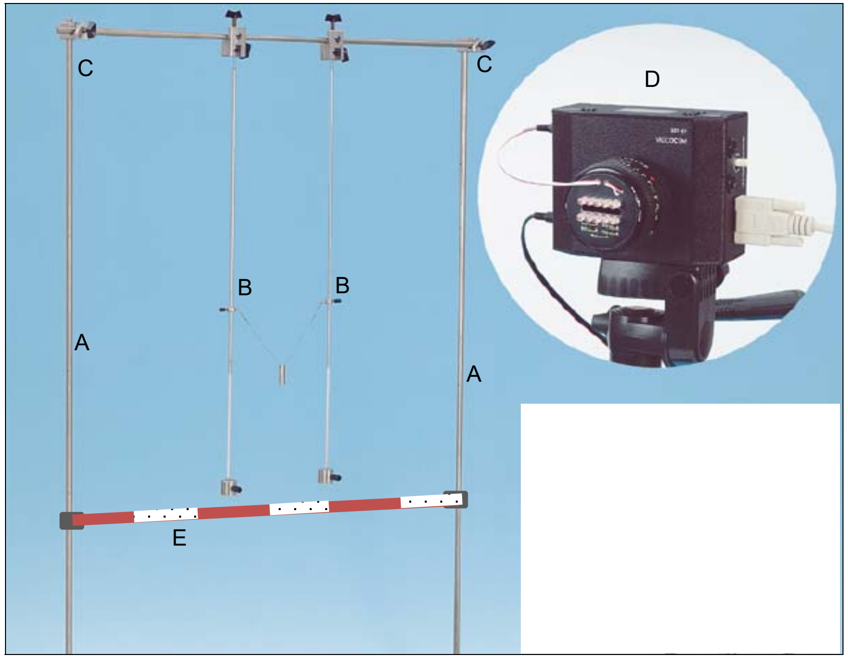
Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences
Fakultät Elektrotechnik und Informatik

Labor für Technische Physik

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus, Dipl.-Ing. W.Pieper

Versuch 4:

Kopplung von Schwingungen



A: Stativstange 100 cm
B: Doppelpendel
C: Leybold-Muffe
D: Kamera
E: Maßschiene

1. Versuchsziele

Die Beobachtung gleichphasiger, gegenphasiger und gekoppelter Schwingungen ist Gegenstand dieses Versuchs. Dabei sollen die Weg-Zeit-Diagramme der beiden gekoppelten Pendel mit Hilfe einer Kamera aufgezeichnet werden.

2. Theoretische Grundlagen

Um den Schwingungszustand eines gekoppelten Pendels zu beschreiben, müssen zunächst die Differentialgleichungen für die einzelnen Pendel aufgestellt werden. Betrachtet wird zunächst ein einzelnes, ungekoppeltes Pendel mit dem Trägheitsmoment J und dem Direktionsmoment $D = m \cdot g \cdot l$, wobei l die Pendellänge, m die Masse und g die Erdbeschleunigung darstellen. Für das Pendel gilt für kleine Winkel φ die Differentialgleichung:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -D \cdot \varphi \tag{1}$$

Die Lösung beschreibt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \tag{2}$$

Werden nun zwei solcher Pendel durch eine Feder mit dem Direktionsmoment $D' = D_F \cdot l^2$ (D_F beschreibt die Federkonstante und l die Länge von der Federaufhängung zur Pendelachse) gekoppelt, so wirken zusätzliche Drehmomente M_i, die von den jeweiligen Auslenkungswinkeln φ_1, φ_2 abhängen:

Pendel 1: $$M_1 = D'(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{3}$$
Pendel 2: $$M_2 = D'(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4}$$

Diese zusätzlichen Drehmomente, müssen bei der Differentialgleichung des freien Pendels (1) hinzuaddiert werden. Wir erhalten somit ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen,

$$J \cdot \ddot{\varphi}_1 = -D \cdot \varphi_1 + D'(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{5}$$
$$J \cdot \ddot{\varphi}_2 = -D \cdot \varphi_2 + D'(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{6}$$

die sich leicht entkoppeln lassen, wenn man $u = \varphi_1 + \varphi_2$ und $v = \varphi_1 - \varphi_2$ substituiert. Damit erhalten wir ein einfaches System von zwei unabhängigen Differentialgleichungen:

$$J \cdot \ddot{u} + D \cdot u = 0 \tag{7}$$
$$J \cdot \ddot{v} + (D + 2D')v = 0 \tag{8}$$

