Einführung in die Technische Akustik

Inhalt

1 Grundbegriffe der Schwingungslehre

1.1 Harmonische Schwingungen

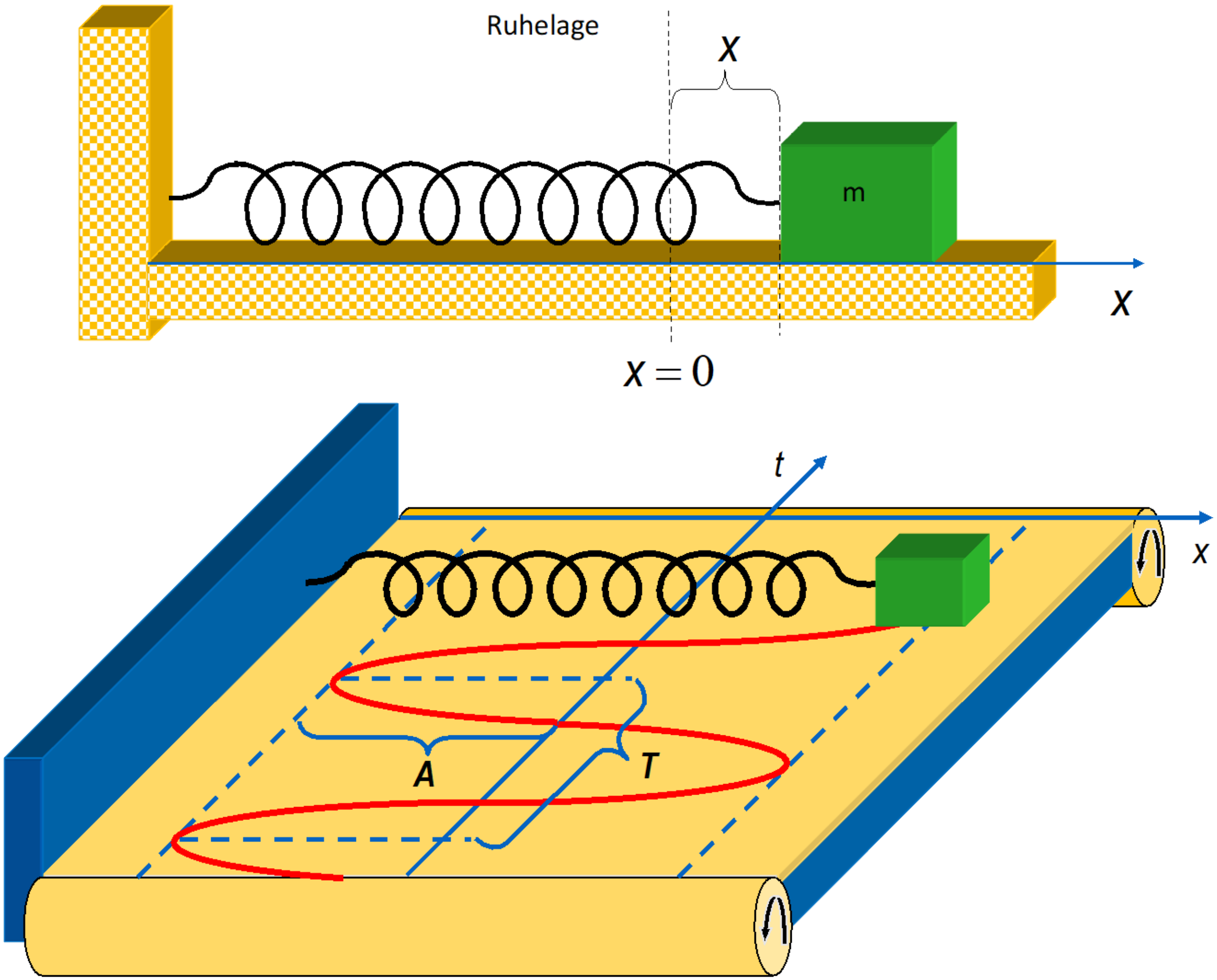
Unter allen Schwingungsformen nehmen die harmonischen Schwingungen eine zentrale Stellung ein.

