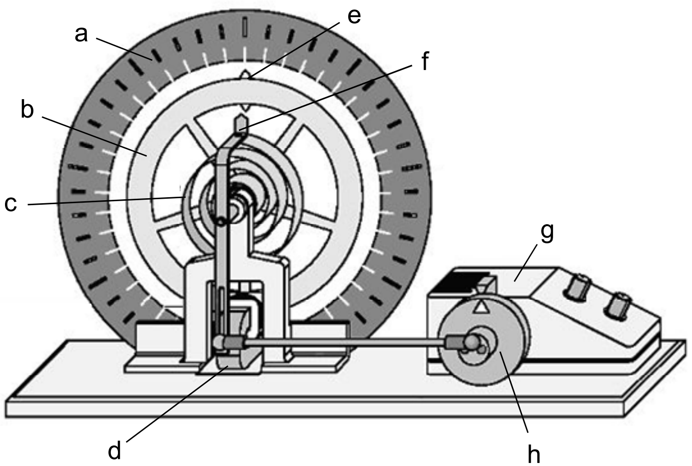
Hochschule Bremen
City University of Applied Sciences
Fakultät Elektrotechnik und Informatik

Labor für Technische Physik

Prof. Dr.-Ing. Dieter Kraus, Dipl.-Ing. W.Pieper

Versuch 5b:

Drehpendel nach Pohl
Erzwungene Drehschwingungen



a: Skalenring(fest)	e: Zeiger
b: Pendelkörper	f: Hebel
c: Spiralfeder	g: Erregermotor
d: Wirbelstrombremse	h: Exzenter

1. Versuchsziele

In diesem Versuch sollen der Einschwingvorgang und der stationäre Zustand von erzwungenen Drehschwingungen beobachtet werden. Die Amplituden-Resonanzfunktion und die Phasen-Resonanzfunktion sollen für verschiedene Dämpfungen ermittelt werden.

2. Theoretische Grundlagen

Das Pohlsche Rad ist um die Achse drehbar und wird durch eine Spiralfeder in der Ruhelage gehalten. Diese ist an einem Ende am Rad befestigt und am anderen Ende an einem Hebel. Wird das Rad aus der Ruhelage ausgelenkt und dann losgelassen, so kehrt es in Form einer Schwingung in die Ruhelage zurück. Das Rad läuft zwischen den Polschuhen eines Elektromagneten, der Wirbelströme im sich bewegenden Rad induziert, die zu einer Abbremsung führen. Die Dämpfung kann über die Stromstärke des Elektromagneten geregelt werden.

Durch einen Motor mit Exzenter und Schubstange kann der Hebel hin und her bewegt werden. Durch die Spiralfeder wirkt dann ein periodisches Drehmoment auf das Rad, das damit zu erzwungenen Schwingungen angeregt wird.

Für die folgenden Überlegungen wird ein schwingungsfähiges Feder-Masse-System, auf das ein Erreger mit der Kreisfrequenz ω_E periodisch einwirkt, betrachtet.

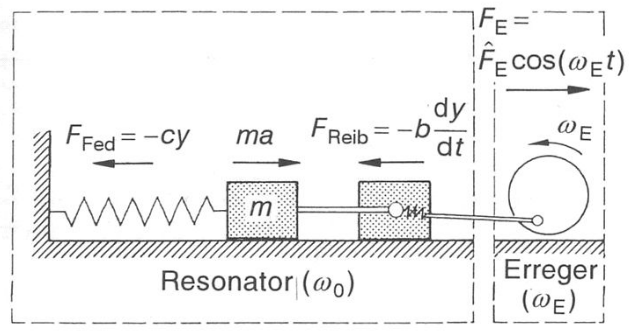


Abb. 1 : Schwingungsfähiges Feder-Masse-System

Bei einer erzwungenen Schwingung wird einem mechanischen (oder elektrischen) System (dem Resonator) von einem äußeren Erreger eine periodische Kraft (oder Spannung) aufgezwungen. Nach einer Einschwingdauer schwingt das System mit der Frequenz des Erregers ω_E.