Die Lösungen sind harmonische Schwingungen mit den Kreisfrequenzen ω_1, ω_2 :

$$u = u(t) = A_1 \cdot \cos\omega_1 t + B_1 \cdot \sin\omega_1 t \qquad \text{mit} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{J}} \tag{9}$$

$$v = v(t) = A_2 \cdot \cos\omega_2 t + B_2 \cdot \sin\omega_2 t \qquad \text{mit} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{D+2D'}{J}} \tag{10}$$

Durch erneute Substitution mit $\varphi_1 = \frac{1}{2}(u+v)$ und $\varphi_2 = \frac{1}{2}(u-v)$ erhält man schließlich die Gleichungen für die Auslenkungswinkel der Pendel:

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{2}(A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t + A_2\cos\omega_2 t + B_2\sin\omega_2 t) \qquad \text{bzw.} \qquad S_1(t) = l \cdot \varphi_1(t) \tag{11}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(A_1\cos\omega_1 t + B_1\sin\omega_1 t - A_2\cos\omega_2 t - B_2\sin\omega_2 t) \qquad \text{bzw.} \qquad S_2(t) = l \cdot \varphi_2(t) \tag{12}$$

Diese allgemeinen Lösungen beschreiben auf den ersten Blick eine recht komplexe Bewegung der Pendel. Für bestimmte Anfangsbedingungen ergeben sich allerdings sehr anschauliche Schwingungsgleichungen. Dazu müssen die im Folgenden besprochenen Anfangsbedingungen $\varphi_i(t=0)$ und $\dot{\varphi}_i(t=0)$ in die Gleichungen (11 und 12) eingesetzt und die Koeffizienten A_i und B_i bestimmt werden.

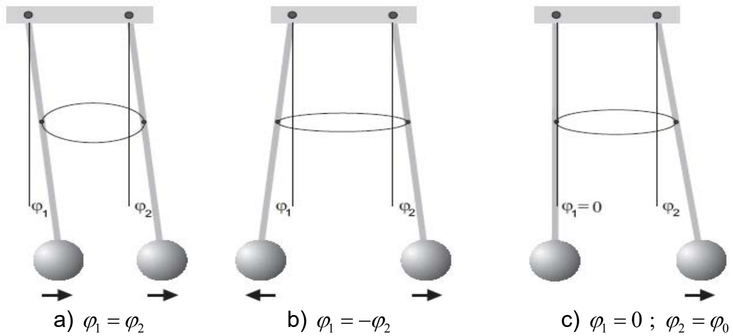


Abb. 1 : Schwingungsformen des gekoppelten Pendels für unterschiedliche Randbedingungen:
a) symmetrische Schwingung
b) antisymmetrische Schwingung
c) Schwebungsschwingung

1. Symmetrische Schwingung

Beide Pendel werden um den gleichen Winkel ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichzeitig losgelassen.

Anfangsbedingung: $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ (13)

Für die Koeffizienten erhalten wir:

$$A_1 = 2\varphi_0 \ , \ A_2 = B_1 = B_2 = 0 \tag{14}$$

und damit schließlich:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0\cos\omega_1 t \qquad \text{bzw.} \qquad S_1(t) = S_2(t) = l \cdot \varphi_0\cos\omega_1 t \tag{15}$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch und phasengleich mit der Frequenz ω_1.
Nach Gleichung (6) hängt ω_1 nicht vom Direktionsmoment der Kopplung ab
(ω_1 hängt nur vom Direktionsmoment D des freien, ungekoppelten Pendels ab).

Die Pendel schwingen also so, als seien sie gar nicht gekoppelt. Dies ist ja auch sofort einzusehenden da beide Pendel stets den gleichen Abstand voneinander aufweisen und so die Kopplungsfeder während der Schwingung niemals gestaucht oder gedehnt wird. Die Kopplungsfeder verharrt also stets im gleichen Zustand, wie zu Beginn der Schwingung. Es findet also keine Kopplung von einem Pendel auf das andere statt.

2. Asymmetrische Schwingung

Beide Pendel werden gegenphasig um den gleichen Winkelbetrag ausgelenkt und zum Zeitpunkt $t = 0$ gleichzeitig losgelassen.