Ihr Zeitgesetz, d.h. ihre funktionale Abhängigkeit von der Zeit, wird durch eine Kosinus- bzw. Sinusfunktion wie folgt beschrieben.

$$x(t) = A\cos(\omega t + \vartheta)$$

mit

A:	Amplitude	$f = \omega/2\pi$:	Frequenz
ω:	Kreisfrequenz	$T = 1/f$:	Schwingungsdauer
ϑ:	Nullphasenwinkel		


Ruhelage
x
m
x
x = 0
t
x
A
T

Beschreibt $x(t)$ die zeitabhängige Auslenkung eines Punktes aus der Ruhelage, dann gibt

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \vartheta)$$

die Geschwindigkeit/Schwingungsschnelle an.

In komplexer Darstellung kann man die harmonische Schwingung durch

$$\underline{x}(t) = A e^{j(\omega t + \vartheta)}$$

ausdrücken, wobei

$$x(t) = \mathrm{Re}\{\underline{x}(t)\} = \mathrm{Re}\left\{A e^{j(\omega t + \vartheta)}\right\} = A\cos(\omega t + \vartheta)$$

gilt.

Die komplexe Darstellung ist insbesondere beim Differenzieren und Integrieren von Schwingungsfunktionen vorteilhaft.

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{x}(t) \quad \text{und} \quad \int \underline{x}(t)dt = \frac{1}{j\omega}\underline{x}(t)$$

1.2 Überlagerung von Schwingungen

Superpositionsprinzip

Die Auslenkungen sich überlagernder harmonischer Schwingungen können addiert werden, wenn die Summe der Auslenkungen den elastischen (linearen) Bereich des Schwingungssystems nicht übersteigt.

Die überlagerten harmon. Schwingungen können sich in ihrer

- Phase
- Amplitude
- Frequenz

unterscheiden.

1.2.1 Überlagerung harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

Es seien

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \vartheta_1) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{y}_1(t) \right\} = \mathrm{Re}\left\{ A_1 e^{j(\omega t + \vartheta_1)} \right\}$$

$$y_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \vartheta_2) = \mathrm{Re}\left\{ \underline{y}_2(t) \right\} = \mathrm{Re}\left\{ A_2 e^{j(\omega t + \vartheta_2)} \right\}$$

zwei sich überlagernde harmonische Schwingungen. Die resultierende Schwingung lautet

$$
\begin{aligned}
y(t) = y_1(t) + y_2(t) \\
&= \mathrm{Re}\left\{\underline{y}_1(t)\right\} + \mathrm{Re}\left\{\underline{y}_2(t)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\left(A_1 e^{j\vartheta_1} + A_2 e^{j\vartheta_2}\right) e^{j\omega t}\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{A e^{j\vartheta} e^{j\omega t}\right\} = A\cos(\omega t + \vartheta),
\end{aligned}
$$

wobei sich A und ϑ aus

$$
\begin{aligned}
A e^{j\vartheta} &= A_1 e^{j\vartheta_1} + A_2 e^{j\vartheta_2} \\
&= A_1 \cos\vartheta_1 + A_2 \cos\vartheta_2 + j(A_1 \sin\vartheta_1 + A_2 \sin\vartheta_2)
\end{aligned}
$$

