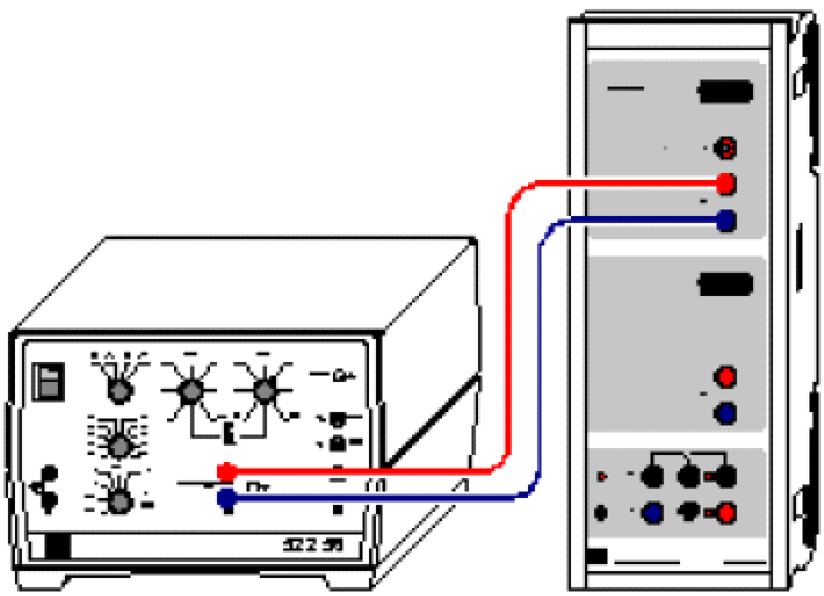
Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences

Labor für Technische Akustik

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus

Versuch 1b:

Fourier-Analyse der periodischen Signale eines Funktionsgenerators



1. Versuchsziele

In diesem Versuch soll als Einstieg in das Thema der Fourier-Analyse die Fourier-Transformierte von einfachen periodischen Signalformen untersucht werden. Dazu werden elektrische (Analog-)Signale eines Funktionsgenerators eingelesen und die Fourier-Transformierte des nun digital vorliegenden Signals berechnet. Aus dem Frequenzspektrum werden die Amplituden der verschiedenen Harmonischen bestimmt (Fourier-Analyse) und mit den theoretisch berechneten verglichen.

2. Theoretische Grundlagen

Ein kontinuierliches zeitabhängiges Signal wird bei der computergestützten Messung zu bestimmten Zeiten abgetastet. Auf diese Weise erhält man ein digitalisiertes Signal, das mit üblichen Methoden der digitalen Signalverarbeitung (Signal-Rausch Verbesserung durch Fourier-Transformation, Glätten des Signals durch Mittelung, etc.) weiter bearbeitet werden kann.

Das Abtast-Theorem gibt Auskunft darüber, in welchem zeitlichen Abstand eine Messung des Signalwertes erfolgen muss, damit der zeitliche Signalverlauf wieder aus den digitalisierten Messwerten (Datenpunkte) ermittelt werden kann.

Für eine Digitalisierung des Signals mit hinreichender Anzahl von Datenpunkte muss die Abtastfrequenz f_s mindestens doppelt so groß sein wie die maximale im Signal vorkommende Frequenz $f_{\max}$, welche die Breite des Frequenzspektrums bestimmt.

Ist diese Bedingung $f_s \geq 2 * f_{\max}$ nicht erfüllt, d. h. erfolgte die Digitalisierung des Signals bei einer zu niedrigen Abtastfrequenz f_s, so wird die Form des Signals nicht mehr korrekt erfasst (Aliasing).

Die Abtastfrequenz f_s des Messsignals wird in den Messparametern (**F5**) durch das eingestellte Intervall $\Delta t = \frac{1}{f_s}$ festgelegt.

Das Fourier-Theorem besagt, dass jedes zeitabhängige periodische Signal durch eine gewichtete Summe von cos- oder sin-Funktionen dargestellt werden kann.

Für die im Versuch verwendete Dreieck- bzw. Rechteckfunktion lautet die Reihenentwicklung nach trigonometrischen Funktionen bis zur neunten Ordnung:

Dreieck:

$$d_{(t)} = a\frac{8}{\pi^2}\left[(\cos(\omega t)+\frac{1}{9}\cos(3\omega t)+\frac{1}{25}\cos(5\omega t)+\frac{1}{49}\cos(7\omega t))+\frac{1}{81}\cos(9\omega t)....\right] \tag{1}$$

Rechteck:

$$r_{(t)} = a\frac{4}{\pi}\left[(\sin(\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega t)+\frac{1}{7}\sin(7\omega t))+\frac{1}{9}\sin(9\omega t...\right] \tag{2}$$

Sägezahnpuls:

$$s_{(t)} = a\frac{2}{\pi}\left[(\sin(\omega t)-\frac{1}{2}\sin(2\omega t)+\frac{1}{3}\sin(3\omega t)-\frac{1}{4}\sin(4\omega t))+\frac{1}{5}\sin(5\omega t...\right] \tag{3}$$

mit $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ und $f = \frac{1}{T}$.