Anfangsbedingung: $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ (16)

Für die Koeffizienten ergeben sich in diesem Fall:

$$A_2 = 2\varphi_0 \ , \ A_1 = B_1 = B_2 = 0 \tag{17}$$

und damit schließlich

$$\varphi_1(t) = -\varphi_2(t) = \varphi_0\cos\omega_2 t \qquad \text{bzw.} \qquad S_1(t) = -S_2(t) = l \cdot \varphi_0\cos\omega_2 t \tag{18}$$

Die beiden Pendel schwingen harmonisch aber diesmal gegenphasig mit der Kreisfrequenz ω_2.

3. Schwebungsschwingung

Das eine Pendel verharrt in der Ruhelage, während das andere um den Winkel φ_0 ausgelenkt wird.

Anfangsbedingung: $\varphi_1(0)=0\ ,\ \varphi_2(0)=\varphi_0\ ,\ \dot{\varphi}_1(0)=\dot{\varphi}_2(0)=0$ (19)

Für die Koeffizienten erhalten wir:

$$A_1=-A_2=\varphi_0\ ,\ B_1=B_2=0 \tag{20}$$

und die Schwingungsgleichungen lauten nach einigen Umformungen:

$$\varphi_1(t)=\varphi_0\cdot\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \tag{21}$$

bzw.

$$S_1(t)=l\cdot\varphi_0\cdot\sin\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \tag{22}$$

und

$$\varphi_2(t)=\varphi_0\cdot\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \tag{23}$$

bzw.

$$S_2(t)=l\cdot\varphi_0\cdot\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t\right) \tag{24}$$

Diese Gleichungen beschreiben eine Schwebung. Das zu Beginn ausgelenkte Pendel überträgt allmählich seine Schwingungsenergie auf das anfangs ruhende Pendel bis es schließlich selbst stillsteht. Danach kehrt sich der Vorgang um und das nun schwingende Pendel regt das ruhende Pendel an. Die Schwingung der gekoppelten Pendel wird in diesem Fall durch zwei Frequenzen beschrieben:

Zum einen durch die Kreisfrequenz $\omega=\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ mit denen jedes einzelne Pendel schwingt, zum anderen durch die Schwebungskreisfrequenz $\omega_s=\omega_2-\omega_1$ mit der die Energie eines Einzelpendels oszilliert.

Die zu den Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2 gehörenden Schwingungen werden als Normalschwingungen bezeichnet. Allgemein gilt, dass ein System aus N gekoppelten Oszillatoren N Normalschwingungen besitzt. Jede mögliche Schwingung eines einzelnen Oszillators kann immer durch eine Linearkombination dieser Normalschwingungen dargestellt werden. So ist die Schwebungsschwingung eine Linearkombination der beiden Normalschwingungen mit den Frequenzen ω_1 und ω_2.

3. Versuchsaufbau

Geräteliste

1	Doppelpendel	334 645
1	VideoCom Kamera	337 47
1	Steckernetzgerät 230V / 12V / 20W	562 791
1	Maßschiene	460 97
3	Kleiner Stativfuß, V-förmig	300 02
1	Stativstange 47 cm	300 42
2	Stativstange 100 cm	300 44
4	Leybold-Muffe	301 01
1	Angelschnur 10 m	309 48
1	Computer mit Programm VideoCom Bewegungen	

Aufbau der Pendel:

- Die Stativstangen (100 cm) auf den kleinen Stativfuß montieren, aufstellen und an den Stellschrauben vertikal ausrichten. Zur Ausrichtung kann die Wasserwaage aus Versuch 7 verwendet werden.
- Das Pendel an der kleinen Stativstange (47 cm) befestigen und mit den Leybold-Muffen quer auf den senkrechten Stativstangen montieren.
- Die Maßstabschiene mit den Leybold-Muffen am unteren Ende der Stativstangen (100 cm) befestigen.
- Pendel mittig in einem Abstand von 15 cm zueinander positionieren.
- Für gekoppelte Schwingungen werden die Pendel über eine Schnur und angehängter Masse miteinander verbunden (siehe Bild).