zu

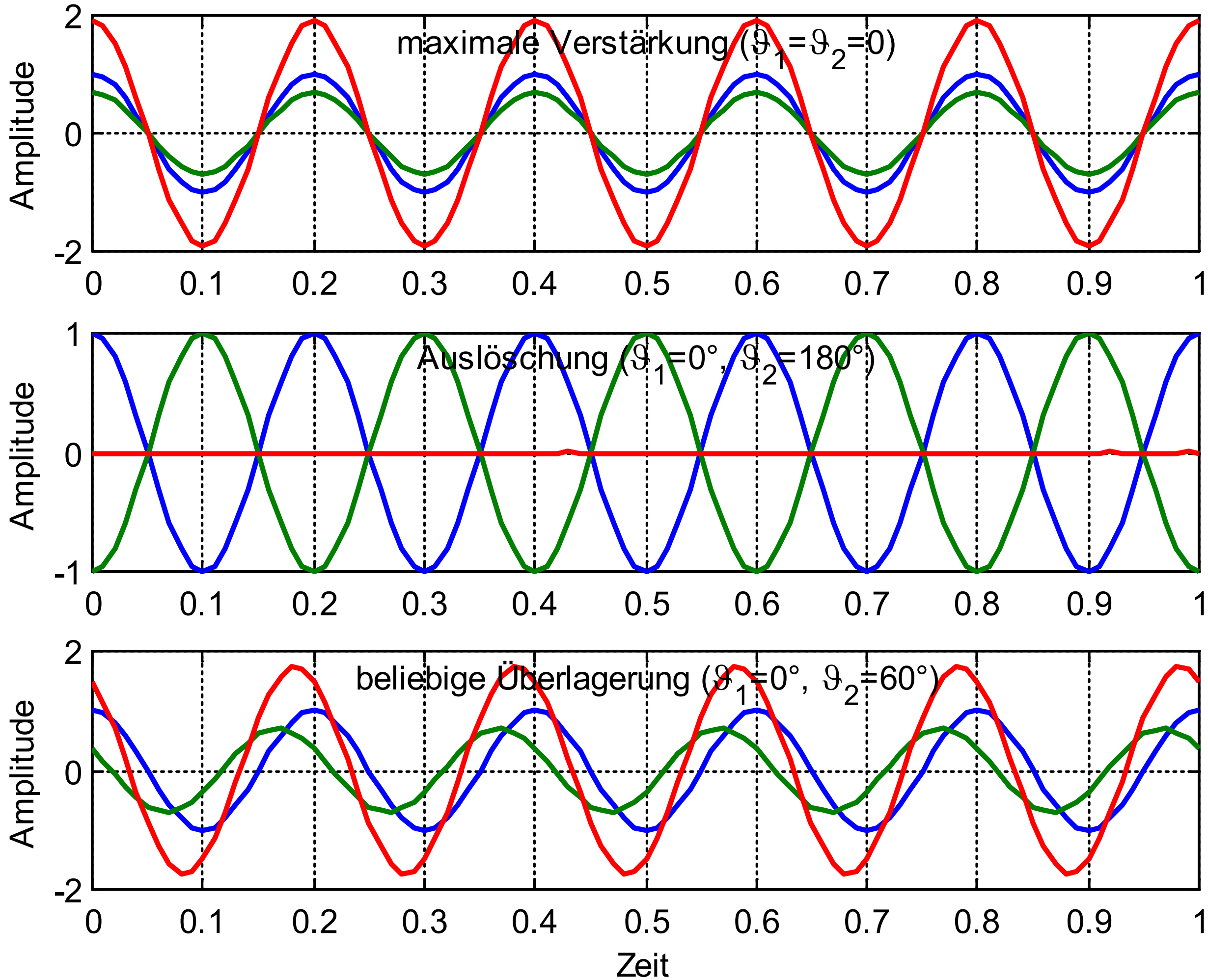
$$A = \sqrt{(A_1 \cos\vartheta_1 + A_2 \cos\vartheta_2)^2 + (A_1 \sin\vartheta_1 + A_2 \sin\vartheta_2)^2}$$
$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 (\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 + \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2)}$$
$$= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$$

und

$$\tan\vartheta = \frac{A_1 \sin\vartheta_1 + A_2 \sin\vartheta_2}{A_1 \cos\vartheta_1 + A_2 \cos\vartheta_2}$$

ergeben.

Spezialfälle



1.2.2 Überlagerung harmonischer Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen

a) geringe Frequenzunterschiede

Bei der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit nur geringfügigem Frequenzunterschied treten Schwebungen auf.

