HSB
Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Höhere Mathematik 4

Kapitel 17

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

INSTITUTE OF WATERACOUSTICS, SONAR ENGINEERING AND SIGNAL THEORY
iWSS
HOCHSCHULE BREMEN

Höhere Mathematik 4

Kapitel 17

Inhaltsverzeichnis

17. Wahrscheinlichkeitsrechnung

17.1 Definitionen, Beispiele

Definition 17-1:

Ein Versuch der beliebig oft wiederholbar und dessen Ergebnis ungewiss ist, heißt Zufallsexperiment.

Die Menge der bei einem Zufallsexperiment potentiell möglichen Ergebnisse heißt Ergebnisraum (Merkmalsraum, Stichprobenraum) Ω, seine Elemente $\omega \in \Omega$ Ergebnisse.

Teilmengen E von Ω heißen Ereignisse. Ein Ereignis $E \subset \Omega$ tritt ein, wenn eines der Ergebnisse eintritt aus denen E besteht. Die einelementigen Teilmengen $\{\omega\}$ heißen Elementarereignis.

Die Menge Ω heißt sicheres Ereignis, die leere Menge $\varnothing$ unmögliches Ereignis.

Definition 17-2:

1) Für $E_i \subset \Omega$ $i = 1,2,\ldots,n$ (endlich viele Ereignisse) bzw. $i = 1,2,\ldots$ (abzählbar unendlich viele Ereignisse) heißt

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \quad \text{bzw.} \quad E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

die Summe der Ereignisse, d.h. E tritt genau dann ein, wenn mindestens eines der endlich bzw. abzählbar unendlich vielen Ereignisse E_i eintritt.

2) Für $E_i \subset \Omega$ $i = 1,2,\ldots,n$ (endlich viele Ereignisse) bzw. $i = 1,2,\ldots$ (abzählbar unendlich viele Ereignisse) heißt

$$E = \bigcap_{i=1}^{n} E_i \quad \text{bzw.} \quad E = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i$$

das Produkt der Ereignisse, d.h. E tritt genau dann ein, wenn alle der endlich bzw. abzählbar unendlich vielen Ereignisse E_i eintreten.

3) Zwei Ereignisse E_1 und E_2 heißen unvereinbar, wenn $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ gilt, d.h. wenn ihr gleichzeitiges Eintreten unmöglich ist.

4) Das Ereignis $\overline{E} = \Omega \setminus E$ heißt das zu E komplementäre Ereignis, d.h. $\overline{E}$ tritt genau dann ein, wenn E nicht eintritt.

Definition 17-3:

Ein System S von Ereignissen heißt Ereignisfeld (Mengenalgebra, σ-Algebra), wenn es alle möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiments enthält, insbesondere auch die Vereinigung und den Durchschnitt von Ereignissen sowie Ω und $\varnothing$. ($S \subset \mathcal{P}(\Omega)$, der Potenzmenge von Ω)

Beispiel:

1) Werfen eines fairen Würfels

   Ereignisraum: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

   Elementarereignis: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$

   andere Ereignisse z.B.: $E = \{2,4,6\} = \{2\} \cup \{4\} \cup \{6\}$ (gerade Zahl)

2) Würfeln mit zwei fairen Würfeln

   Ereignisraum: $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$

   Sei $E_1 = \{(1,6),(2,6),\ldots,(6,6)\}$ bzw. $E_2 = \{(6,1),(6,2),\ldots,(6,6)\}$ das Ereignis, dass mit dem einen bzw. dem anderen Würfel eine 6 geworfen wird. Dann bedeutet das Ereignis $E = E_1 \cap E_2 = \{(6,6)\}$, dass mit beiden Würfel eine 6 geworfen wird.

3) Münzwurf

   E_1 : Zahl liegt oben

   E_2 : Wappen liegt oben

   $E_1 \cup E_2$: Zahl oder Wappen liegen oben

   $E_1 \cap E_2$: Weder Zahl noch Wappen liegen oben

   Ereignisfeld: $S = \{E_1, E_2, \Omega = E_1 \cup E_2, \varnothing = E_1 \cap E_2)$
   bildet das Ereignisfeld des Zufallsexperiments

Definition 17-4:

Ist bei n Wiederholungen eines Zufallsexperiments ein Ereignis E genau $h_n(E)$-mal eingetreten, dann wird $h_n(E)$ als absolute Häufigkeit und

$$H_n(E) = \frac{h_n(E)}{n}$$

als relative Häufigkeit des Ereignisses E in n Versuchen bezeichnet.

Offenbar gilt:

a) $0 \le H_n(E) \le 1$

b) $H_n(\Omega) = 1$

c) $H_n(E_1 \cup E_2) = H_n(E_1) + H_n(E_2)$, falls $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (disjunkt)

Die Erfahrung zeigt, dass sich $H_n(E)$ bei wachsendem n im allgemeinen bei einem festen Wert einpendelt, der charakteristisch für E ist.

Beispiel:

Münzwurf E_1 Zahl liegt oben, E_2 Wappen liegt oben

Liegt nun bei n Würfen $h_n(E_2)$-mal Wappen oben, so ist

$$H_n(E_2)=\frac{h_n(E_2)}{n}, \quad H_n(E_1)=\frac{h_n(E_1)}{n}=\frac{n-h_n(E_2)}{n}=1-\frac{h_n(E_2)}{n}=1-H_n(E_2)$$

Die Erfahrung lehrt hier (empirisches Gesetz der großen Zahlen)

$$H_n(E_2) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}.$$

Der Wert, bei dem sich $H_n(E)$ "einpendelt", liefert gewissermaßen ein Maß für die "Zufälligkeit" des Ereignisses E, eben die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von E. Der Versuch, die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit zu definieren, ist jedoch gescheitert. Stattdessen hat sich die axiomatische Vorgehensweise, die gewisse Grundeigenschaften relativer Häufigkeiten erfüllen, durchgesetzt.