Aufzeichnung der Bewegung mit der VideoCom:

Im Versuch werden die Bewegungen der Pendel mit Hilfe einer einzeiligen CCD-Kamera (VideoCom) aufgenommen. An der Kamera ist ein Aufsatz mit LEDs befestigt, die Lichtpulse mit einer Wiederholrate von bis zu 80Hz erzeugen. An den Pendeln werden Folien mit retroreflektierender Beschichtung angebracht. Die von den Folien reflektierten Lichtpulse werden über das Kameraobjektiv auf eine CCD-Zeile mit 2048 Pixel abgebildet (CCD: charge-coupled device).

Die Messwerte werden über eine serielle Schnittstelle an den Computer übertragen. Das Programm ‚VideoCom Bewegungen‘ stellt die Bewegungen der Pendel als Weg-Zeit-Diagramm dar und ermöglicht eine weitere Auswertung der Messdaten.

Aufbau der Kamera:

- Die Kamera auf einen Stativfuß in Höhe der Reflektorstreifen montieren und in einem Abstand von ca. 50 cm mittig zum Pendelaufbau aufstellen.
- Die Kamera über Steckernetzgerät mit Spannung versorgen und mit Hilfe eines Seriell-USB-Adapters mit dem Computer verbinden. Der Stecker des LED Aufsatzes muss in der LED Buchse der Kamera stecken.
- Einstellung des Kameraobjektivs: Blendenöffnung minimal (größte Blendenzahl), Entfernungseinstellung entsprechend dem Abstand von Kamera und Pendelaufbau

Ausrichtung und Kalibrierung der Kamera:

- Programm „VideoCom Bewegungen“ aufrufen und die Registerkarte „Intensitätstest“ anklicken.
- Die Kamera so ausrichten, dass die gesamte Bewegung der Pendel von der CCD erfasst wird. Auf dem Bildschirm erscheinen zwei Spitzen; diese werden ebenfalls im Kameradisplay angezeigt.
- Den gesamten Aufbau so aufstellen (oder evtl. abschatten), dass Umgebungslicht oder Reflexionen die Messungen nicht beeinflussen. Hierzu sollte das Intensitätsverhältnis von Maximum zu Minimum für beide Pendel größer als 5 zu 1 betragen. Eventuell auch die Blende nachstellen.
- Mit dem Button  oder der Taste F5 das Fenster „Einstellungen/Wegkalibrierung“ aufrufen. Im Register „Messvorgaben“ folgende Einstellungen vornehmen:

Δt	50 ms (20 fps)
Blitz	Auto
Glättung	Minimum (2 × dt)
Stopp der Messung	über Start / Stop-Taster

- Im Programm „VideoCom Bewegungen“ die Darstellung „Weg“ aktivieren und das Fenster „Einstellungen“ aufrufen. Die Pendel bzw. die Reflektorstreifen an definierten Positionen festhalten. Im Register „Wegkalibrierung“ die aktuellen Positionen der beiden Pendel eintragen (bei Nullpunktkalibierung in der Mitte: z.B. -0,1 und +0,1 m). Die Schaltfläche „Pixel aus Anzeige ablesen“ anklicken und die Option „Kalibrierung verwenden“ aktivieren.

Bedienungshinweise zum Programm ‚VideoCom Bewegungen‘:

- Messung starten oder stoppen: Button  oder Taste F9.
- Messdaten speichern: Button  oder Taste F2
- Alte Messwerte löschen: Button  oder Taste F4
- Fenster „Einstellungen“ aufrufen: Button  oder Taste F5
- Auswertungen: Kontextmenu über rechte Maustaste: z.B. Zoomen, Markierung setzen, Anpassung durchführen, FFT berechnen oder Diagramm kopieren
- Markieren eines Kurvenbereiches: Mauszeiger bei gedrückter linker Maustaste über Kurvenbereich ziehen oder Anfangs- und Endpunkt anklicken.
- FFT berechnen: im Kontextmenu über rechte Maustaste „FFT berechnen“ auswählen und den zu analysierenden Kurvenbereich mit der Maus auswählen. Das Ergebnis wird im Register Fourier angezeigt.
- Formel eingeben: Fenster „Einstellungen“; Register Formel :z.B. s1+s2 bei Formeln eingeben, Größe, Symbol und Einheit sinnvoll wählen
- Über F1 kann eine detaillierte Beschreibung zur Funktionsweise des Programms aufgerufen werden.