Der zeitabhängigen Funktion $d_{(t)}$ bzw. $r_{(t)}$ entspricht somit ein diskretes Frequenzspektrum mit unterschiedlichen Amplituden. Die Verallgemeinerung dieser Zerlegung auf nicht periodische Signale führt zum Fourier-Integral, das einem zeitabhängigen Signal ein kontinuierliches Frequenzspektrum zuordnet.
Die numerische Berechnung des Frequenzspektrums wird besonders effizient, wenn man ein digitalisiertes Signal von $N = 2^p$ Datenpunkten zugrundelegt.
Statt der ca. N^2 Rechenoperationen müssen dann nur noch ca. $N \cdot \log_2(N)$ Operationen durchgeführt werden. Dieses wesentlich weniger zeitaufwändige Verfahren bezeichnet man als schnelle Fourier-Transformation (FFT).
Mit einem solchen Algorithmus berechnet CASSY Lab das Frequenzspektrum.

Zunächst werden allerdings die vorhandenen Messpunkte derart gewichtet, dass Abschneideeffekte keine große Rolle mehr spielen (am Rand mit 0, in der Mitte maximal, Kaiser-Bessel-Wichtung (4.0)).

Damit auch immer genau 2^p Messpunkte vorliegen, werden eventuell fehlende Messpunkte noch durch Nullen aufgefüllt.

Als Ergebnis der FFT zeigt CASSY Lab insgesamt $N/2$ reelle Amplituden (Phasen werden also nicht mit ausgewertet). Diese Amplituden werden "überhöht" dargestellt, also $A_i := A_{i-1} + A_i + A_{i+1}$ damit die Amplituden scharfer Peaks in etwa der Theorie entsprechen. Ohne diese Überhöhung müsste für eine Amplitudenermittlung, wie sie in diesem Versuch durchgeführt wird, die Summe über alle Amplituden eines Peaks berechnet werden.

Die Verwendung der FFT zur Frequenzanalyse ist durch zwei grundlegende Beziehungen begrenzt.

Die erste Beziehung verknüpft die höchste noch analysierbare Frequenz $f_{\max}$ mit der Abtastfrequenz f_s :

$$f_{\max} = \frac{f_s}{2} \tag{4}$$

Jede Frequenz, die größer als $f_{\max}$ ist, erscheint im Frequenzspektrum zwischen Null und $f_{\max}$ und ist

damit nicht mehr unterscheidbar von den Frequenzanteilen, die tatsächlich zwischen 0 und $f_{\max}$ liegen.

Die damit verbundene Veränderung der Signalform bezeichnet man mit Aliasing.

Die zweite Beziehung verbindet die Auflösung des Frequenzspektrums Δf (=Abstand benachbarter Punkte des Frequenzspektrums) mit der Abtastfrequenz f_s :

$$\Delta f = \frac{f_{\max}}{(N/2)} = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{N\Delta T} = \frac{1}{T} \qquad \text{mit } T = N \cdot \Delta t \tag{5}$$

Das bedeutet, dass eine Erhöhung der Auflösung des Frequenzspektrums nur durch eine längere Messzeit zu erreichen ist.

3. Versuchsaufbau

<u>Geräteliste</u>

1	Sensor-CASSY	524 010
1	CASSY Lab	524 200
1	Funktionsgenerator P	522 56
1	PC ab Windows 95/98/2000/NT/XP	337 53

4. Versuchsdurchführung

- Die Voreinstellungen aus der Versuchsparameterdatei
  „V8b - Fourieranalyse.lab“
  aus dem Verzeichnis „Voreinstellungen für CASSY-Lab“ laden

4.1 Rechtecksignal

- Gewünschte Signalform und eine Frequenz von etwa 500 Hz am Funktionsgenerator einstellen (DC-Offset auf Null).
- Zur Erfassung des Signals die Messung mit F9 starten.

Hinweis: Gegebenenfalls die Abtastrate (Intervall) und die Anzahl der Messpunkte im Fenster Messparameter (F5) entsprechend der gewählten Signalfrequenz anpassen, um ein hinreichend aufgelöstes Frequenzspektrum zu erhalten.

Bestimmung der Periodendauer und Frequenz

- Bestimmen sie die Peridendauer und die Frequenz des Signals vom Funktionsgenerator. Protokollieren sie auch die gewählten Werte für Intervall und die Anzahl der Messpunkte.

Bestimmung der Amplituden der Harmonischen

- Wechseln sie zur Registerkarte „Frequenzspektrum“. Bestimmen sie mit einer Waagerechten Linie (Alt+W) die Amplituden der Harmonischen der N-ten Ordnung und protokollieren diese in tabellarischer Form.
- Wechseln sie zur Registerkarte „Auswertung“. Tragen sie die ermittelten Amplitudenwerte sowie die Ordnung der N-ten Harmonischen in die vorbereitete Tabelle ein.
  Hinweis: Der Amplitudenwert kann auch mit der Maus von der Statuszeile (F6) in die Tabelle gezogen werden (Drag & Drop).

Abhängigkeit der Amplituden von der N-ten Harmonischen

- Durch eine anschließende Freie Anpassung (Alt+F) kann die theoretische berechnete Abhängigkeit der Amplituden von der N-ten Harmonischen für die jeweilige Signalform bestätigt werden. Hierzu sind folgende Funktionen in das Fenster für die Freie Anpassung einzugeben:
  - Dreieck: A/x^2
  - Rechteck: A/x
  - Sägezahn: A/x
- Alternativ kann die theoretisch gefundene Abhängigkeit der Amplituden von N auch durch Umrechnen der x-Achse in 1/x^2 (Dreieck) bzw. Achse in 1/x (Rechteck, Sägezahn) mit anschließender Anpassung einer Ursprungsgeraden überprüft werden.

4.2 Dreiecksignal

Bestimmen sie in gleicher Weise die Amplituden der Harmonischen für ein Dreiecksignal.

4.3 Sägezahnsignal

Bestimmen sie in gleicher Weise die Amplituden der Harmonischen für ein Sägezahnsignal.