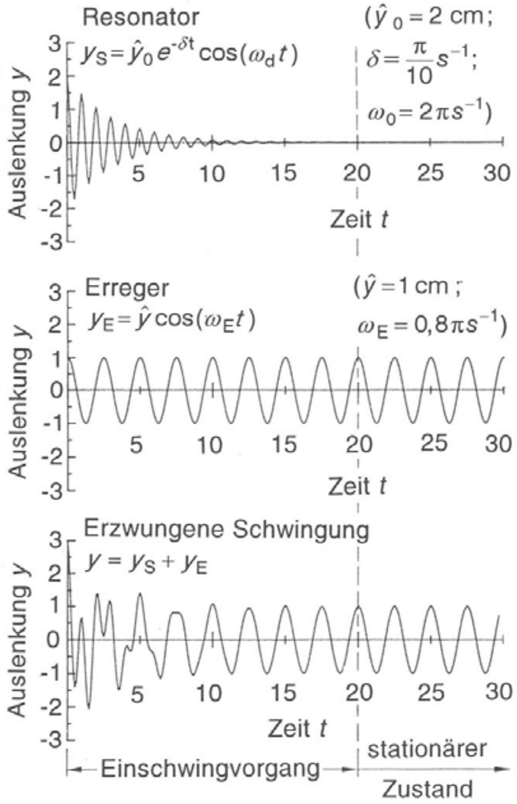


Abb. 2 : Zeitlicher Verlauf der Auslenkung des Schwingers

Es wirken folgende Kräfte

$$F_{Fed} = -c \cdot y \tag{1}$$

F_{Fed}: Federkraft
c: Federkonstante
y: Auslenkung des Schwingers

$$F_{Reib} = -b \cdot \frac{dy}{dt} \tag{2}$$

F_{Reib}: Reibungskraft
b: Dämpfungskoeffizient

$$F_E = \hat{F}_E \cdot \cos(\omega_E \cdot t) \tag{3}$$

F_E: Erregende Kraft
$\hat{F}_E$: Maximalwert der erregenden Kraft
ω_E: Kreisfrequenz des Erregers

Es gilt das Newtonsche Bewegungsgesetz

$$F_{Fed} + F_{Reib} + F_E = m \cdot a$$
$$-c \cdot y - b \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \hat{F}_E \cdot \cos(\omega_E \cdot t) = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \tag{4}$$

Durch geeignete Umstellung und unter Berücksichtigung des Dämpfungsgrades

$$D = \frac{b}{2m\omega_0} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

ergibt sich die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingung zu

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2 \cdot D \cdot \omega_0 \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 \cdot y = \frac{\hat{F}_E}{m} \cdot \cos(\omega_E \cdot t) \tag{5}$$

Die allgemeine Lösung einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung lautet

$$y_{inh} = y_{hom} + y_{part} \tag{6}$$

Die homogene Differentialgleichung ist bereits durch die Bewegungsgleichung des Schwingfalles der freien, gedämpften Schwingung bekannt.

$$y_{hom} = \hat{y}_0 \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) \tag{7}$$

Infolge der Dämpfung nimmt der Beitrag der homogenen Lösung mit der Zeit ab. Nach Ablauf der Einschwingzeit bestimmt allein die partikuläre Lösung (erregende Schwingung) das Schwingverhalten. Der Ansatz für die partikuläre Lösung lautet