Definition 17-5: (*Axiome von Kolmogorow*)
Es sei S ein Ereignisfeld. Eine Abbildung $P: S \to \mathbb{R}$ mit

1) $0 \le P(E) \le 1$ für $E \in S$
2) $P(\Omega) = 1$ für das sichere Ereignis Ω
3) Für paarweise unvereinbare Ereignisse E_i $i = 1,2,\ldots$, d.h.
   $E_i \cap E_j = \varnothing$ für $i \ne j$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

heißt Wahrscheinlichkeit.

Satz 17-1:

1) $P(\varnothing) = 0$
2) Für $\overline{E} = \Omega \setminus E$ gilt: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$
3) Für $E_1, E_2 \in S$ gilt $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Beweis:

1) $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 + P(\varnothing) \Rightarrow P(\varnothing) = 0$, da
   Ω und $\varnothing$ unvereinbar.
2) $1 = P(\Omega) = P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E}) \Rightarrow P(\overline{E}) = 1 - P(E)$, da
   E und $\overline{E}$ unvereinbar.
3) Sind E_1, E_2 unvereinbar, so ist $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, also ist die Behauptung gerade Forderung 3) in Definition 17-5.
   Für $E_1 \cap E_2 \ne \varnothing$ gilt
   $E_1 \cup E_2 = (E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)) \cup E_2$, wobei $(E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)) \cap E_2 = \varnothing$
   $E_1 = (E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)) \cup (E_1 \cap E_2)$, wobei $(E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)) \cap (E_1 \cap E_2) = \varnothing$
   Hieraus folgt
   $$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)) + P(E_2) + P(E_1 \cap E_2) \\ &= P((E_1 \setminus (E_1 \cap E_2)) \cup (E_1 \cap E_2)) + P(E_2) = P(E_1) + P(E_2) \end{aligned}$$
   $\Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

Satz 17-2:
Ist der Ereignisraum endlich, d.h. $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_n\}$, und ist das Auftreten der endlich vielen Elementarereignisse $\{\omega_i\}$ gleichwahrscheinlich (Laplace-Zufallsexperiment), so gilt für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ eines Ereignisses $E \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der Elementarereignisse in } E}{\text{Anzahl der Elementarereignisse}},$$

wobei $|E|$ und $|\Omega|$ die Mächtigkeit der Mengen E bzw. Ω angibt.

Beweis:

$$P(E) = \sum_{\omega_i \in E} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega_i \in E} P(\{\omega_1\})$$

$$= P(\{\omega_1\}) \cdot |E| = \frac{|E|}{|\Omega|}, \quad \text{da} \quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} \;\text{ für }\; i = 1,\ldots,n$$

Beispiel:
Das Werfen eines fairen Würfels ist ein Beispiel für ein Laplace-Experiment.
Es sei $\Omega = \{\omega_1,\ldots,\omega_6\}$ mit $\{\omega_i\} = \{i\}$ für $i = 1,\ldots,6$, und $P(\{\omega_i\})=1/6$.
$E_1 = \{2,4,6\}$ tritt ein, wenn Ergebnis des Wurfes gerade ist

$$P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{|\{2,4,6\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$E_2 = \{2,3,4,5,6\}$ tritt ein, wenn Ergebnis des Wurfes keine 1

$$\overline{E}_2 = \Omega \setminus E_2 = \{1\}, \quad P(\overline{E}_2) = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad P(E_2) = 1 - P(\overline{E}_2) = \frac{5}{6}$$

$E = E_1 \cup E_2$ mit $E_1 = \{2,4,6\}$, $E_2 = \{1,6\}$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= P(\{2,4,6\}) + P(\{1,6\}) - P(\{6\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

17.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten, unabhängige Ereignisse

Definition 17-6:

Es seien $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$ mit $P(E_2) > 0$. Dann heißt

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E_1 unter der Bedingung des Ereignisses E_2.

Beispiel: (*bedingte Wahrscheinlichkeit*)

Zwei Karten werden nacheinander aus einem Skatspiel gezogen.
E_2 sei das Ereignis: "1te Karte ein As",
E_1 sei das Ereignis: "2te Karte ein As".
$P(E_1|E_2)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die 2te Karte ein As ist, wenn auch schon die 1te Karte ein As war. Es gilt

$$P(E_2) = \frac{4}{32},\; P(E_1 \mid E_2) = \frac{3}{31} \;\Rightarrow\; P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \mid E_2)P(E_2) = \frac{3}{31} \cdot \frac{4}{32}$$

Anmerkung:

Im allgemeinen sind die Wahrscheinlichkeiten $P(E_1|E_2)$ und $P(E_2|E_1)$ voneinander verschieden. Aufgrund der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit besteht zwischen beiden die Beziehung

$$P(E_1 \mid E_2)P(E_2) = P(E_2 \mid E_1)P(E_1).$$

Definition 17-7:

Zwei Ereignisse $E_1, E_2 \in \mathcal{S}$ heißen voneinander unabhängig, wenn

$$P(E_1 \mid E_2) = P(E_1)$$

gilt.

Definition 17-8:

n Ereignisse $E_1,\ldots,E_n \in \mathcal{S}$ heißen

1) vollständig unabhängig, wenn für jedes m-Tupel $(i_1,\ldots, i_m)$ mit $1 \le i_1 < \ldots < i_m \le n$ gilt

$$P(E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_m}) = P(E_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(E_{i_m}) \quad \text{mit} \quad m = 2, \ldots, n$$

2) paarweise unabhängig, wenn für beliebige i, j mit $i \neq j$ E_i und E_j unabhängig sind

Anmerkung:
Aus der vollständigen Unabhängigkeit folgt die paarweise, nicht umgekehrt, z.B. für $n = 3$

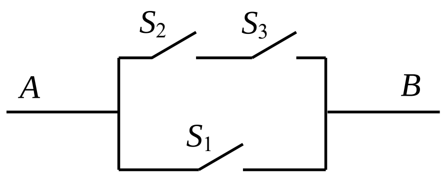
$E_1, E_2, E_3 \in S$ paarweise unabhängig, wenn

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2),$$
$$P(E_1 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_3),$$
$$P(E_2 \cap E_3) = P(E_2) \cdot P(E_3)$$

$E_1, E_2, E_3 \in S$ vollständig unabhängig, wenn außerdem noch gilt

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3)$$

Beispiel: (*unabhängige Ereignisse*)
Die Schalter S_i seien unabhängig voneinander offen oder geschlossen mit der Wahrscheinlichkeit $P(S_i \text{ geschlossen}) = p_i$.



