HSB
Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Labor für Technische Akustik

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Versuch 1a:

Simulation von Fourier-Analyse und Fourier-Synthese

1. Versuchsziele

Die Frequenzanalyse ist eine gebräuchliche Arbeitsmethode für eine Vielzahl von Anwendungen, bei denen zeitlich veränderliche Signale (oder Messwerte) auftreten. So ist beispielsweise in der Akustik die genaue Kenntnis der Obertöne eines Klangs für die künstliche Erzeugung von Klängen oder Sprache wichtig.
In diesem Versuch soll als Einstieg in das Thema der Fourier-Analyse zunächst die Fourier-Transformierte von einfachen periodischen Signalen untersucht werden.
Dazu wird in einem ersten Schritt die Fourier-Transformierte eines nummerisch simulierten Signals berechnet und die Frequenzen und die zugehörigen Amplituden bestimmt (Fourier-Analyse). Auf der Basis dieser harmonischen Analyse wird dann in einem zweiten Schritt das zeitlich veränderliche Signal entsprechend dem Fourier-Theorem wieder zusammengesetzt und mit der theoretisch berechneten Fourier-Reihe sowie dem nummerisch simulierten Ausgangssignal verglichen (Fourier-Synthese).

2. Theoretische Grundlagen

Ein kontinuierliches zeitabhängiges Signal wird bei der computergestützten Messung zu bestimmten Zeiten abgetastet. Auf diese Weise erhält man ein digitalisiertes Signal, das mit üblichen Methoden der digitalen Signalverarbeitung (Signal-Rausch Verbesserung durch Fourier-Transformation, Glätten des Signals durch Mittelung, etc.) weiter bearbeitet werden kann.
Das Abtast-Theorem gibt Auskunft darüber, in welchem zeitlichen Abstand eine Messung des Signalwertes erfolgen muss, damit der zeitliche Signalverlauf wieder aus den digitalisierten Messwerten (Datenpunkte) ermittelt werden kann.
Für eine Digitalisierung des Signals mit hinreichender Anzahl von Datenpunkte muss die Abtastfrequenz f_s mindestens doppelt so groß sein wie die maximale im Signal vorkommende Frequenz $f_{\max}$, welche die Breite des Frequenzspektrums bestimmt.
Ist diese Bedingung $f_s \geq 2 * f_{\max}$ nicht erfüllt, d. h. erfolgte die Digitalisierung des Signals bei einer zu niedrigen Abtastfrequenz f_s , so wird die Form des Signals nicht mehr korrekt erfasst (Aliasing).

Die Abtastfrequenz f_s des Messsignals wird in den Messparametern (F5) durch das eingestellte Intervall $\Delta t = \frac{1}{f_s}$ festgelegt.

Das Fourier-Theorem besagt, dass jedes zeitabhängige periodische Signal durch eine gewichtete Summe von cos- oder sin-Funktionen dargestellt werden kann.
Für die im Versuch verwendete Dreieck- bzw. Rechteckfunktion lautet die Reihenentwicklung nach trigonometrischen Funktionen bis zur neunten Ordnung:

Dreieck:

$$d_{(t)} = a\frac{8}{\pi^2}\left[(\cos(\omega t) + \frac{1}{9}\cos(3\omega t) + \frac{1}{25}\cos(5\omega t) + \frac{1}{49}\cos(7\omega t)) + \frac{1}{81}\cos(9\omega t)....\right] \tag{1}$$

Rechteck:

$$r_{(t)} = a\frac{4}{\pi}\left[(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\ \sin(5\omega t) + \frac{1}{7}\ \sin(7\omega t)) + \frac{1}{9}\ \sin(9\omega t...\right] \tag{2}$$

mit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ und $f = \frac{1}{T}$.

Der zeitabhängigen Funktion $d_{(t)}$ bzw. $r_{(t)}$ entspricht somit ein diskretes Frequenzspektrum mit unterschiedlichen Amplituden. Die Verallgemeinerung dieser Zerlegung auf nicht periodische Signale führt zum Fourier-Integral, das einem zeitabhängigen Signal ein kontinuierliches Frequenzspektrum zuordnet.
Die numerische Berechnung des Frequenzspektrums wird besonders effizient, wenn man ein digitalisiertes Signal von $N = 2^p$ Datenpunkten zugrundelegt.
Statt der ca. N^2 Rechenoperationen müssen dann nur noch ca. $N \cdot \log_2(N)$ Operationen durchgeführt werden. Dieses wesentlich weniger zeitaufwändige Verfahren bezeichnet man als schnelle Fourier-Transformation (FFT).
Mit einem solchen Algorithmus berechnet CASSY Lab das Frequenzspektrum.
Zunächst werden allerdings die vorhandenen Messpunkte derart gewichtet, dass Abschneideeffekte keine große Rolle mehr spielen (am Rand mit 0, in der Mitte maximal, Kaiser-Bessel-Wichtung(4.0)).

Damit auch immer genau 2^p Messpunkte vorliegen, werden eventuell fehlende Messpunkte noch durch Nullen aufgefüllt.

Als Ergebnis der FFT zeigt CASSY Lab insgesamt $\frac{N}{2}$ reelle Amplituden (Die Phasen werden nicht mit ausgewertet). Diese Amplituden werden "überhöht" dargestellt, also $A_i := A_{i-1} + A_i + A_{i+1}$ damit die Amplituden scharfer Peaks in etwa der Theorie entsprechen. Ohne diese Überhöhung müsste für eine Amplitudenermittlung, wie sie in diesem Versuch durchgeführt wird, die Summe über alle Amplituden eines Peaks berechnet werden.

