}} \left(\frac{p(z)}{r(z)} \right), \quad 1 \le k \le l.$$

Insbesondere gilt $a_l = p(z_1)/r(z_1)$.

Beispiel:

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z^2+1)} = \frac{z^3 - 2z^2 - z}{(z-1)^3(z-j)(z+j)}.$$

Ansatz für Partialbruchzerlegung

$$\frac{z^3-2z^2-z}{(z-1)^3(z^2+1)}=\frac{a_1}{z-1}+\frac{a_2}{(z-1)^2}+\frac{a_3}{(z-1)^3}+\frac{b_1}{z-j}+\frac{c_1}{z+j}.$$

$$a_3=\left.\frac{z^3-2z^2-z}{z^2+1}\right|_{z=1}=\frac{-2}{2}=-1,$$

$$a_2=\left.\left(\frac{z^3-2z^2-z}{z^2+1}\right)'\right|_{z=1}=\left.\left(\frac{(3z^2-4z-1)(z^2+1)-(z^3-2z^2-z)2z}{(z^2+1)^2}\right)\right|_{z=1}$$

$$=\left.\left(\frac{z^4+4z^2-4z-1}{(z^2+1)}\right)\right|_{z=1}=0,$$

$$a_1=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{z^3-2z^2-z}{z^2+1}\right)''\right|_{z=1}=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{z^4+4z^2-4z-1}{(z^2+1)}\right)'\right|_{z=1}=\ldots$$

$$\ldots=\frac{1}{2}\left.\left(\frac{(4z^3+8z-4)(z^2+1)-4z(z^4+4z^2-4z-1)}{(z^2+1)^3}\right)\right|_{z=1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8\cdot 2-4\cdot 0}{8}=1,$$

$$b_1=\left.\frac{z^3-2z^2-z}{(z-1)^3(z+j)}\right|_{z=j}=\frac{-j+2-j}{(j-1)^3 2j}=\frac{1-j}{j(j-1)^3}=\frac{j}{(1-j)^2}=\frac{j}{-2j}=-\frac{1}{2},$$

$$c_1=\left.\frac{z^3-2z^2-z}{(z-1)^3(z-j)}\right|_{z=-j}=\frac{j+2+j}{(-j-1)^3(-2j)}=\frac{1+j}{j(j+1)^3}=\frac{-j}{(1+j)^2}=\frac{-j}{2j}=-\frac{1}{2}$$

Partialbruchzerlegung auf $\mathbb{C}$

$$\Rightarrow\ \frac{z^3-2z^2-z}{(z-1)^3(z^2+1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^3}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-j}+\frac{1}{z+j}\right)$$

Partialbruchzerlegung auf $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow\ \frac{z^3-2z^2-z}{(z-1)^3(z^2+1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^3}-\frac{z}{z^2+1}$$

15.5 Residuensatz und Anwendungen

15.5.1 Residuensatz

Ist K eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordan-Kurve, und ist f holomorph auf $\overline{I}(K)$, so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

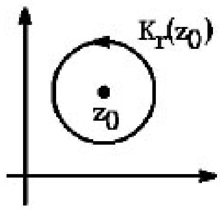
$$\int_K f(z)\,dz = 0,$$

da $I(K)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

Wir wollen nun auch den Fall zulassen, dass f in $I(K)$ endlich viele isolierte Singularitäten besitzt. Dazu definieren wir zunächst das Residuum von f an einer isolierten Singularität z_0.

<u>Definition 15-20</u>: (*Residuum*)
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und sei $f : \overline{U}_r(z_0)\setminus\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\overline{U}_r(z_0)\setminus\{z_0\}$ mit $\overline{U}_r(z_0)\setminus\{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_0| \le r\}$, $r > 0$. Dann heißt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := \frac{1}{2\pi j}\int_{K_r(z_0)} f(z)dz$$



das Residuum von f an der Stelle z_0.

<u>Anmerkung:</u>

a) Es gilt $\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}$, wobei a_{-1} den Koeffizient der Laurent-Reihe von $f(z) = 1/(z - z_0)$ um z_0 auf $R_{0,r}(z_0)$ bezeichnet.

b) $\operatorname{Res}(f, z_0)$ ist unabhängig von r, solange f holomorph auf $R_{0,r}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z - z_0| \le r\}$ ist.

<u>Beispiel:</u>

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1} \Rightarrow \operatorname{Res}(f, j) = -\dfrac{j}{2}$, $\operatorname{Re}s(f, -j) = \dfrac{j}{2}$

2) $f(z) = e^{1/z}$

Die Laurent-Reihe von f um z_0 auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ lautet

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} \;\Rightarrow\; a_{-1} = 1 \;\Rightarrow\; \operatorname{Res}(f,0) = 1.$$

3) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)}$. Gesucht: Res(f,0) = ?

$z_0 = 0$ ist dreifacher Pol von f.