Die Amplitude der resultierenden Schwingung schwillt langsam an und wieder ab.

a1) reine Schwebung

Voraussetzung: $A_1 = A_2 = A$

o.B.d.A. sei $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$

Die Überlagerung der Schwingungen

$$y_1(t) = A\cos(\omega_1 t)$$
$$y_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$$

liefert mit Hilfe eines Additionstheorems die resultierende Schwingung

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)$$
$$= 2A\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right).$$

Dies kann als harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

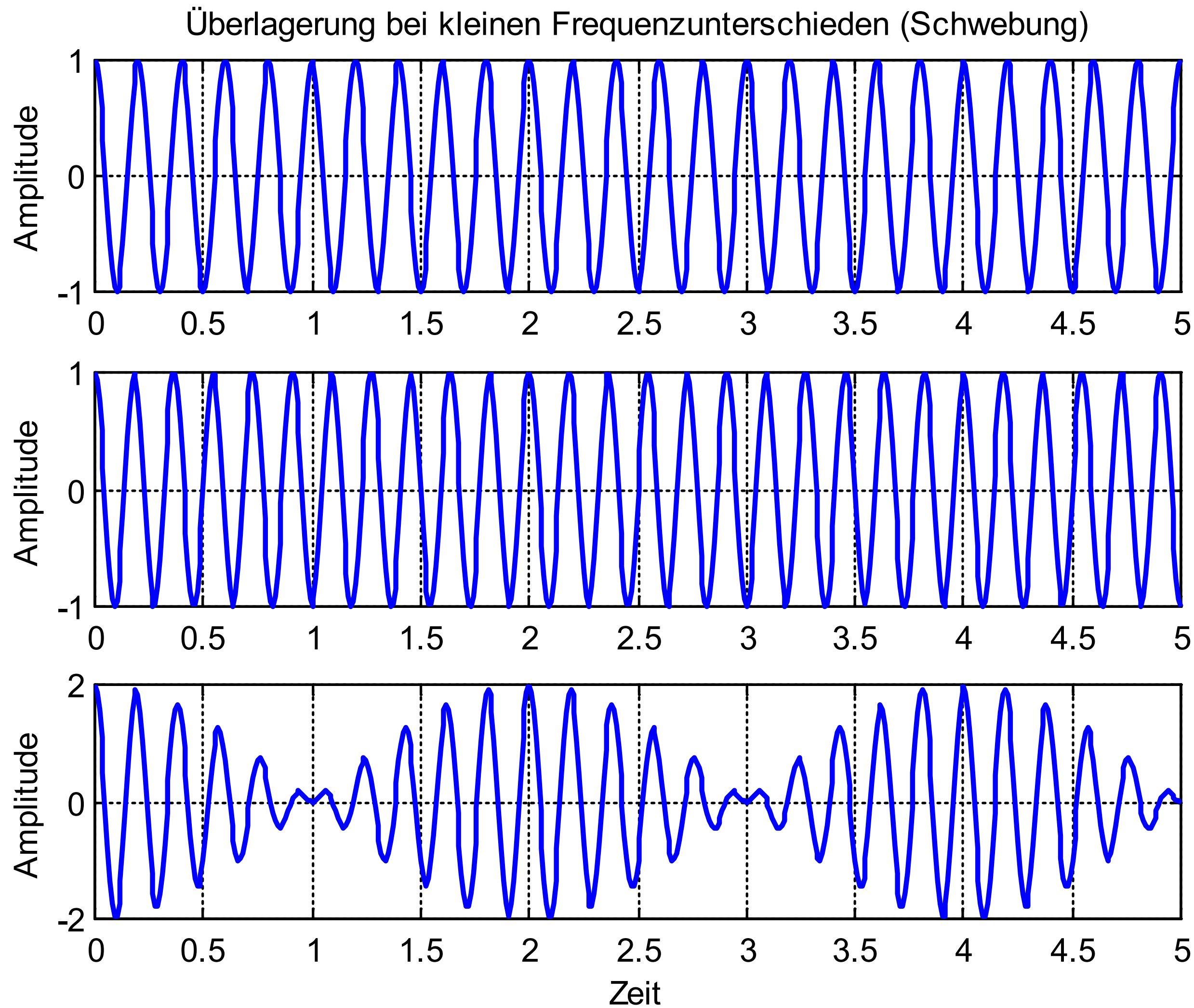
aufgefasst werden, die eine sich mit der Schwebungsfrequenz

$$f_s = \left| f_1 - f_2 \right| \quad \text{mit} \quad \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \pi\left(f_1 - f_2\right)$$