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Strom von A nach B fließt?

E_i bedeute: "S_i ist geschlossen",

E bedeute: "Strom fließt von A nach B"

$\Rightarrow$ $E = E_1 \cup (E_2 \cap E_3)$

$$\begin{aligned}\Rightarrow P(E) &= P(E_1 \cup (E_2 \cap E_3)) \\ &= P(E_1) + P(E_2 \cap E_3) - P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ &= P(E_1) + P(E_2) \cdot P(E_3) - P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) \\ &= p_1 + p_2 p_3 - p_1 p_2 p_3\end{aligned}$$

(da alle Ereignisse unabhängig sind).

Damit n Ereignisse

a) paarweise unabhängig sind, müssen n über 2 Bedingungen

b) vollständig unabhängig sind, müssen $2^n - n - 1$ Bedingungen

erfüllt sein.

Beim "Abzählen" der Möglichkeiten wurden die folgenden Aussagen benutzt, die auch bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten Anwendung finden.

Definition 17-9: (*Permutationen*)
Eine Permutation von n unterscheidbaren Elementen ist jede Zusammenstellung, in der die n Elemente in irgendeiner Anordnung nebeneinander stehen. Unterschiedliche Anordnungen der n Elemente bedeuten stets verschiedene Permutationen.

Jede Anordnung von k unterscheidbaren Elementen, von denen das i-te Element n_i-mal auftritt, $i = 1,2,\ldots,k$ heißt Permutation mit Wiederholung. Die Anzahl der Elemente in der Permutation ist dann $n = n_1 + \ldots + n_k$.

Satz 17-3:

1) Die Anzahl der Permutationen von n unterscheidbaren Elementen ist

$$P_n = n!$$

2) Die Anzahl der Permutationen von k unterscheidbaren Elementen, von denen das i-te Element n_i-mal auftritt, $i = 1,2,\ldots,k$, ist

$$P_n^{(n_1,\ldots n_k)} = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Definition 17-10: (*Variationen*)
Eine Variation von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse ($k \leq n$) ist jede aus k Elementen bestehende Zusammenstellung, die sich aus den n Elementen unter Berücksichtigung der Anordnung bilden lässt.

Variationen von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse, bei denen sich die einzelnen Elemente bis zu k-mal wiederholen, heißen Variationen mit Wiederholung.

Satz 17-4

1) Die Anzahl der Variationen von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse ist

$$V_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2) Die Anzahl der Variationen von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholungen ist

$$V_{W,n}^{(k)} = n^k$$

Definition 17-11: (*Kombinationen*)

Eine Kombination von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse ($k \leq n$) ist jede aus k Elementen bestehende Zusammenstellung, die sich aus den n Elementen ohne Berücksichtigung der Anordnung bilden lässt.

Kombinationen von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse, bei denen sich die einzelnen Elemente bis zu k-mal wiederholen, heißen Kombinationen mit Wiederholung.

Satz 17-5

1) Die Anzahl der Kombinationen von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse ist

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2) Die Anzahl der Kombinationen von n unterscheidbaren Elementen zur k-ten Klasse mit Wiederholungen ist

$$C_{W,n}^{(k)} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Beispiel:

1) Zwei faire Würfel werden geworfen. Berechne $P(E_1)$, $P(E_2)$ und $P(E_3|E_4)$, wobei
E_1 eintritt, wenn Augensumme = 2,
E_2 eintritt, wenn Augensumme = 5,
E_3 eintritt, wenn Augensumme $\geq$ 10,
E_4 eintritt, wenn Augensumme gerade.

$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$ mit $|\Omega| = 6^2=36$

$$\Rightarrow P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36} \quad i = 1,\ldots,36 \quad \text{(gleichwahrscheinlich)}$$

$$E_1 = \{(1,1)\} \text{ mit } |E_1| = 1 \quad \Rightarrow P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$$

$$E_2 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} \text{ mit } |E_2| = 4 \quad \Rightarrow P(E_2) = \frac{|E_2|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Ist E_4 eingetreten, so gibt es für E_3 18 mögliche Elementarereignisse, davon sind 4 für E_3 günstig, d.h.

$$P(E_3 \mid E_4) = \frac{P(E_3 \cap E_4)}{P(E_4)} = \frac{|E_3 \cap E_4| / |\Omega|}{|E_4| / |\Omega|} = \frac{|E_3 \cap E_4|}{|E_4|} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

2) Ein Schütze gibt auf eine Zielscheibe drei unabhängige Schüsse ab mit der jeweiligen Trefferwahrscheinlichkeit 1/2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er insgesamt mindestens 2 Treffer erzielt?

$\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),\ldots,(1,1,1)\}$ mit $|\Omega| = 2^3=8$,
wobei die "0" keinen Treffer und "1" einen Treffer kennzeichnet.

E tritt ein, wenn Schütze mindestens 2 Treffer erzielt, d.h.
$E = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$ mit $|E| = 4$

$$\Rightarrow P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

17.3 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Bisher haben wir den Ausgang eines Zufallsexperiments (Zufallsereignis) verbal beschrieben. Im folgenden wollen wir ein Zufallsereignis mathematisch mit Hilfe einer Variablen, die verschiedene Werte annehmen kann, beschreiben.