Berechnung des Koeffizienten a_{-1} der Laurent-Reihe um $z_0 = 0$

$$\frac{\sin z}{z^2(\cos z - 1)} = \frac{z - z^3/3! + z^5/5! - \ldots}{z^2\left(-z^2/2! + z^4/4! - \ldots\right)} = \frac{z\left(1 - z^2/3! + \ldots\right)}{z^4\left(-1/2! + z^2/4! - \ldots\right)}$$

$$= -\frac{1}{z^3} \cdot \frac{1 - z^2/6 + \ldots}{1/2! - z^2/4! + \ldots} = -\frac{1}{z^3}(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{-b_0}{z^3} + \frac{-b_1}{z^2} + \frac{-b_2}{z} + (-b_3) + (-b_4)z + \ldots \;\Rightarrow\; \operatorname{Res}(f,0) = a_{-1} = -b_2.$$

Berechnung von b_2

$$\frac{1 - z^2/6 + \ldots}{1/2 - z^2/4! + \ldots} = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow\; 1 - \frac{z^2}{6} + \ldots = (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots)\left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \ldots\right)$$

$$= \frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} z + \left(\frac{b_2}{2} - \frac{b_0}{24}\right) z^2 + \ldots$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$b_0 = 2,\; b_1 = 0,\; \frac{b_2}{2} - \frac{b_0}{24} = -\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; b_2 = 2\left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\; \operatorname{Res}(f,0) = 1/6.$$

4) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z-1}$. Gesucht: $\operatorname{Res}(f,2k\pi)=?$

$z_k=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ sind doppelte Pole von f.

Berechnung des Koeffizienten a_{-1} der Laurent-Reihe um $z_0=2k\pi$

$$\frac{1}{\cos z-1}=\frac{1}{\cos(z-2k\pi)-1},\quad \text{da } \cos z \ \ 2\pi\text{-periodisch}$$

Mit der Substitution $u=z-2k\pi$ erhalten wir

$$\frac{1}{\cos z-1}=\frac{1}{\cos u-1}=\frac{1}{-u^2/2+u^4/4!+\ldots}=-\frac{1}{u^2}\cdot\frac{1}{1/2-u^2/24+\ldots}$$

$$=-\frac{1}{u^2}(b_0+b_1u+b_2u^2+\ldots)=\frac{-b_0}{u^2}+\frac{-b_1}{u}+(-b_2)+(-b_3)u+\ldots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,2k\pi)=-b_1.$$

Berechnung von b_1

$$1=\left(b_0+b_1u+b_2u^2+\ldots\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{u^2}{24}+\ldots\right)=\frac{b_0}{2}+\frac{b_1}{2}u+\ldots$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\Rightarrow b_0=2,\ b_1=0 \ \Rightarrow \operatorname{Res}(f,2k\pi)=0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}.$$

Bei wesentlichen Singularitäten muss das Residuum mit Hilfe des Koeffizienten der Laurent-Reihe bestimmt werden (vgl. Beispiel 2).

Bei p-fachen Polen kann man genauso verfahren (vgl. Beispiele 1,3,4), man kann das Residuum in diesem Fall aber oft einfacher mit Hilfe der folgenden Eigenschaft berechnen.

<u>Satz 15-44</u>: (*Berechnung des Residuum bei p-fachen Polen*)
Die Funktion f besitze in z_0 einen Pol der Ordnung p. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \left((z - z_0)^p f(z) \right).$$

Spezialfall: Für einen einfachen Pol z_0 gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Für einfache Pole kann das Residuum alternativ auch über die folgende Eigenschaft berechnet werden.

<u>Satz 15-45</u>: (*Berechnung des Residuums bei einfachen Polen*)

Es sei $f(z) = g(z)/h(z)$ mit g, h holomorph auf $U_r(z_0)$, $r > 0$ und $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$. Also $f = g/h$ hat in z_0 einen einfachen Pol. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, z_0 \right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

<u>Beispiel:</u>

1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1} = \dfrac{1}{(z - j)(z + j)}$

$\Rightarrow$ f hat die einfachen Pole $z_1 = j$ und $z_2 = -j$. Nach Satz 15-44 gilt

$$\operatorname{Res}(f, i) = \left. \frac{1}{z + j} \right|_{z=j} = \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2}, \quad \operatorname{Res}(f, -j) = \left. \frac{1}{z - j} \right|_{z=-j} = \frac{1}{-2j} = \frac{j}{2}$$

oder nach Satz 15-45 (kann benutzt werden, da z_i einfache Pole) gilt

$$\operatorname{Res}(f, j) = \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=j} = \frac{1}{2j} = -\frac{j}{2}, \quad \operatorname{Res}(f, -j) = \left. \frac{1}{2z} \right|_{z=-j} = \frac{1}{-2j} = \frac{j}{2}.$$

2) $f(z) = e^z / \sin z$

$\Rightarrow$ f hat die einfachen Pole $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Nach Satz 15-45 gilt

$$\operatorname{Res}(f,k\pi)=\frac{e^{k\pi}}{\cos k\pi}=(-1)^k e^{k\pi},\ k\in\mathbb{Z}.$$

3) $f(z)=(z^4+1)\big/(z+1)^3$

$\Rightarrow$ f besitzt den dreifachen Pol $z_0=-1$.

$$\operatorname{Re}s(f,-1)=\frac{1}{2!}(z^4+1)''\Big|_{z=-1}=\frac{1}{2}(12z^2)\Big|_{z=-1}=6.$$

4) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z-1)^2}$

$\Rightarrow$ f besitzt den einfachen Pol $z_1=-1$ und den 2fachen Pol $z_2=1$

$$\operatorname{Res}(f,-1)=\frac{1}{(z-1)^2}\bigg|_{z=-1}=\frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Res}(f,1)=\Big|\left((z+1)^{-1}\right)'\Big|_{z=1}=-(z+1)^{-2}\Big|_{z=1}=-\frac{1}{4}.$$

5) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2(\cos z-1)}$

$\Rightarrow$ f besitzt den dreifachen Pol $z_0=0$ und die einfachen Pole $z_k=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$

$\operatorname{Res}(f,0)=\dfrac{1}{6}$ (vgl. Beispiel 3, S. 15-3/4).

$$\operatorname{Res}(f,2k\pi)=\lim_{z\to 2k\pi}\frac{(z-2k\pi)\sin z}{z^2(\cos z-1)}=\lim_{z\to 2k\pi}\frac{\sin z+(z-2k\pi)\cos z}{2z(\cos z-1)+z^2(-\sin z)}$$

$$=\lim_{z\to 2k\pi}\frac{2\cos z+(z-2k\pi)(-\sin z)}{2(\cos z-1)+4z(-\sin z)+z^2(-\cos z)}$$

$$=-\frac{2}{(2k\pi)^2},\ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

(hierbei wurde zweimal die Regel von de l'Hospital ausgenutzt).

6) $f(z)=\dfrac{1}{z\sin z}$

$\Rightarrow$ $z_0=0$ ist doppelter Pol und $z_k=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, sind einfache Pole.

$$\operatorname{Res}(f,k\pi)=\left(\frac{1}{\sin z+z\cos z}\right)_{z=k\pi}=\frac{1}{k\pi\cos k\pi}=\frac{(-1)^k}{k\pi},\quad k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$$

$$\operatorname{Res}(f,0)=\frac{1}{1!}\left(\frac{z^2}{z\sin z}\right)'_{z=0}=\left(\frac{z}{\sin z}\right)'_{z=0}=\lim_{z\to 0}\frac{\sin z-z\cos z}{\sin^2 z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-\cos z+z\sin z}{2\sin z\cos z}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{2\cos z}=0$$

(Regel von de l'Hospital).

Oder mit Hilfe der Laurent-Reihe:

$$\frac{1}{z\sin z}=\frac{1}{z(z-z^3/3!+\ldots)}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z^2/6+\ldots}=\frac{1}{z^2}(b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots)$$

$$=b_0/z^2+b_1/z+b_2+b_3z+\ldots\ \Rightarrow\ \operatorname{Res}(f,0)=b_1$$

mit $1=(b_0+b_1z+b_2z^2+\ldots)\left(1-z^2/6+\ldots\right)=b_0+b_1z+\ldots$

$\Rightarrow$ $b_1=0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}(f,0)=0.$

Wir kommen nun zu dem für die Anwendung wichtigen Residuensatz.

<u>Satz 15-46:</u> (*Residuensatz*)
Es sei K eine geschlossene, positiv orientierte, stückweise glatte Jordan-Kurve. Außerdem sei f holomorph in $\overline{I}(K)$ mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, z_2, \ldots z_n\in I(K)$. Dann gilt

$$\int_K f(z)dz=2\pi j\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}(f,z_k).$$

Zur Berechnung von $\int_K f(z)\,dz$ müssen also die Residuen aller im Inneren der geschlossenen Kurve K gelegenen isolierten Singularitäten z_k von f berechnet werden.

Beispiel:

1) Gesucht: $\int_{K_r(0)} \frac{1}{z\sin z}\,dz \quad \text{mit} \quad \pi < r < 2\pi$

$$\Rightarrow \int_K \frac{1}{z\sin z}dz = 2\pi j\big(\operatorname{Res}(f,-\pi)+\operatorname{Res}(f,0)+\operatorname{Res}(f,\pi)\big)$$

$$= 2\pi j\left(\frac{-1}{-\pi}+0+\frac{-1}{\pi}\right) = 0.$$

(Berechnung der Residuen vgl. Beispiel 6, S.15-197/198).

2) Gesucht: $\int_{K_r(0)} \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz \quad \text{mit} \quad r > 1$

$$\Rightarrow \int_{K_r(0)} \frac{e^z}{z(z+1)}dz = 2\pi j\big(\operatorname{Res}(f,-1)+\operatorname{Res}(f,0)\big)$$

$$= 2\pi j\left(\left.\frac{e^z}{z}\right|_{z=-1} + \left.\frac{e^z}{z+1}\right|_{z=0}\right) = 2\pi j(1-e^{-1}).$$

3) Die erweiterte Cauchysche Integralformel folgt sofort aus dem Residuensatz. Es sei f holomorph in $\overline{I}(K_r(z_0))$, dann gilt

$$\int_{K_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 2\pi j\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, z_0\right)$$

$$= 2\pi j\frac{1}{n!}\left.\left((z-z_0)^{n+1}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\right)^{(n)}\right|_{z=z_0} = \frac{2\pi j}{n!}f^{(n)}(z_0)$$

(da z_0 $(n+1)$-facher Pol).

15.5.2 Berechnung reeller Integrale mit Hilfe des Residuensatzes

Man kann viele reelle Integrale, die im Reellen nur sehr schwierig oder überhaupt nicht berechnet werden können, über den Umweg eines komplexen Integrals berechnen. Die komplexen Integrale werden dann mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes (vgl. Beispiele S. 15-101 ff) oder mit Hilfe des Residuensatzes berechnet.