$$y_{part} = \hat{y} \cdot e^{(\omega_E \cdot t - \varphi)} \tag{8}$$

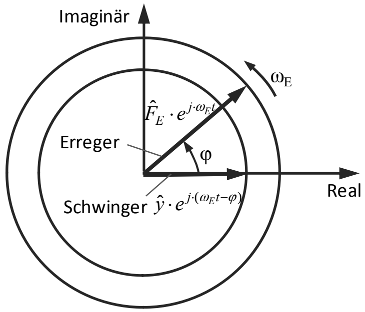


Abb. 3 : Schwinger und Erreger als komplexer Zeiger

Der Winkel φ beschreibt die Phasenverschiebung zwischen der Erreger- und der Resonatorspannung. Die erregende Kraft F_E ist ein komplexer Zeiger $\hat{F}_E \cdot e^{j\cdot\omega_E t}$, der mit der erregenden Kreisfrequenz ω_E schwingt. Die Auslenkung des Schwingers $\hat{y}\cdot e^{j\cdot(\omega_E t-\varphi)}$ rotiert als Zeiger mit derselben Frequenz ω_E, jedoch um die Phasenverschiebung φ verzögert. Die Phasenverschiebung hängt von der Kreisfrequenz des Erregers ω_E, der Eigenfrequenz des Resonators ω_0 und der Dämpfung D ab.

Nach Einsetzen der Ableitungen aus Gleichung 8 in die Differentialgleichung und Umstellen des komplexen Ausdrucks nach Real- und Imaginärteil folgt

$$\hat{y}\cdot(\omega_0^2-\omega_E^2)+j\cdot 2\cdot D\cdot\omega_0\cdot\omega_E\cdot\hat{y}=\frac{\hat{F}_E}{m}\cdot e^{j\cdot\varphi} \qquad (9)$$

Nach der Eulerschen Formel gilt für den rechten Teil der Gleichung

$$\frac{\hat{F}_E}{m}\cdot e^{j\cdot\varphi}=\frac{\hat{F}_E}{m}\cdot(\cos\varphi+j\cdot\sin\varphi) \qquad (10)$$

Der komplexe Zeiger kann nun in seinen Real- und Imaginärteil zerlegt werden.

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\hat{F}_E}{m}\right\}=\hat{y}\cdot(\omega_0^2-\omega_E^2), \qquad \mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{F}_E}{m}\right\}=2\cdot D\cdot\omega_0\cdot\omega_E\cdot\hat{y} \qquad (11)$$

Aus der Lage des komplexen Zeigers lassen sich nun in Abhängigkeit der Erregerfrequenz ω_E die Amplituden- und die Phasenresonanzfunktion bestimmen. Der Betrag des Zeigers lässt sich nach dem Satz des Pythagoras ermitteln.

$$\left(\frac{\hat{F}_E}{m}\right)^2=\hat{y}^2\cdot(\omega_0^2-\omega_E^2)^2+\left(2\cdot D\cdot\omega_0\cdot\omega_E\cdot\hat{y}\right)^2 \qquad (12)$$

Für den Amplitudenverlauf folgt

$$\hat{y}=\frac{\hat{F}_E}{c\cdot\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2\cdot D\cdot\eta)^2}} \qquad (13)$$

mit der normierten Amplitude $y_N=\frac{\hat{y}}{\hat{F}_E/c}$, $m=\frac{c}{\omega_0^2}$ und $\eta=\frac{\omega_E}{\omega_0}$

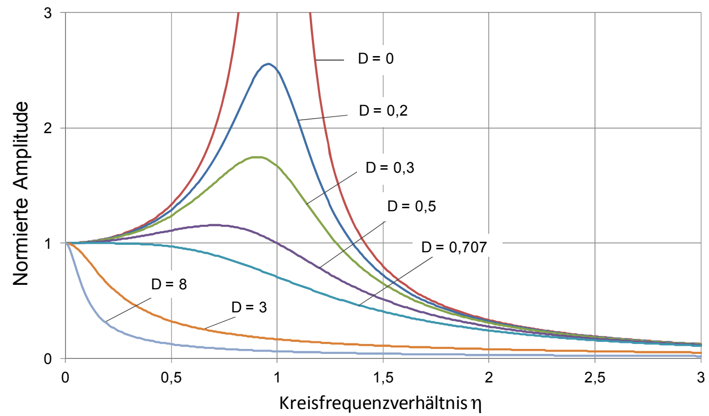


Abb. 4 : Amplituden-Resonanzkurve

Der Phasenverlauf ergibt sich zu

$$\tan\varphi=\frac{2\cdot D\cdot\omega_E\cdot\omega_0}{\left(\omega_0^2-\omega_E^2\right)}=\frac{2\cdot D\cdot\eta}{\left(1-\eta^2\right)} \qquad (14)$$