Definition 17-12:

Eine Zufallsvariable X ist eine Abbildung $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ die mit der Eigenschaft, dass für jedes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Teilmenge $E = \{\omega \in \Omega : X(\{\omega\}) \in I\}$ von Ω zum Ereignisfeld $\mathcal{S}$ gehört.

Beispiel:

1) Werfen einer Münze

   E_1 tritt ein, wenn Wappen oben, E_2 tritt ein, wenn Zahl oben
   Zufallsvariable $X(E_1) = 1,\ X(E_2) = 0$

2) Zwei Würfel werden geworfen

   Ereignisraum: $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$

   Zufallsvariable X sei definiert als die Augensumme, z.B.

   $X(\{(2,5)\}) = \{7\},\ X(\{(3,4)\}) = \{7\},\ X(\{(1,1),(2,4),(4,6)\}) = \{2,6,10\}$.

   Ereignisraum für X: $\Omega_X = \{2,3,4,\ldots,12\}$

   In diesem Ereignisraum sind die Elementarereignisse nicht mehr gleichwahrscheinlich, denn für $A \subset \Omega_X$ muss gelten

   $$P_X(A) = P(\{\omega \in \Omega : X(\{\omega\}) \in A\}) \qquad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega_X)$$

   z.B. $P_X(\{2\}) = P(\{(1,1)\}) = 1/36,$

   $P_X(\{3\}) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = 1/18,$ usw.

Einem Zufallsereignis $E \in \mathcal{S}$ wurde seine Wahrscheinlichkeit $P(E)$ zugeordnet. E wird nun vermöge $X(E)$ durch eine Zufallsvariable beschrieben. Ordnet man jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit dafür zu, dass die zur Beschreibung des Experiments eingeführte Zufallsvariable zu dieser Menge gehört, so liefert diese wahrscheinlichkeitstheoretische Charakterisierung der Zufallsvariablen eine sinnvolle Modellierung des Experiments.

<u>Definition 17-13:</u>
Es sei X eine Zufallsvariable. Dann heißt

$$F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad F_X(x) = P_X((-\infty, x])$$
$$= P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)$$

Verteilungsfunktion (Wahrscheinlichkeitsverteilung) von X.

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 \leq x_2$ und

$$E = \{\omega \in \Omega : X(\{\omega\}) \leq x_1\},$$
$$F = \{\omega \in \Omega : X(\{\omega\}) \leq x_2\},$$
$$G = \{\omega \in \Omega : x_1 < X(\{\omega\}) \leq x_2\} \quad \text{mit} \quad E, F, G \in S$$

dann gilt

$$P(F) = P(E \cup G) = P(E) + P(G), \quad \text{da} \quad E \cap G = \varnothing$$
$$\Rightarrow P(G) = P(F) - P(E)$$
$$\Rightarrow P(x_1 < X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F_X(x_2) - F_X(x_1).$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit eindeutig durch die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ bestimmt.

<u>Satz 17-6:</u> (*Eigenschaften der Verteilungsfunktion*)
Ist $F_X(x)$ Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X, so gilt

1) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$
2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
3) $F_X(x)$ ist eine monotone nichtfallende Funktion, d.h.
   $F_X(x+h) \geq F_X(x)$ für jedes $h \geq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$
4) $F_X(x)$ ist rechtseitig stetig, d.h.
   $\lim_{h \to 0+} F_X(x+h) = F_X(x)$

Definition 17-14:
Eine Zufallsvariable X heißt diskret, wenn sie nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen kann.

Eine diskret verteilte Zufallsvariable wird durch ihre möglichen Werte x_i und die Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X = x_i)$ (Zähldichte) gekennzeichnet, wobei $\Sigma_i\, p_i = 1$ sein muss. Für die Verteilungsfunktion gilt

$$F_X(x) = \sum_{x_i \le x} p_i \quad \text{(Treppenfunktion).}$$

Beispiel:
Drei unabhängige Schüsse auf eine Scheibe mit der jeweiligen Trefferwahrscheinlichkeit 1/2. Es sei X ein Modell für die zufällige Trefferzahl nach drei Schüssen.

Mögliche Werte von X: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$

$p_1 = \frac{1}{8}, \quad p_2 = \frac{3}{8}, \quad p_3 = \frac{3}{8}, \quad p_4 = \frac{1}{8}$ (vgl. Beispiel auf S.16-20)

Somit ergibt sich die Verteilungsfunktion zu

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.125 & 0 \le x < 1 \\ 0.5 & 1 \le x < 2 \\ 0.875 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x \end{cases}$$

Definition 17-15:
Eine Zufallsvariable X heißt stetig, wenn es eine integrierbare Funktion $f_X(x)$ gibt, so dass sich die Verteilungsfunktion für $x \in \mathbb{R}$ in der Form

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\, dx'$$

darstellen lässt. $f_X(x)$ heißt dann Dichtefunktion von X.

Anmerkung:

Die Dichtefunktion ist eine nichtnegative Funktion, d.h. $f_X(x) \geq 0$, die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ ist stetig, und es gilt $F_X'(x) = f_X(x)$ für alle Stetigkeitsstellen x von $f_X(x)$.

Es folgt

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$$

und damit

$$P(-\infty < X \leq \infty) = F_X(\infty) - F_X(-\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1.$$

Bei einer stetigen Zufallvariablen gilt

$$P(X = x) = 0 \quad \text{da} \quad P(X = x) = \lim_{h\to 0} P(x < X \leq x+h)$$
$$= \lim_{h\to 0} \int_{x}^{x+h} f_X(x')\,dx' = 0$$

17.4 Erwartungswert und Varianz

Wichtige Informationen über eine Verteilung, wenn auch in der Regel keine vollständige Beschreibung, liefern bestimme Kennwerte (Verteilungsparameter).