1. Integrale vom Typ

$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)/q(x)\,dx,\;\; p, q$ Polynome mit $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p,\;\; q(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$

<u>Satz 15-47:</u>

Es sei $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion mit $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ und $q(x) \neq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$ (d.h. q darf keine reellen Nullstellen besitzen). Ferner seien $z_1, z_2, \ldots z_m$ die Nullstellen von q in der oberen Halbebene (d.h. $\operatorname{Im}(z_k) > 0$). Dann konvergiert das Integral mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\,dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z_k\right), \quad (\operatorname{Im} z_k > 0)$$

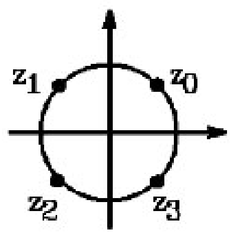
<u>Anmerkung:</u>

Da q keine reellen Nullstellen haben darf, muss der grad q eine gerade Zahl sein, denn mit z_0 ist auch $\overline{z}_0$ Nullstelle von q.

<u>Beispiel:</u>

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$ denn

$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{1}{x^4+1} \Rightarrow \operatorname{grad} q = 4 \geq 2 + \operatorname{grad} p.$



Nullstellen von q in der oberen Halbebene:

$$q(z)=0 \Leftrightarrow z^4=-1=e^{j\pi} \Leftrightarrow z_k=e^{j\frac{\pi+2k\pi}{4}},\ k=0,1,2,3$$

$$\Rightarrow z_0=e^{j\pi/4},\ \ z_1=e^{j3\pi/4},\ \ z_2=\overline{z}_1,\ \ z_3=\overline{z}_0.$$

$$\operatorname{Im} z_k>0 \Rightarrow \text{nur } z_0=e^{j\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j),\ z_1=e^{j3\pi/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+j).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx=2\pi j\left(\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1},z_0\right)+\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4+1},z_1\right)\right)$$

$$=2\pi j\left(\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_0}+\left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_1}\right)=2\pi j\left(\left.\frac{z}{4z^4}\right|_{z=z_0}+\left.\frac{z}{4z^4}\right|_{z=z_0}\right)$$

$$=2\pi j\left(\frac{z_0}{-4}+\frac{z_1}{-4}\right)=\frac{-\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1+j)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+j)\right)$$

$$=\frac{-\pi j}{2}\cdot\frac{2j}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

2) $$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{4}.$$

Das erste "=" gilt, da der Integrand eine gerade Funktion ist. Es gilt $\operatorname{grad} q=4\geq 2+\operatorname{grad} p.$ Die einzige Nullstelle von q in der oberen Halbebene ist $z_1=j$ (doppelter Pol des Integranden).

$$\int_0^{\infty}\frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}2\pi j\operatorname{Res}\left(\frac{z^2}{(z^2+1)^2},j\right)=\pi j\left.\left(\frac{z^2}{(z+j)^2}\right)'\right|_{z=j}$$

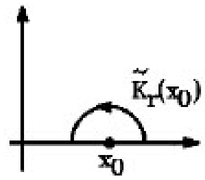
$$=\pi j\left.\frac{2z(z+j)-2z^2}{(z+j)^3}\right|_{z=j}=\pi j\frac{(2j)(2j)+2}{(2j)^3}=\frac{\pi}{4}.$$

Bevor wir den nächsten Integraltyp behandeln, benötigen wir noch den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz:

Die Funktion f habe in $x_0 \in \mathbb{R}$ einen einfachen Pol. Dann gilt

$$\lim_{r\to 0}\int_{\tilde{K}_r(x_0)} f(z)dz = \pi j \operatorname{Res}(f, x_0),$$



wobei $\tilde{K}_r(x_0)$ der positiv orientierte Halbkreis um x_0 mit Radius r ist, also $\tilde{K}_r(x_0) = \left\{z \in \mathbb{C}:\ z = x_0 + re^{jt},\ t \in [0,\pi]\right\}$.

2. Integrale vom Typ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{Bmatrix}dx, \quad \alpha > 0$$

Satz 15-48:

a) Die Funktion f sein holomorph in $\left\{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Im} z \geq 0\right\}$ mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, z_2, \ldots, z_m$ in der oberen Halbebene, d.h. $\operatorname{Im}(z_k) > 0$.

Ferner gelte $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, dann konvergieren die Integrale für $\alpha > 0$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{Bmatrix}dx = \begin{Bmatrix}\operatorname{Re}\\ \operatorname{Im}\end{Bmatrix}\left(2\pi j\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{j\alpha z}, z_k\right)\right), \quad (\operatorname{Im}(z_k) > 0)$$

b) Hat f zusätzlich endlich viele einfache Pole $x_1, x_2, \ldots, x_l$ auf der reellen Achse, so gilt für $\alpha > 0$ falls das uneigentlich Integral konvergent ist.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\begin{Bmatrix}\cos\alpha x\\ \sin\alpha x\end{Bmatrix}dx = \begin{Bmatrix}\operatorname{Re}\\ \operatorname{Im}\end{Bmatrix}\left(2\pi j\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{j\alpha z}, z_k\right)\right) +$$

$$+\pi j\sum_{k=1}^{l}\operatorname{Res}\left(f(z)e^{j\alpha z}, x_k\right), \quad (\operatorname{Im}(z_k) > 0,\ x_k \in \mathbb{R})$$

Beispiel:

1) $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{a^2 + x^2}dx = ?$, ($a > 0$ fest).