ändernde Amplitude besitzt, d.h.

$$y(t) = \underbrace{2A\cos\left(\pi f_s t\right)}_{\tilde{A}(t)} \cos(\omega t)$$

$$= \tilde{A}(t)\cos(\omega t).$$


Überlagerung bei kleinen Frequenzunterschieden (Schwebung)
Amplitude
Amplitude
Amplitude
Zeit
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5

Die Periodendauer der Schwebung ergibt sich zu

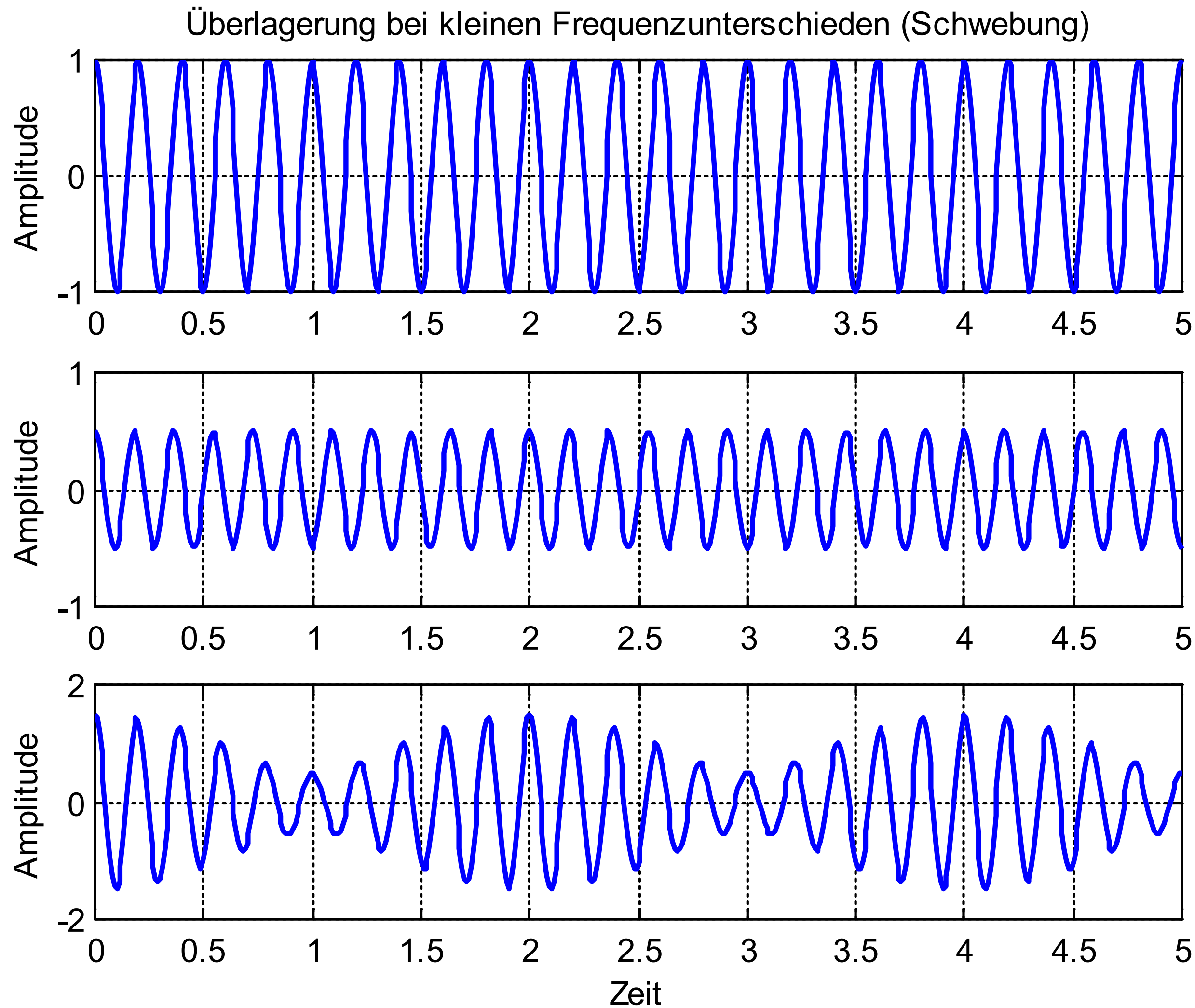
$$T_s = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{1}{|1/T_1 - 1/T_2|} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|}.$$