4. Versuchsdurchführung

Die Weg-Zeit-Diagramme der Pendelschwingungen sollen entsprechend der nachfolgenden Bedingungen mit Hilfe von VideoCom aufgezeichnet werden. Achten Sie darauf, dass die Anfangsbedingungen jeweils erfüllt sind und die Pendel parallel zur Kameraebene schwingen. Führen Sie jeweils mehrere Versuche durch.

I. Ungekoppelte Pendel

Lassen Sie die beiden Pendel (ein Pendel mit Massezylinder, das andere Pendel ohne Massezylinder) im ungekoppelten Zustand schwingen und ermitteln Sie sowohl grafisch als auch mit Hilfe der FFT die Eigenfrequenzen der Pendel.

Hinweis: Als Hilfsmittel zur Bestimmung der Periodendauer eignen sich z.B. senkrechte Markierungslinien oder die direkte Differenzmessung. Die Eigenfrequenzen können auch über eine FFT ermittelt werden.

II. Gekoppelte Pendel mit Gewichtskopplung

Befestigen Sie an jedem Pendel jeweils einen Massezylinder, verbinden Sie die Pendel mit einer Schnur und hängen das Stabgewicht daran.

a) Symmetrische Schwingung mit Anfangsbedingung $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$

Lenken Sie die beiden gekoppelten Pendel um denselben Winkel aus der Ruhelage aus und lassen Sie sie in gleicher Phase schwingen. Ermitteln Sie die Eigenfrequenzen der Pendel.

b) Asymmetrische Schwingung mit Anfangsbedingung $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0$

Lenken Sie die beiden gekoppelten Pendel um denselben Winkel, jedoch in entgegengesetzter Richtung aus der Ruhelage aus und lassen Sie sie in Gegenphase schwingen. Ermitteln Sie die Eigenfrequenzen der Pendel.

c) Schwebungsschwingung mit Anfangsbedingung $\varphi_1(0) = 0$ und $\varphi_2(0) = \varphi_0$

Lenken Sie ein Pendel aus der Ruhelage aus, während Sie das andere Pendel in der Ruhelage festhalten, und lassen Sie dann beide los. Ermitteln Sie die Eigenfrequenzen der Pendel.

Wiederholen Sie die Messung mit der Auslenkung des anderen Pendels

(Anfangsbedingung $\varphi_1(0) = \varphi_0$ und $\varphi_2(0) = 0$).

5. Versuchsauswertung

Stellen Sie ihre Messergebnisse grafisch in Diagrammen dar und kennzeichnen Sie die ermittelten Parameter. Geben Sie Erläuterungen und vergleichen Sie die Ergebnisse.

a) Symmetrische Schwingung

- Darstellung der Weg-Zeit-Diagramme für Pendel 1 [$s_1(t)$] und Pendel 2 [$s_2(t)$]
- Ermittlung der Periodendauer T_{gl}, der Frequenz f_{gl} und der Kreisfrequenz ω_{gl}
- Diagramm: $s_-(t) = s_1(t) - s_2(t)$ (über Formeleingabe in Feld ‚*Formeln*': s1-s2)

b) Asymmetrische Schwingung

- Darstellung der Weg-Zeit-Diagramme für Pendel 1 [$s_1(t)$] und Pendel 2 [$s_2(t)$]
- Ermittlung der Periodendauer T_{geg}, Berechnung der Frequenz f_{geg} und der Kreisfrequenz ω_{geg}
- Diagramm: $s_+(t) = s_1(t) + s_2(t)$ (über Formeleingabe)

c) Schwebungsschwingung

- Darstellung der Weg-Zeit-Diagramme für Pendel 1 [$s_1(t)$] und Pendel 2 [$s_2(t)$]
- Pendel 2 : Darstellung des Weg-Zeit-Diagramms $s_2(t)$
- Ermittlung der Schwebungsdauer T_S und der Schwingungsdauer T der Schwebungsfrequenz f_S .und der Schwingungsfrequenz f, sowie der Eigenfrequenzen ω_1 und ω_2
- Diagramme: $s_+(t) = s_1(t) + s_2(t)$ (über Formeleingabe)

Literatur

[1] Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, Springer-Lehrbuch
[2] Kuchling: Taschenbuch der Physik, Fachbuchverlag Leipzig
[3] Eichler, Kronfeld, Sahm: Das Neue Physikalische Grundpraktikum, Springer-Lehrbuch
[4] Geschke: Physikalisches Praktikum, Teubner-Verlag