Der Integrand ist eine gerade Funktion, also gilt

$$I(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx.$$

$\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{1}{a^2 + z^2} = 0$ und f ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{\pm ja\}$ $\Rightarrow$ nur die Singularität $z_1 = ja$ liegt in der oberen Halbebene. $z_1 = ja$ ist einfacher Pol von f. Auf der reellen Achse liegen keine Singularitäten. Also gilt:

<u>1. Fall: $\alpha > 0$</u>

Ausnutzen des Satzes 15-48 a) liefert

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(2\pi j \operatorname{Res}\left(\frac{e^{j\alpha z}}{a^2 + z^2}, ja \right)\right)$$

$$= \pi \operatorname{Re}\left(j \frac{e^{i\alpha i a}}{2ja} \right) = \pi \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-\alpha a}}{2a} \right) = \frac{\pi e^{-\alpha a}}{2a}.$$

<u>2. Fall: $\alpha < 0$</u>

$\alpha < 0 \;\Rightarrow\; (-\alpha) > 0$, da $\cos \alpha x = \cos(-\alpha) x$ folgt mithilfe von Fall 1

$$I(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(-\alpha) x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{\alpha a}}{2a}.$$

<u>3. Fall: $\alpha = 0$</u>

$$I(0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

nach Satz 15-47 berechnen oder bei gleichmäßiger Konvergenz bzgl. α

$$I(0) = \frac{1}{2} \lim_{\alpha\to 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \lim_{\alpha\to 0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2a}.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi e^{-|\alpha| a}}{2a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad a > 0.$$

Anmerkung:

Das Integral konvergiert gleichmäßig bzgl. α, wenn $f(z) = p(z)/q(z)$ eine rationale Funktion ist mit $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ und $q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Das ist in diesem Beispiel der Fall, denn für $f(z) = 1/(a^2 + z^2)$ gilt $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ und $q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Anmerkung:

Bei sin-Integralen ändert sich für $\alpha < 0$ auch das Gesamtvorzeichen, da $\sin(-\alpha)x = -\sin \alpha x$ gilt. Für $\alpha = 0$ erhält man hier den Integralwert = 0, da $\sin 0 = 0$ ist.

2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi.$

Da der Integrand eine gerade Funktion ist, gilt

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Für die Funktion $f(z) = 1/z$ gilt $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, f ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $x_1 = 0$ ist ein einfacher Pol auf der reellen Achse.

Da $\lim\limits_{x\to 0} \sin x/x = 1,$ ist der Integrand stetig auf $\mathbb{R}$. Die Konvergenz des Integrals haben wir bereits früher gezeigt.

Nach Satz 15-48 b) gilt also (mit $\alpha = 1 > 0$)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \operatorname{Im}\left(\pi j \operatorname{Res}\left(\frac{e^{jz}}{z}, 0\right)\right) = \operatorname{Im}(\pi j \cdot 1) = \pi.$$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)}\,dx = \frac{2}{\pi}.$

Für $f(z) = \dfrac{1}{z(\pi^2 - z^2)}$ gilt $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm\pi, 0\}$,

$x_1 = -\pi, x_2 = 0$ und $x_3 = \pi$ sind einfache Pole auf der reellen Achse,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} = \frac{1}{\pi^2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\pm\pi} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} = \lim_{x\to\pm\pi} \frac{\cos x}{\pi^2 - 3x^2} = \frac{1}{2\pi^2}$$

$\Rightarrow$ der Integrand ist stetig auf $\mathbb{R}$, für $x \to \pm\infty$ verhält sich der Integrand wie $1/x^3$ und $\int_1^\infty 1/x^3\, dx$, $\int_{-\infty}^{-1} 1/x^3\, dx$ sind konvergent

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} dx$ ist konvergent.

Nach Satz 15-48 b) gilt also (mit $\alpha = 1 > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(\pi^2 - x^2)} dx = \operatorname{Im}\left(\pi j \left(\operatorname{Res}\left(\left(\frac{e^{jz}}{z(\pi^2 - x^2)}, -\pi\right) + \ldots\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \ldots + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{jz}}{z(\pi^2 - x^2)}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{jz}}{z(\pi^2 - x^2)}, \pi\right)\right)\right)\right)$$

$$= \operatorname{Im}\left(\pi j \left(\frac{e^{-j\pi}}{\pi^2 - 3(-\pi)^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{e^{j\pi}}{\pi^2 - 3\pi^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\left(\left(-\frac{j}{2}(e^{i\pi} + e^{-j\pi}\right) + j\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}(-j\cos\pi + j) = \frac{2}{\pi}.$$

4) Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jst} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos st\, dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin st\, dt.$$

Beide Integrale lassen sich, falls die Voraussetzungen erfüllt sind, mit Hilfe von Satz 15-48 für $s > 0$ berechnen. Sei also für $s > 0$

$$u(s) = 2\pi j \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{jsz}, z_k \right) + \pi j \sum_{k=1}^{l} \operatorname{Res}\left(f(z)e^{jsz}, x_k \right),$$

wobei z_k die Singularitäten von f mit $\operatorname{Im}(z_k) > 0$ und x_k die einfachen Pole auf der reellen Achse sind. Dann gilt

$$\mathcal{F}\left\{ f(t) \right\}(s) = \begin{cases} u(|s|), & \text{falls } \; s < 0 \\ \operatorname{Re}\left(u(0)\right), & \text{falls } \; s = 0 \\ \overline{u(|s|)}, & \text{falls } \; s > 0 \end{cases}$$

Das Ergebnis für $s = 0$ gilt nur bei gleichmäßiger Konvergenz bzgl. s.