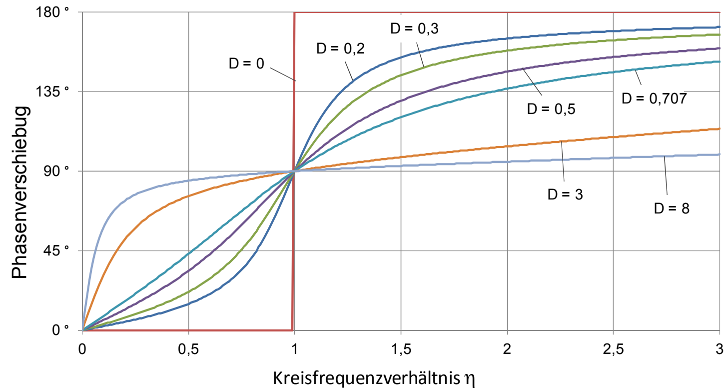


Abb. 5 : Phasenverlauf

Folgende Spezialfälle treten auf:

a) Quasistatische Anregung ($\eta \ll 1$)

Als Amplitude ergibt sich $y_{stat} = \hat{F}_E / c$ (statische Auslenkung aufgrund der Federkraft). Zwischen Erreger und Resonator ist die Phasenverschiebung gleich null, weil die erregende Kraft sich so langsam ändert, dass der Schwinger folgen kann.

b) Resonanzfall ohne Dämpfung (η = 1; D = 0)

Für diesen Fall ergibt sich ein unbestimmter Ausdruck. Es tritt ein Phasensprung von 0 auf π auf. Die Amplitude wird unendlich groß. Es kommt zur Resonanzkatastrophe.

Sie kann verhindert werden durch

- Vermeidung periodischer Kraftwirkungen,
- Einbau geeigneter Dämpfungsglieder und
- Großen Unterschied zwischen Eigenfrequenz ω_0 des schwingungsfähigen Systems und der Erregerfrequenz ω_E.

c) Resonanzfall mit Dämpfung (η = 1; D > 0)

Mit steigendem Dämpfungsgrad nehmen die Amplituden bis zur Grenzdämpfung $D_{Gr} = 1/\sqrt{2}$ ab. Wird die Grenzdämpfung überschritten, so tritt keine Resonanzüberhöhung mehr ein. Die Güte Q eines Schwingkreises wird näherungsweise durch das Verhältnis der Amplitude im Resonanzfall $\hat{y}_{res}$ und der Amplitude im statischen Fall $\hat{y}_{stat}$ bestimmt.

$$Q = \frac{1}{2 \cdot D} = \frac{\hat{y}_{res}}{\hat{y}_{stat}} \qquad (15)$$

Im Resonanzfall tritt unabhängig von der Dämpfung eine Phasenverschiebung von $\varphi = \pi/2$ zwischen Schwinger und Erreger auf.

d) Hochfrequente Anregung ($\eta \gg 1$)

Der Erreger und der Resonator schwingen annähernd gegenphasig (für $\eta \to \infty$ ist $\varphi = \pi$), und zwar umso genauer, je geringer die Dämpfung D ist. Unabhängig vom Dämpfungsgrad D geht die Amplitude der erzwungenen Schwingung gegen null ($\hat{y} \approx 0$).