Definition 17-16:

1) Ist X eine diskrete Zufallsvariable mit den Werten x_i und der Zähldichte p_i, dann heißt

$$\mathrm{E}(X) = \sum_i x_i p_i \quad \text{Erwartungswert von } X\text{, falls} \quad \sum_i |x_i| p_i < \infty.$$

2) Ist X eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion f_x, dann heißt

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\,dx \quad \text{Erwartungswert von } X\text{, falls} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f_X(x)\,dx < \infty.$$

Definition 17-17:
Ist X eine Zufallsvariable, dann heißt

1) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left(\left(X - \mathrm{E}(X)\right)^2\right)$ Varianz von X,

2) $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ Standardabweichung von X,

wenn der angegebene Erwartungswert existiert.

Im diskreten Fall berechnet sich $\mathrm{Var}(X)$ gemäß

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_j (x_j - \mathrm{E}(X))^2\, p_j = \sum_j \left(x_j - \sum_i x_i\, p_i \right)^2 p_j .$$

Im stetigen Fall erhält man entsprechend

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mathrm{E}(X)\right)^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \int_{-\infty}^{\infty} x'\, f_X(x')\,dx' \right)^2 f_X(x)\,dx.$$

Beispiel:
Drei unabhängige Schüsse auf eine Scheibe mit der jeweiligen Trefferwahrscheinlichkeit 1/2. Es sei X ein Modell für die zufällige Trefferzahl nach 3 Schüssen. Mögliche Werte von X sind $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3$ mit

$$p_1 = \frac{1}{8},\quad p_2 = \frac{3}{8},\quad p_3 = \frac{3}{8},\quad p_4 = \frac{1}{8}$$ (vgl. Beispiel auf S.16-25).

Für den Erwartungswert erhält man

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, p_i = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

und für die Varianz

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{4} \left(x_j - \sum_{i=1}^{4} x_i\, p_i \right)^2 p_j = \sum_{j=1}^{4} \left(x_j - \frac{3}{2} \right)^2 p_j$$

$$= \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

Besitzt eine Zufallsvariable X den Erwartungswert $\mathrm{E}(X) = \mu$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 \neq 0$, so lässt sich X mittels

$$Y = g(X) = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

eine standardisierte Zufallsvariable Y zuordnen, für deren Erwartungswert

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}\big(g(X)\big) = \mathrm{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathrm{E}(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}\big(\mathrm{E}(X) - \mu\big) = 0$$

und deren Varianz

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}\Big(\big(Y - \mathrm{E}(Y)\big)^2\Big) = \mathrm{E}\big(Y^2\big) - \big(\mathrm{E}(Y)\big)^2 = \mathrm{E}\big(Y^2\big) \\ &= \mathrm{E}\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{E}\big((X-\mu)^2\big) = \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{Var}(X) = 1\end{aligned}$$

gilt.

17.5 Beispiele für Verteilungsfunktionen

17.5.1 Null-Eins-Verteilung

Zufallsvariablen mit einer Null-Eins-Verteilung eignen sich zur Modellierung von Zufallsexperimenten mit nur zwei möglichen Ergebnissen (Bernoulli-Experimenten), z.B. beim Werfen einer Münze.

$$\text{Zufallsvariable:} \qquad X = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt} \\ 0 & \text{falls } \overline{A} \text{ eintritt} \end{cases}$$

Besitzt das Ereignis A die Wahrscheinlich p, so gilt

$$P(X = 1) = p, \qquad P(X = 0) = 1 - p.$$

Der Erwartungswert einer Null-Eins-verteilten Zufallsvariablen X lautet

$$\mathrm{E}(X) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p.$$

Für die Varianz von X erhält man

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = p - p^2 = p\,(1 - p).$$

17.5.2 Binomialverteilung

Wir führen $i = 1,\ldots,n$ voneinander unabhängige Bernoulli-Experimente durch und setzen voraus, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A bei jedem Experiment gleich ist, d.h. $P(A) = p$ mit $0 < p < 1$.

Ausgehend von diesem Experimentierschema untersuchen wir die Zufallsvariablen

$X_n =$ zufällige Anzahl der Experimente, von insgesamt n Experimenten, bei denen A eintritt

Die Zufallsvariable X_n besitzt den Wertebereich $\{0,1,\ldots,n\}$. Für beliebige n $(n = 1,2,\ldots)$ und p $(0 < p < 1)$ ergibt sich die Zähldichte von X_n zu

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

und die Verteilungsfunktion zu

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \le x) = \sum_{0 \le k \le x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Offensichtlich gilt

$$F_{X_n}(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \big(p + (1-p)\big)^n = 1.$$

Für den Erwartungswert und die Varianz erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}\, p \\ &= n\,p \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1} = n\,p \end{aligned}$$

und

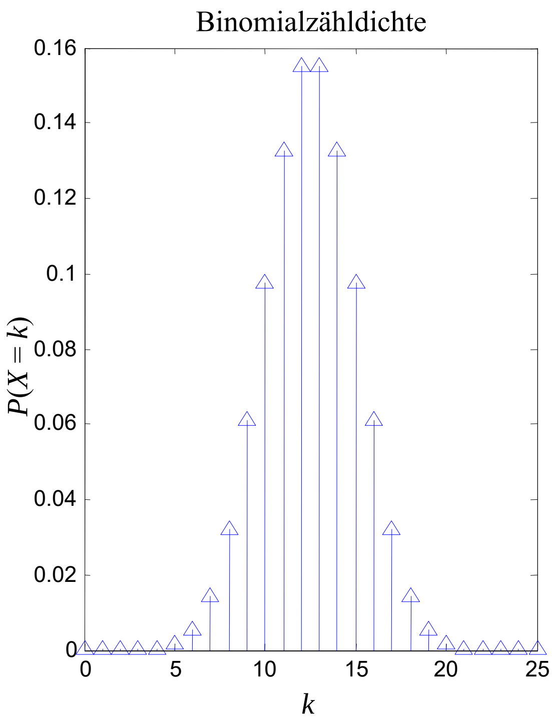
$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathrm{E}(X_n^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - n^2 p^2$$