a2) unreine Schwebung

Voraussetzung: $A_1 \neq A_2$

o.B.d.A. sei $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$

Bei unreinen Schwebungen wird die Amplitude nie null, sondern lediglich periodisch minimal!

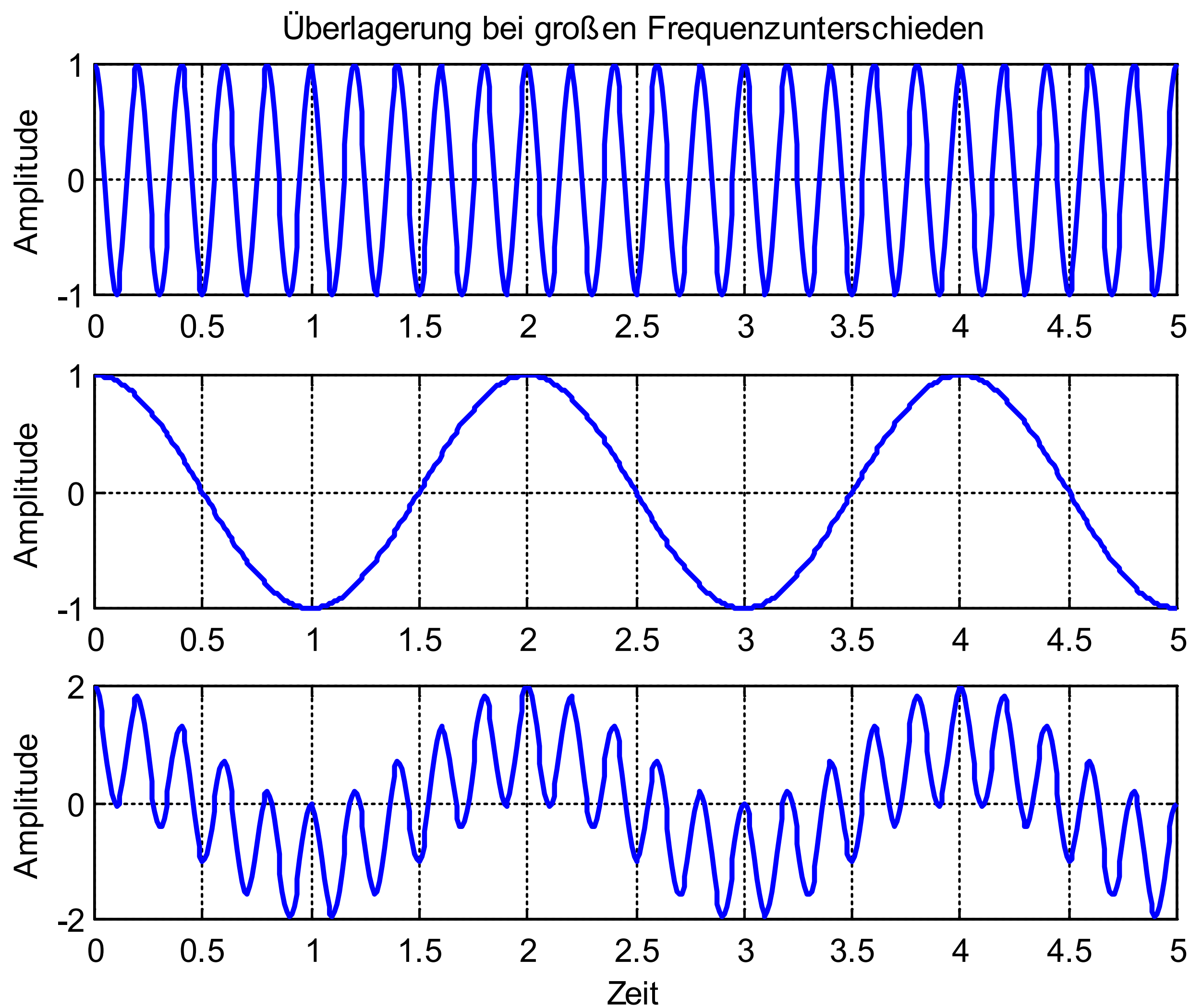

Überlagerung bei kleinen Frequenzunterschieden (Schwebung)
Amplitude
1
0
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Amplitude
1
0
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Amplitude
2
0
-2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Zeit

b) große Frequenzunterschiede

Es tritt keine Schwebung und keine harmonische Schwingung mehr auf.

Die Schwingung mit der größeren Frequenz (kleineren Periodendauer) schwingt um die periodische Achse, die durch die Schwingung mit der geringeren Frequenz (größeren Periodendauer) beschrieben wird.

Die Amplitude der resultierenden Schwingung ist gleich der Summe der Amplituden der Ausgangsschwingungen.


Überlagerung bei großen Frequenzunterschieden
Amplitude
1
0
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Amplitude
2
0
-2
Zeit

1.2.3 Fourier-Analyse

a) Fourier-Reihe

Bei der Überlagerung von Schwingungen, deren Frequenzen in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen, erhält man wieder ein periodisches Schwingungsmuster.

Beispiel: Überlagerung der Schwingungen

$$y_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$$
$$y_2(t) = A_2 \cos(3\omega t)$$