Beispiel:

a) $\mathcal{F}\left\{ f(t) \right\}(s) = ?$ für $f(t) = \dfrac{1}{a^2 + t^2}, \; a > 0.$

Für $f(z) = \dfrac{1}{a^2 + z^2}$ gilt $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm ja\}$,

$z_1 = ja$ ist einfacher Pol in der oberen Halbebene. Also gilt für $s > 0$

$$u(s) = 2\pi j \operatorname{Res}\left(\frac{e^{jsz}}{a^2 + z^2}, ja \right) = 2\pi j \frac{e^{jsja}}{2ja} = \frac{\pi}{a} e^{-as}.$$

Es gilt gleichmäßige Konvergenz des Integrals bzg. s, da $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$. Damit ergibt sich die gesuchte Fourier-Transformierte zu

$$\mathcal{F}\left\{ \frac{1}{a^2 + t^2} \right\}(s) = \frac{\pi}{a} e^{-a|s|}, \; s \in \mathbb{R}, \; a > 0.$$

b) $\mathcal{F}\left\{ f(t) \right\}(s) = ?$ für $f(t) = \dfrac{t}{a^2 + t^2}, \; a > 0.$

Für $f(z) = \dfrac{z}{a^2 + z^2}$ gilt $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = 0$, f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm ja\}$,

$z_1 = ja$ ist einfacher Pol in der oberen Halbebene. Also gilt für $s > 0$

$$u(s) = 2\pi j \operatorname{Res}\left(\frac{ze^{jsz}}{a^2+z^2}, ja\right) = 2\pi j \frac{jae^{jsja}}{2ja} = j\pi e^{-as}.$$

Hier gilt keine gleichmäßige Konvergenz des Integrals bzgl. s, aber f ist ungerade Funktion, also ist $\mathcal{F}\{f\}$ ein reines sin-Integral, das für $s = 0$ gleich Null ist (das cos-Integral ist Null als Cauchyscher Hauptwert). Damit ergibt sich die gesuchte Fourier-Transformierte zu

$$\mathcal{F}\left\{\frac{t}{a^2+t^2}\right\}(s) = \begin{cases} j\pi e^{-a|s|}, & \text{falls } s<0 \\ 0, & \text{falls } s=0 \\ j\pi e^{-a|s|}, & \text{falls } s>0 \end{cases}$$

3. Integrale vom Typ

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx, \quad 0<\alpha<1$$

<u>Satz 15-49:</u>

Es sei $R(x) = p(x)/q(x)$ eine rationale Funktion mit $\operatorname{grad} q \geq 1 + \operatorname{grad} p$ und $q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$. Ferner seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ alle Pole von $R(z)$ in $\mathbb{C}$. Dann gilt für $0 < \alpha < 1$

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx = \frac{\pi e^{j\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, z_k\right), \quad z^\alpha = |z|^\alpha\, e^{j\alpha \arg z}, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

<u>Beispiel:</u>

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x(1+x)}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx = \frac{\pi e^{j\pi/2}}{\sin \pi/2}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^{1/2}(1+z)}, -1\right)$$

$$= j\pi \frac{1}{(-1)^{1/2}} = \frac{j\pi}{|1|^{1/2}\, e^{j\pi/2}} = \frac{j\pi}{j} = \pi.$$

(da $\alpha = 1/2,\ e^{j\pi/2} = j,\ \sin \pi/2 = 1,\ \arg(-1) = \pi$)

Die Voraussetzungen des Satzes 15-49 sind für $R(z) = 1/(1+z)$ alle erfüllt.

4. Integrale vom Typ

$$\int_0^\infty R(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty R(x)\ln x\,dx$$

Satz 15-50:

Es sei $R(x) = p(x)/q(x)$ eine rationale Funktion mit $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ und $q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$. Ferner seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$ alle Pole von $R(z)$ in $\mathbb{C}$. Dann gilt

a) $$\int_0^\infty R(x)\,dx = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\big(R(z)\log z, z_k\big)$$

b) $$\int_0^\infty R(x)\ln x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\big(R(z)(\log z)^2, z_k\big)\right)$$

mit $\log z = \ln|z| + j\arg z,\quad 0 < \arg z < 2\pi$

Beispiel:

1) $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)(1+x^2)}\,dx = -\sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{\log z}{(1+z)(1+z^2)}, z_k\right) (\text{mit } z_1 = -1,\ z_{2,3} = \pm j)$$

$$= -\left(\frac{\log(-1)}{2} + \frac{\log j}{(1+j)2j} + \frac{\log(-j)}{(1-j)(-2j)}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}(\ln 1 + j\pi) + \frac{1-j}{4j}\left(\ln 1 + j\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1+j}{4j}\left(\ln 1 + j\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{j\pi}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{j\pi}{8} - \frac{3\pi}{8} - \frac{j3\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 15-50 sind für die Funktion

$$R(z) = \frac{1}{(1+z)(1+z^2)}$$

erfüllt, da $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ und $q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.