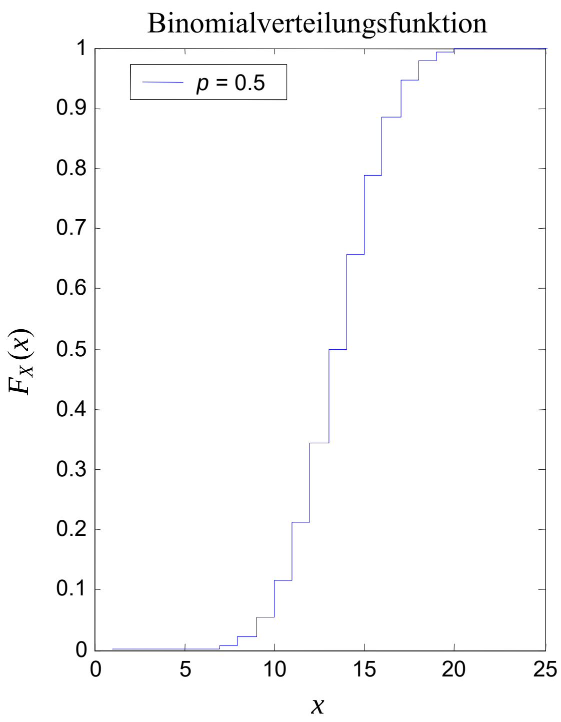
$$= \sum_{k=1}^{n} k\, n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)}\, p - n^2 p^2$$

$$= n\, p \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} - n^2 p^2$$

$$= n\, p \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{\mathrm{E}(X_{n-1}+1)=(n-1)\,p+1} - n^2 p^2$$

$$= n\, p\,(np + 1 - p) - n^2 p^2 = n\, p\,(1-p)$$





17.5.3 Poisson-Verteilung

Ist X binomialverteilt mit n und p, und ist n groß und p klein mit $np \approx \alpha > 0$, so kann die Binomialverteilung näherungsweise durch die Poisson-Verteilung ersetzt werden.

Aus $n \to \infty,\ p_n \to 0,\ n\,p_n \to \alpha$ folgt

$$P(X = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

denn

$$\binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \underbrace{\frac{(n\,p_n)^k}{k!}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha^k}{k!}} \cdot \underbrace{\frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-k+1}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\alpha}} \underbrace{\left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^{-k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}.$$

Die Verteilungsfunktion lautet

$$F_X(x) = \sum_{0 \le k \le x} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}$$

Für den Erwartungswert und die Varianz erhalten wir

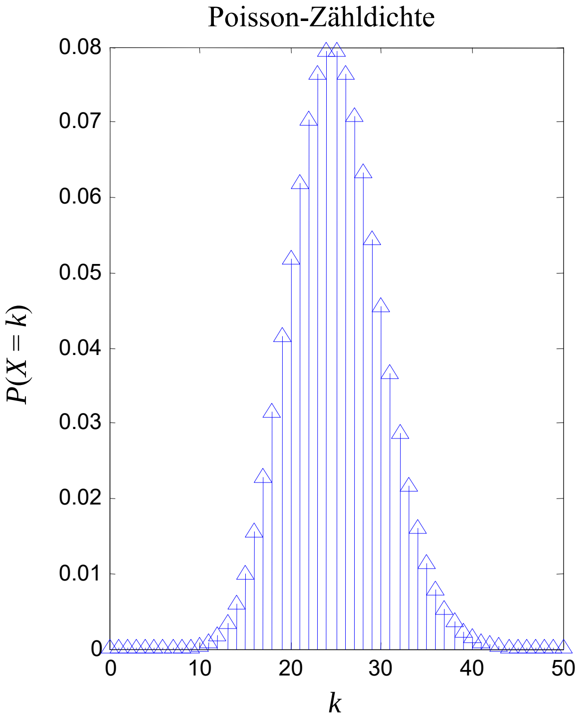
$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha\,\alpha^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha} = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\alpha} = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = \alpha$$

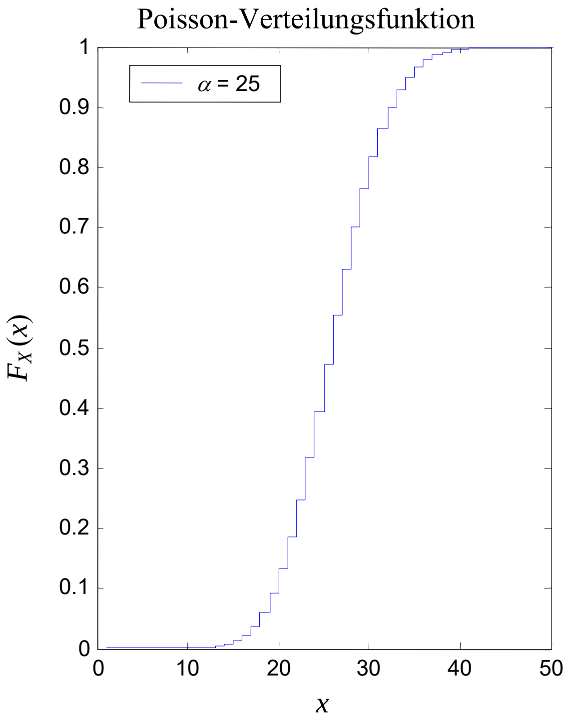
und

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} - \alpha^2 = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\alpha^k}{(k-1)!} e^{-\alpha} - \alpha^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha^{k+1}}{k!} e^{-\alpha} - \alpha^2 = \alpha \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}}_{\mathrm{E}(X+1) = \lambda + 1} - \alpha^2$$

$$= \alpha(\alpha+1) - \alpha^2 = \alpha$$





17.5.4 Hypergeometrische Verteilung

Werden aus einer Urne mit M schwarzen und $N - M$ roten Kugeln n Kugeln mit zurücklegen gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem Zug eine schwarze Kugel zu ziehen, immer $M/N = p$ und eine rote $(N - M)/N = 1 - p$. Die Wahrscheinlichkeit, dass von n gezogenen Kugeln k schwarz sind, bestimmt sich nach dem Modell der Binomialverteilung zu

$$P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Wird das gleiche Experiment ohne Zurücklegen durchgeführt, so ergibt sich dagegen

$$P(X_n = k) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglich Fälle}} = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Die Verteilungsfunktion lautet

$$F_{X_n}(x) = \sum_{0\le k\le x} P(X_n = k) = \sum_{0\le k\le x} \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n}.$$