Die Verwendung der FFT zur Frequenzanalyse ist durch zwei grundlegende Beziehungen begrenzt.

Die erste Beziehung verknüpft die höchste noch analysierbare Frequenz $f_{\max}$ mit der Abtastfrequenz f_s :

$$f_{\max} = \frac{f_s}{2} \tag{3}$$

Jede Frequenz, die größer als $f_{\max}$ ist, erscheint im Frequenzspektrum zwischen Null und $f_{\max}$ und ist damit nicht mehr unterscheidbar von den Frequenzanteilen, die tatsächlich zwischen 0 und $f_{\max}$ liegen. Die damit verbundene Veränderung der Signalform bezeichnet man mit Aliasing.

Die zweite Beziehung verbindet die Auflösung des Frequenzspektrums Δf (= Abstand benachbarter Punkte im Frequenzspektrum) mit der Abtastfrequenz f_s:

$$\Delta f = \frac{f_{\max}}{(N/2)} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\Delta T} = \frac{1}{T} \tag{4}$$

mit $T = N \cdot \Delta t$

Das bedeutet, dass eine Erhöhung der Auflösung des Frequenzspektrums nur durch eine längere Messzeit zu erreichen ist.

3. Versuchsaufbau

Hinweis: Dieser Versuch ist ein reines Simulationsexperiment zur Fourier-Analyse mit CASSY Lab.
Für ein Experiment mit elektrischen Signalen entsprechender Signalform sei auf den nächsten Versuch verwiesen.
In diesem Versuch werden die untersuchten Signale S_1 durch die folgende Formeln erzeugt:

Eingabeformeln:

Rechteck: $S_1 = r_{(t)} = a * (2 * square(f * t) - 1)$

Dreieck: $S_1 = d_{(t)} = a * (1 - 2 * saw(f * t))$

mit der Frequenz f = 0,5 Hz und der Amplitude a = 4

Geräteliste

1	1 CASSY Lab	524 200
1	PC ab Windows 95/98/2000 / NT / XP	337 53

4. *Versuchsdurchführung*

4.1 Rechtecksignal

- Die Voreinstellungen aus der Versuchsparameterdatei

  „V8a - Simuliertes Rechtecksignal.lab“

  aus dem Verzeichnis „Voreinstellungen für CASSY-Lab“ laden
- Die Frequenz des generierten Signals S_1 kann mit Hilfe des Zeigers im Anzeigeinstrument Frequenz f eingestellt werden.
- Die Simulation für 500 Werte mit einem Messintervall von 100 ms dauert 50 s.
- Bei längere Aufnahmezeiten erhöht sich die Frequenzauflösung der FFT, kürzere Aufnahmezeiten erniedrigen schrittweise die Frequenzauflösung der FFT.

Simulation der Messwertaufzeichnung

- Mit F9 wird die Simulation der Messwertaufnahme für die Funktion S_1 gestartet.

Hinweis: Bereits während der Simulation der Messwertaufzeichnung erscheint das $S_1(t)$-Diagramm des nummerisch simulierten Signals. Erst danach steht die Fourier-Transformierte F_1 in der Registerkarte „Frequenzspektrum“ zur Verfügung.

Frequenzspektrum der Fourier-Transformierten

- Nach Beendigung der Messwertaufnahme wechseln sie zur Registerkarte „Frequenzspektrum“. Es stellt das durch FFT berechnete Spektrum dar. Zu erkennen sind diverse Maxima bei Vielfachen der eingestellten Signalfrequenz f. Markieren sie die Peaks durch Anklicken mit der Maus und protokollieren deren Werte aus der Statuszeile, dessen Fenster sie mit F6 öffnen.

Fourier-Analyse

- Wechseln sie zur Registerkarte „Fourier-Analyse“. Hier wird der zeitliche Verlauf der einzelnen Fourierkoeffizenten A_i wiedergegeben. Zur Analyse ihrer erzeugten Signalform modifizieren sie nun Amplitudenwerte von Ai (Faktoren vor den sin(360*n*f*t)-Funktionen) in den Formeln für A_1, A_3, A_5, A_7 und A_9.

Hinweis: Die Einstellungen eines Parameters (z. B. F_1, A_1 oder S_2) sind durch Klicken der rechten Maustaste auf dem entsprechenden Speed-Button (obere Schalterzeile des Hauptfensters) aufrufbar.

Fourier-Synthese

- Wechseln sie zur Registerkarte „Fourier-Synthese“. Hier werden drei Kurven dargestellt:
  - die nummerisch simulierte Funktion S_1.
  - die experimentell bestimmte Reihe $S_2 = A_1 + A_3 + A_5 + A_7 + A_9$
  - die theoretisch errechnete Fourier-Reihe S_3

Es zeigt sich, dass in praktischen Anwendungen das periodische Signal S_1 hinreichend gut durch ein trigonometrisches Polynom S_2 bzw. S_3 von wenigen Termen angenähert werden kann.

4.2 Dreiecksignal

Führen sie für ein „simuliertes Dreiecksignal“ ebenfalls die Simulation mit Fourier-Analyse und Fourier-Synthese durch.