liefert

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\, f(t)$$

mit

$$f(t) = f(t + kT) \quad \text{und} \quad |f(t)| \leq 1,$$

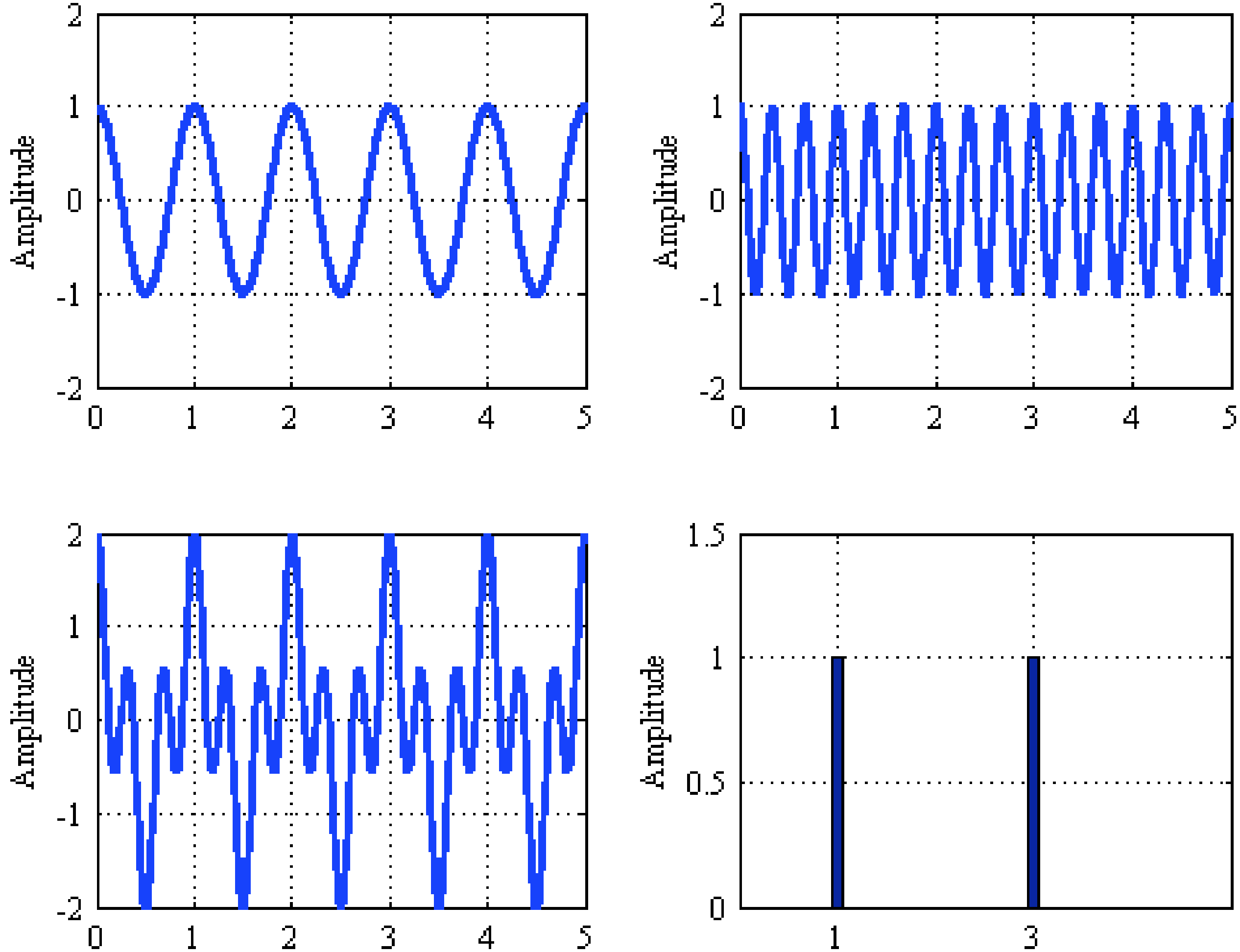
wobei

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{und} \quad A = A_1 + A_2.$$

Amplitudenspektrum

Die Funktion, die die Abhängigkeit der Amplitude als Funktion der (Kreis-)Frequenz angibt, d.h. zeigt welche Frequenzen mit welchen Amplituden zur resultierenden Schwingung beitragen, bezeichnet man als Amplitudenspektrum.

Überlagerung mit ganzzahligem Frequenzverhältnis



Die Zerlegung eines periodischen Schwingungsmusters in harmonische Schwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz sind, ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen möglich.

Eine periodische Schwingung lässt sich in eine Fourier-Reihe gemäß

$$y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\omega_0 t)+b_k\sin(k\omega_0 t)\right)$$

entwickeln, wobei

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

gilt.

Die Anteile mit

$k = 1$: bilden die Grundschwingung (1te Harmonische)

$k = 2$: 1te Oberschwingung (2te Harmonische)

$k = 3$: 2te Oberschwingung (3te Harmonische)

$\vdots$

$k = n$: $(n-1)$te Oberschwingung (n-te Harmonische)