Literatur

[1] Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure, Springer-Lehrbuch

[2] Kuchling: Taschenbuch der Physik, Fachbuchverlag Leipzig

[3] Eichler, Kronfeld, Sahm: Das Neue Physikalische Grundpraktikum, Springer-Lehrbuch

3. Versuchsaufbau

Geräteliste

1	Drehpendel nach Pohl	346 00
1	Tisch-Netzgerät (LD), 16 V, 2 A für den Magneten	521 545
1	Festspannungs-Netzgerät Voltcraft, 24 V für den Motor	
1	Drehbewegungssensor S	524 082
1	Sensor-CASSY	524 010
1	Computer mit CASSY Lab	524 200
1	Spannungsmessgerät	
1	Reflexionslichtschranke mit Lichtwellenleiter	

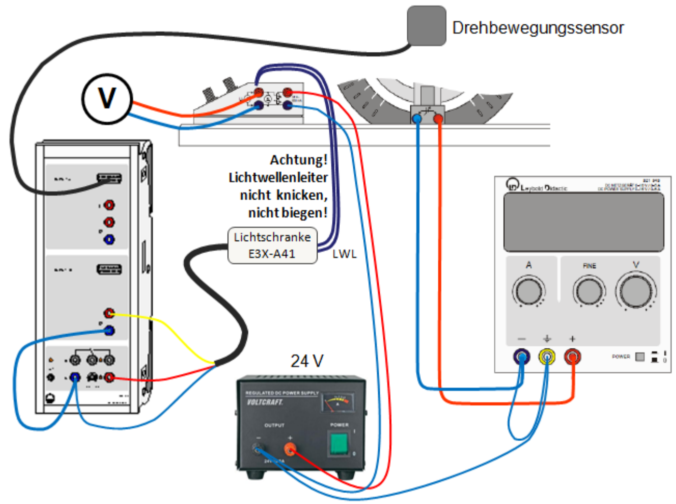


Abb. 6 : Elektrischer Anschlussplan

- Die Schwingungsamplitude wird mit einem an der Pendelachse befestigen Drehbewegungssensor gemessen, der mit Input A des Sensor-CASSY verbunden wird.
- Eine Reflexionslichtschranke mit einem am Motor fixierten Lichtwellenleiter (Lwl) erzeugt bei jeder Drehung einen Impuls, der die 0°-Phaselage der Erreger-schwingung repräsentiert. Die Lichtschranke (LS) folgendermaßen anschließen:

Kabel von LS roter Stecker	↔	**+**	von Spannungsquelle S (16 V)
Kabel von LS blauer Stecker	↔	**–**	von Spannungsquelle S
Kabel von LS gelber Stecker	↔	rote Buchse	von Input B
Laborkabel blau von S **–**	↔	blaue Buchse	von Input B

- Das Netzgerät mit dem Elektromagneten für die Wirbelstrombremse verbinden.
- Den Motor mit 24 V vom Festspannungsnetzgerät versorgen; zusätzlich den Minuspol (blaue Buchse) mit der grün-gelben Erdungsbuchse des Netzgerät verbinden.
- Das Multimeter an die dafür vorgesehenen Buchsen des Motors anschließen.
- Das Sensor-CASSY über ein USB-Kabel mit einem Computer verbinden und die Spannungsversorgung mit einem Steckernetzteil realisieren.

Einstellungen in Cassy Lab:

Die Voreinstellungen aus der Versuchsparameterdatei

„V5b - Drehpendel nach Pohl - Einstellungen für CASSY-Lab.lab" laden

oder manuell folgende Einstellungen vornehmen:

Einstellungen aufrufen: F5 oder Button - Baumstruktur öffnen

- *CASSYs - Sensor-CASSY – Eingang A_1 (Drehbewegungssensor S)*
  - *Messgröße: Winkel α_{A1} (rad)*
  - *Bereich: 2,5*
  - *Nullpunkt: mittig*
- *CASSYs - Sensor-CASSY – Eingang B_1 (ohne Sensorbox)*
  - *Messgröße: Spannung U_{B1}*
  - *Bereich: 0 V … 30 V*
  - *Messwerterfassung: Momentanwerte*
  - *Nullpunkt: links*
- *Messparameter (Menu ‚Fenster' - Messparameter anzeigen)*
  - *Aufnahme: automatisch*
  - *Messzeit: 7 s*
  - *Intervall: 5 ms*
- *Rechner - Formel*
  - *Name: Schwingungsamplitude, Symbol: y , Einheit: Skt,*
  - *Von: -5 Skt , bis: 5 Skt , Dezimalen: 2*
  - *Formel &aA1*7,9 eingetragen*
- *Darstellungen – Zeitverlauf – neu*
  - *x-Achse: t, y-Achse: y , U_{B1}, Stil: Linien*
  - *x-Achse für alle Kurven dieser Darstellung*

Bedienungshinweise zu CASSY Lab 2:

- Als Hilfsmittel zur Bestimmung der Amplitude oder der Periodendauer eignen sich waagerechte oder senkrechte Markierungslinien (ALT-W), (ALT-S) oder die direkte Differenzmessung (ALT-D). Weitere Funktionen im Kontextmenü (rechte Maustaste auf Tabelle oder Diagramm): z.B. Zoomen (Alt-Z | ALT-A); *Weitere Auswertungen - Minimum und Maximum bestimmen*.
  Die Markerposition wird unten links in der Statuszeile eingetragen. Bereits eingefügte Marker durch Doppelklick aktivieren und verschieben.

4. Versuchsdurchführung

<u>Hinweise:</u>

- Für alle Messungen muss das System eingeschwungen sein (stationärer Zustand).
- Die Nutzung der Strombegrenzung liefert einen konstanten Dämpfungsstrom.
- Vor der Messung den Nullpunkt des Schwingers definieren: Exzenter von Hand auf Nullstellung drehen, ‚*Fenster – Messparameter anzeigen*' *oder* rechte Maustaste auf Anzeige oder Button von Winkel α_{A1} und den Button → 0 ← drücken.
- Die Spitzen von Hebel und Zeiger repräsentieren die Bewegungsverläufe.

<u>a) Quasistatische Anregung ($\eta \ll 1$):</u>

Beide Regler am Motor auf Minimum ($U_M \sim 1{,}7$ V) und den Strom der Wirbelstrombremse auf $I \approx 0{,}8$ A einstellen. Den Motor einschalten und die Bewegung von Hebel und Zeiger am Drehpendel beobachten. Beide sollten annähernd in Phase schwingen und die maximale Amplitude der Auslenkung etwa $\hat{y} = 0{,}5\,Skt$ betragen.

<u>b) Amplituden- und Phasenverlauf:</u>

Die Amplituden- und Phasenverläufe in Abhängigkeit der Erregerfrequenz sind bei zwei unterschiedlichen Dämpfungen entsprechend der unten stehenden Vorgehensweise mit folgend einzustellenden Parametern zu messen:

- Strom der Wirbelstrombremse: $I_D \approx 0{,}5$ A bzw. $I_D \approx 0{,}8$ A
- Spannung am Erregermotor U_M: 8,5V | 8,25V | 8V | 7,5V | 7V | 6V | 5V | 2,5V |
  8,75V | 9V | 9,5V | 10V | 11V | 12V | 14V | 16V.

<u>Vorgehensweise:</u>

- Motor ausschalten - Schalterstellung ‚0'
- Strom der Wirbelstrombremse einstellen (Stromregler nutzen)
- Motorspannung mit Hilfe der zwei Regler (grob und fein) einstellen
- Exzenter auf Nullstellung und den Winkel α_{A1} zu Null setzen (Button → 0 ←)
- Motor einschalten - Schalterstellung ‚1'
- Abwarten bis das System eingeschwungen ist (stationärer Zustand)
- Messung starten
- Erregerperiode, Schwingungsamplitude und Phasenverschiebung ermitteln

Ermitteln Sie jeweils die die Periodendauer T_E des Erregers, die Auslenkung $\hat{y}$ des Schwingers und die Phasenverschiebung φ zwischen Erreger und Schwinger.