Für den Erwartungswert und die Varianz erhalten wir

$$\mathrm{E}(X_n) = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} = n\frac{N}{M}$$

und

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X_n) &= \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} - \left(n\frac{N}{M}\right)^2 \\ &= n\,M\,\frac{1}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.\end{aligned}$$

17.5.5 Rechteckverteilung

Es gelte $a < b$. Eine stetige Zufallsvariable X mit der Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}\, 1_{[a,b]}(x)$$

heißt rechteckverteilt (gleichverteilt), wobei $1_M(x)$ die Indikatorfunktion der Menge $M \subset \mathbb{R}$ bezeichnet, d.h.

$$1_M(x) = \begin{cases} 1, & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion der rechteckverteilten Zufallsvariablen X kann wie folgt ausgedrückt werden.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,dx' = \frac{1}{b-a}\int_{-\infty}^{x} 1_{[a,b]}(x')\,dx' = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x \ge b \end{cases}$$

Für den Erwartungswert und die Varianz erhalten wir

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x\, dx$$

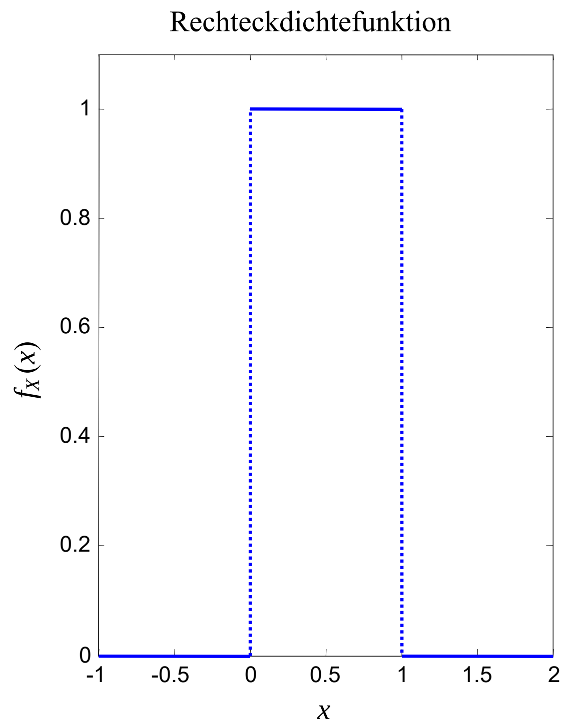
$$= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^2}{2} \right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

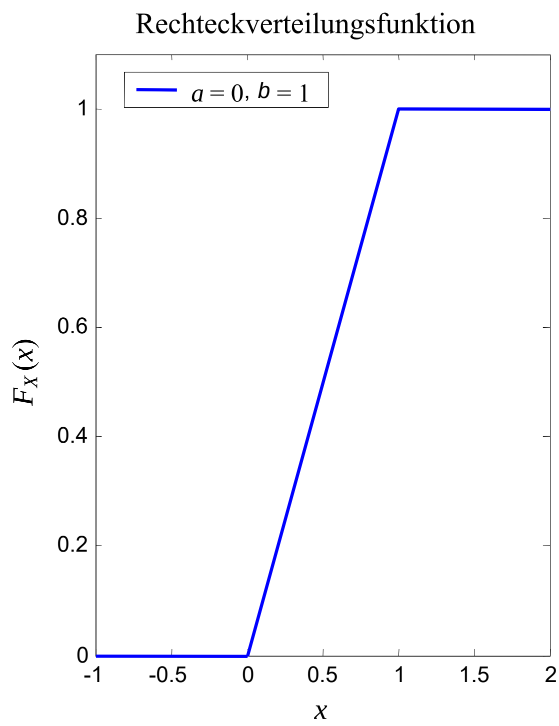
und

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \frac{(a+b)^2}{4}$$

$$= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Eine rechteckverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathcal{R}(-\pi,\pi)$ wird häufig zur Modellierung der zufälligen Nullphase eines Sinussignals verwendet.





17.5.6 Exponentialverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X besitzt eine Exponentialverteilung, wenn ihre Dichtefunktion durch

$$f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x) 1_{[0,\infty)}(x)$$

gegeben ist. Die Verteilungsfunktion berechnet sich hieraus zu

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\, dx' = \int_{-\infty}^{x} \lambda \exp(-\lambda x')\, 1_{[0,\infty)}(x')\, dx'$$

$$= \int_0^x \lambda \exp(-\lambda x')\, dx' = \left(1 - \exp(-\lambda x)\right) 1_{[0,\infty)}(x)\,.$$