2) $$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\operatorname{Res}\left(\frac{(\log z)^2}{(1+z)^3},-1\right)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2}\left((\log z)^2\right)''\Big|_{z=-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left(\frac{\log z}{z}\right)'\Big|_{z=-1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\left(\frac{1-\log z}{z^2}\right)\Big|_{z=-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{1-(\ln 1 + j\pi)}{(-1)^2}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(1-j\pi) = -\frac{1}{2}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 15-50 sind für die Funktion

$$R(z) = 1/(1+z)^3$$

erfüllt, da $\operatorname{grad} q \geq 2 + \operatorname{grad} p$ und $q(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$.

Anmerkung:

Ist die rationale Funktion gerade, so gilt $\int_0^\infty R(t)\,dt = 1/2 \int_{-\infty}^\infty R(t)\,dt.$ In diesem Fall berechnet man das Integral einfacher nach Satz 15-47.

5. Integrale vom Typ

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$$

Satz 15-51:

Es sei $R(\cos x, \sin x)$ eine rationale Funktion in $\cos x$ und $\sin x$. Ferner sei $R^*(z) = R\left(\left(z+z^{-1}\right)/2, \left(z-z^{-1}\right)/2j\right)/jz$ und $z_1, z_2, \ldots, z_n$ seien die Pole von R^* mit $|z_k| < 1$ (R^* hat keine Singularitäten auf $K_1(0)$). Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(R^*, z_k\right),\ |z_k| < 1.$$

Beispiel:

$$I = \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{5-3\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2x}{5-3\cos x}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{5-3\cos x}\,dx.$$

(da Integrand gerade Funktion) (da Integrand 2π-periodisch)

Da $\cos 2x = \frac{1}{2}\left(e^{j2x} + e^{-j2x}\right) = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$ mit $z = e^{jx}$, gilt

$$I = \frac{1}{2}\int_{K_1(0)} \frac{\left(z^2 + 1/z^2\right)/2}{5 - 3\left(z + 1/z\right)/2} \frac{1}{jz} dz$$

$$= \frac{-1}{2j}\int_{K_1(0)} \frac{z^4+1}{z^2(3z^2-10z+3)} dz = \frac{-1}{2j}\int_{K_1(0)} \frac{z^4+1}{3z^2(z-3)(z-1/3)}$$

$$= \frac{-1}{2j}\cdot 2\pi j\left(\operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(3z^2-10z+3)},0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(3z^2-10z+3)},\frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= -\pi\left(\left(\frac{z^4+1}{3z^2-10z+3}\right)'\Bigg|_{z=0} + \left(\frac{z^4+1}{3z^2(z-3)}\right)\Bigg|_{z=1/3}\right)$$

$$= -\pi\left(\left(\frac{4z^3(3z^2-10z+3)-(z^4+1)(6z-10)}{(3z^2-10z+3)^2}\right)\Bigg|_{z=0} + \frac{1+3^4}{9(1-9)}\right)$$

$$= -\pi\left(\frac{10}{9} - \frac{82}{8\cdot 9}\right) = \frac{\pi}{36}.$$

In diesem Beispiel ist R^* holomorph in $\overline{I}\left(K_1(0)\right)$ bis auf $z_1 = 0$ (doppelter Pol) und $z_2 = 1/3$ (einfacher Pol).

15.5.3 Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuensatzes

Sei $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Originalfunktion gemäß Definition 11-2 (vgl. S. 11-2), d.h. f ist stückweise stetig in jedem abgeschlossenen Teilintervall $[0,b] \subset [0,\infty)$ und wachse für $t \to \infty$ höchstens exponentiell, d.h. $|f(t)| \le Me^{\sigma t}$ $\forall t \ge t_0$ mit $\sigma \ge 0, M > 0$.

Dann existiert die Laplace-Transformierte $F = \mathcal{L}\{f\}$ von f mit

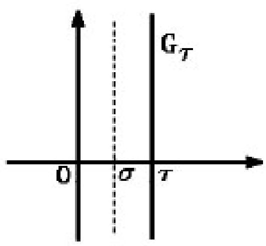
$$F(z) = \mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt, \ \operatorname{Re} z > \sigma.$$

Ist nun F gegeben, so ist $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ die inverse Laplace-Transformierte von F. f ist bis auf die Sprungstellen eindeutig bestimmt. Unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion F kann $f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$ mit Hilfe des Residuensatzes berechnet werden. Zunächst zeigen wir folgende komplexe Umkehrformel.

Satz 15-52: (*Komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation*)

Es sei $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ Originalfunktion und F deren Laplace-Transformierte. Ist f zusätzlich stückweise glatt, so gilt $\forall t \ge 0$ für die f stetig ist

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{G_\tau} F(z)e^{zt}dz, \ \ \tau > \sigma$$



Hierbei ist G_τ die Gerade $G_\tau = \{z = \tau + jy : \ y \in \mathbb{R}\}$.

Für gewisse Funktionen F lässt sich das Integral $\int_{G_\tau} F(z)e^{zt}dz$ mit Hilfe des Residuensatzes berechnen, s. folgenden Satz.

Satz 15-53: (*Inverse Laplace-Transformation*)

Es sei F die Laplace-Transformierte einer stückweise glatten Originalfunktion f. Ferner sei F holomorph auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme endlich vieler isolierter Singularitäten $z_1, z_2, ..., z_n$ mit $\operatorname{Re}(z_k) < \tau$ und $\tau > \sigma$, und es gelte $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0.$ Dann gilt für die inverse Laplace-Transformierte

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(F(z)e^{zt}, z_k\right)$$

in allen Stetigkeitsstellen von f. An den Sprungstellen wird jeweils der Mittelwert $\left(f(t_0+) + f(t_0-)\right)/2$ angenommen.