Protokollieren Sie die Werte in einer Tabelle.

Hinweise zur Auswertung:

- Der Impuls der Lichtschranke erfolgt beim Durchlauf der Exzentermarkierung am feststehenden Pfeil, dieser repräsentiert die 0°-Phaselage der Erregerschwingung.
- Da die Messung durch die ansteigende Impulsflanke der Lichtschranke getriggert wird, kann die Periodendauer T_E direkt durch einen Mausklick auf die zweite Impulsflanke in der Tabelle abgelesen werden.
- Zur Ermittlung der Schwingungsamplitude: Kontextmenü (rechte Maustaste auf Tabelle oder Diagramm) *Weitere Auswertungen - Minimum und Maximum bestimmen* und Bereich bzw. Kurve markieren.
  - Zur Ermittlung der Phasenverschiebung: Zeitdifferenz Δt zwischen der Impulsflanke und dem 0°-Phaselage des Schwingers messen und die Dreisatzregel anwenden: $\varphi = 360° \cdot \Delta t / T_E$. Für den 0°-Phaselage des Schwingers zunächst eine waagerechte Linie (Alt-W) mittig zwischen y_{max} und y_{min} positionieren, in den gewünschten Bereich zoomen (Alt-Z) und eine senkrechte Linie (Alt-S) auf den Schnittpunkt der Schwingung mit der waagerechten Linie einfügen.

5. Auswertung

- Stellen sie grafisch 3 Schwingungsverläufe mit Triggerimpuls für $\varphi < 90°$, $\varphi \approx 90°$ und $\varphi > 90°$ dar und veranschaulichen Sie die Ermittlung des Amplitudenwertes und der Phasenverschiebung.
- Errechnen Sie für alle Messpunkte das Kreisfrequenzverhältnis, die normierte Amplitude und die Phasenverschiebung zwischen Erreger und Schwinger.
- Der Amplituden- und der Phasenverlauf soll als Funktion des Kreisfrequenzverhältnises grafisch dargestellt werden. Hierzu die berechneten Werte in die Tabelle der CASSYLab Vorlage ‚Amplituden-Resonanzkurve und Phasenverlauf' eintragen und die Skalierung anpassen .
- Ermitteln Sie den Dämpfungsgrad zu Ihren Messungen indem Sie den Dämpfungswert *(Rechner - Parameter – Dämpfung D – Wert:)* so variieren, dass sich die errechneten Amplituden- und Phasenverlaufskurven den Messpunkten anpassen.

Drehpendel nach Pohl - Erzwungene harmonische Schwingungen

Datum:

Tabelle zur Ermittlung von Kreisfrequenzverhältnis, normierter Amplitude und Phasenverschiebung

Eigenperiode T_0 =	Eigenfrequenz f_0 =	Amplitude (bei $\eta = 0$) $\hat{y}$ =

Einstellungen		Messungen			Berechnungen			
Dämpfungsstrom I_D =								
Motor-spannung U_M	entprechende Skalenstellung am Motor	Erreger-periode T_E	Schwingungs amplitude $\hat{y}$	Zeit-differenz Δt	Erreger-frequenz f_E	Kreisfrequenz-verhältnis η	Normierte Amplitude y_N	Phasen-verschiebung φ
2,50 V	10							
5,00 V	20							
6,00 V	22							
7,00 V	27							
7,50 V	28							
8,00 V	30							
8,25 V	30							
8,50 V	30							
8,75 V	30							
9,00 V	32							
9,50 V	35							
10,00 V	38							
11,00 V	40							
12,00 V	43							
14,00 V	50							
16,00 V	60							