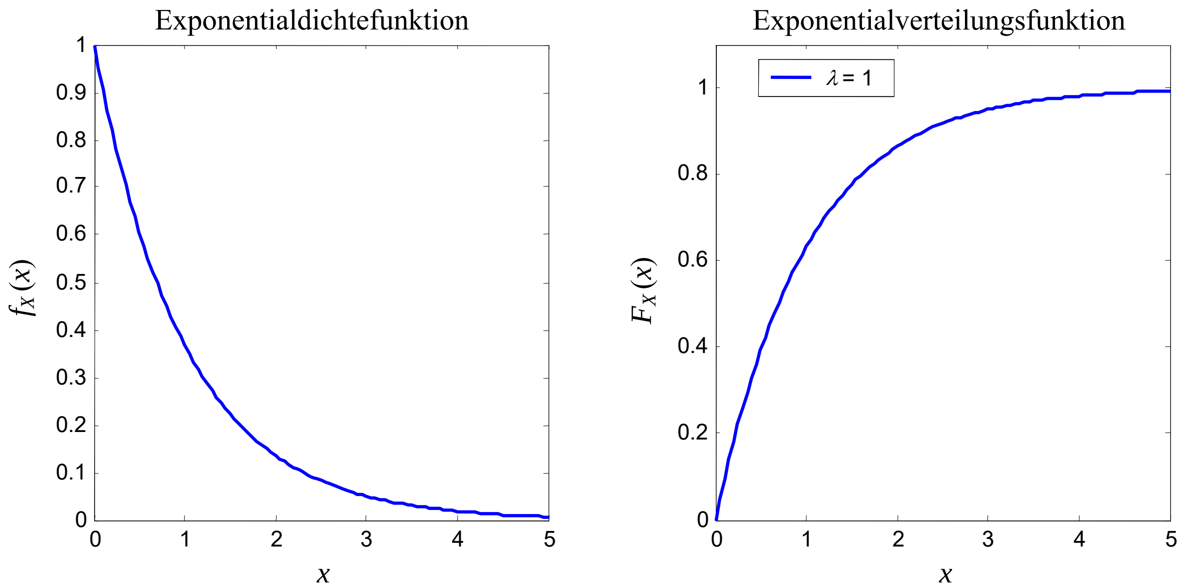
Für den Erwartungswert und die Varianz erhalten wir

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} x \exp(-\lambda x)\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

und

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \left(\mathrm{E}(X)\right)^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 \exp(-\lambda x)\, dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Die Exponentialverteilung findet Anwendung bei der Lebensdauer von technischen Bauteilen und Systemen, z.B. von Glühlampen.



17.5.7 Normalverteilung

Als normalverteilt können wir Zufallsvariablen ansehen, die durch Überlagerung einer großen Zahl von Einflüssen entstehen, wobei jede einzelne Einflussgröße nur einen im Verhältnis zur Gesamtsumme unbedeutenden Beitrag liefert, z.B. wie bei der Entstehung von Messfehlern.

Eine stetige Zufallsvariable X heißt normalverteil mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$, in Kurzschreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, wenn ihre Dichte- und Verteilungsfunktion durch

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

und

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\, dx' = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{-\frac{(x'-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx'$$

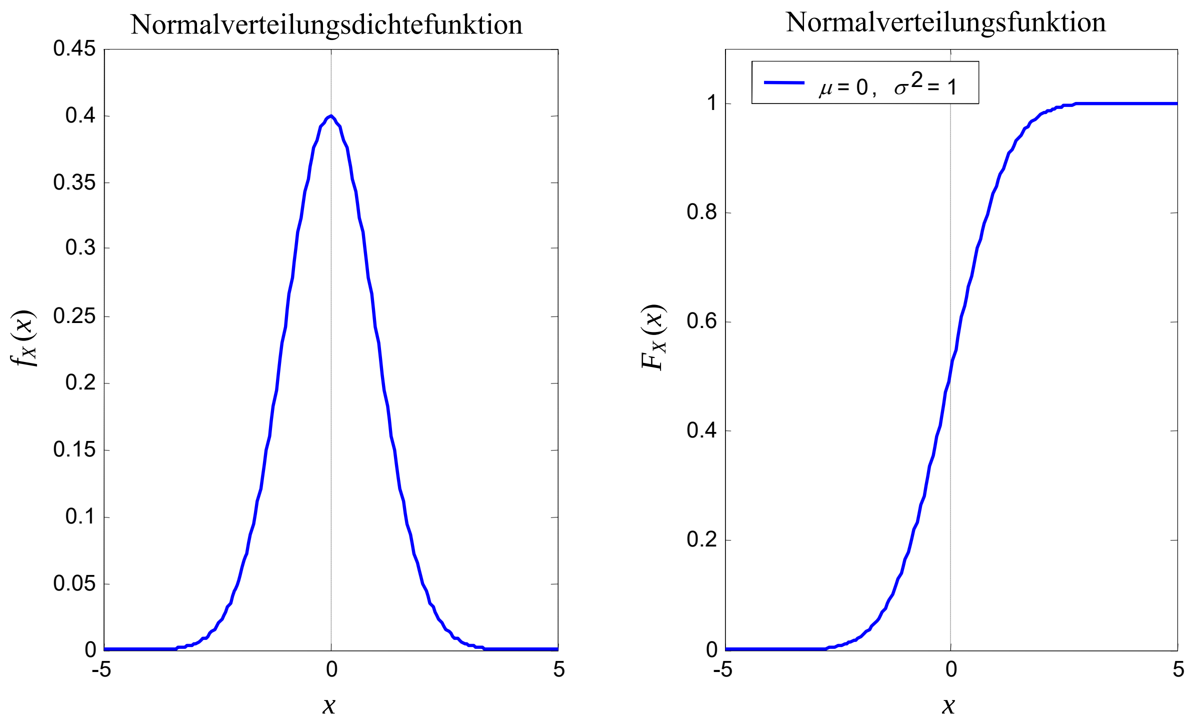
gegeben sind.

Der Erwartungswert und die Varianz von $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ lautet

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \mu \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}\left((X-\mu)^2\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2\, f_X(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sigma^2 \end{aligned}$$


Normalverteilungsdichtefunktion
0.45
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-5
0
5
$f_X(x)$
x
Normalverteilungsfunktion
$\mu = 0, \ \sigma^2 = 1$
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-5
0
5
$F_X(x)$
x