Beispiel:

1) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(z)\}(t) = ?$ für $F(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+5}$

$F(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-1 \pm 2j\}$ und $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$

$$\Rightarrow f(t) = \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+5}, -1+2j\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2+2z+5}, -1-2j\right)$$

$$= \left(\frac{e^{zt}}{2z+2}\right)\Bigg|_{z=-1+2j} + \left(\frac{e^{zt}}{2z+2}\right)\Bigg|_{z=-1-2j}$$

$$= \frac{e^{-t}e^{2jt}}{4j} + \frac{e^{-t}e^{-2jt}}{-4j} = \frac{1}{2}e^{-t}\sin t$$

f ist Originalfunktion und glatt auf $[0, \infty)$. Also gilt

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2+2z+5}\right\}(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t.$$

2) Gegeben sei die DGL $y'' + 5y' + 4y = t$, $y(0) = y'(0) = 0.$ Anwendung der Laplace-Transformation liefert

$$\mathcal{L}\{y''\} + 5\mathcal{L}\{y'\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$\Rightarrow \left(z^2\mathcal{L}\{y\} - zy(0+) - y'(0+)\right) + 5\left(z\mathcal{L}\{y\} - y(0+)\right) + 4\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{z^2}.$$

da $y(0) = y'(0) = 0$

$$\Rightarrow (z^2 + 5z + 4)\mathcal{L}(y) = \frac{1}{z^2} \Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{z^2(z^2 + 5z + 4)} = F(z)$$

$F(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -4\}$ und $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{z^2(z^2 + 5z + 4)}\right\}(t)$$

$$= \operatorname{Res}\left(\frac{e^{zt}}{z^2(z+1)(z+4)}, 0\right) + \operatorname{Res}(\ldots, -1) + \operatorname{Res}(\ldots, -4)$$

$$= \left.\left(\frac{e^{zt}}{z^2 + 5z + 4}\right)'\right|_{z=0} + \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{-4t}}{16(-3)}$$

$$= \left.\left(\frac{t(z^2 + 5z + 4) - (2z + 5)}{(z^2 + 5z + 4)^2} e^{zt}\right)\right|_{z=0} + \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-4t}$$

y ist Originalfunktion und glatt auf $[0, \infty)$. Also gilt

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{48}e^{-4t} + \frac{1}{4}t - \frac{5}{16} \quad \text{ist die gesuchte Lösung.}$$

Bei der Berechnung der inversen Laplace-Transformation müssen häufig die Residuen für z_0 und z_0^* (z.B. konjugiert komplexe Pole, vgl. Beispiel 1, S. 15-(a-3)) berechnet werden. Unter gewissen Voraussetzungen an die Funktion f kann hierbei die Aussage des folgenden Satzes benutzt werden.

Satz 15-54:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet und $G' = \{z \in \mathbb{C}:\ z^* \in G\}$ das Spiegelbild von G an der reellen Achse. Ferner sei f bis auf $z_0 \in G$ und $z_0^* \in G'$ holomorph auf G und G', dann gilt

$$f(z^*) = f^*(z) \ \ \forall z \in G \setminus \{z_0\} \Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0^*) = \left(\operatorname{Res}(f, z_0)\right)^*$$

Beispiel:

$f(z)=\dfrac{p(z)}{q(z)}e^{zt},\;\; p,q$ Polynome mit reellen Koeffizienten

$\Rightarrow\;\; p(z^*)=p^*(z),\;\; q(z^*)=q^*(z)$ und

$$e^{z^*t}=e^{(x-jy)t}=e^{xt}e^{-iyt}=(e^{xt})^*(e^{iyt})^*=(e^{zt})^*\quad \forall z\in\mathbb{C}$$

$\Rightarrow\;\; f(z^*)=f^*(z),\;\; \forall z\in\mathbb{C}$ bis auf die Singularitäten z_k.

Also gilt bei der Berechnung der inversen Laplace-Transformation von reellen rationalen Funktionen die Eigenschaft

$$\operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{zt},z_k^*\right)=\left(\operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{zt},z_k\right)\right)^*.$$

Somit gilt für das Beispiel 1 auf S. 15-(a-4))

$$\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{zt}}{z^2+2z+5},-1+2j\right\}=\frac{e^{-t}e^{j2t}}{4j}\Rightarrow\operatorname{Res}\left\{\frac{e^{zt}}{z^2+2z+5},-1-2j\right\}=\frac{e^{-t}e^{-j2t}}{-4j}.$$

Anmerkung: (*Abzählbar unendlich viele isolierte Singularitäten*)

Satz 15-53 (Berechnung der inversen Laplace-Transformation mit Hilfe des Residuensatzes) gilt auch noch, wenn F abzählbar unendlich viele isolierte Singularitäten z_k mit $\operatorname{Re}(z_k)<\tau$ besitzt und F zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 15-53 die Eigenschaften

$$|F(z)|\le\frac{M}{r_n^k}\quad\forall z\in K_{r_n}(0)\;\text{ mit }\; k>0$$

und M unabhängig von n erfüllt. Hierbei sei $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge von Radien mit $r_n\to\infty$ und F habe keine Singularitäten auf K_{r_n}. In diesem Fall gilt

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Res}\left(F(z)e^{zt},z_k\right)$$

in allen Stetigkeitsstellen von f.