Für die Entwickelbarkeit einer periodischen Schwingung in eine Fourier-Reihe ist es hinreichend, dass die Schwingung $y(t)$ der Dirichlet-Bedingung genügt.

Dirichlet-Bedingung

1) $y(t)$ muss beschränkt sein
2) $y(t)$ darf im Intervall $[-T/2, T/2]$ höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen besitzen.
3) $y'(t)$ muss im Intervall $[-T/2, T/2]$ bis auf höchstens endlich viele Stellen stetig sein.

Bei den in der Praxis auftretenden periodischen Schwingungen kann man in der Regel davon ausgehen, dass die Dirichlet-Bedingung erfüllt wird.

Die a_k und b_k bezeichnet man als die Fourier-Koeffizienten. Sie berechnen sich ausgehend von

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) \right)$$

durch Multiplikation mit

$$\cos(l\omega_0 t) \quad \text{bzw.} \quad \sin(l\omega_0 t)$$

und anschließender Integration über eine Periode

$$\int_{-T/2}^{T/2} y(t) \begin{Bmatrix} \cos(l\omega_0 t) \\ \sin(l\omega_0 t) \end{Bmatrix} dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2} \begin{Bmatrix} \cos(l\omega_0 t) \\ \sin(l\omega_0 t) \end{Bmatrix} dt + \ldots$$

$$\ldots + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} a_k \cos(k\omega_0 t) \begin{Bmatrix} \cos(l\omega_0 t) \\ \sin(l\omega_0 t) \end{Bmatrix} dt$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-T/2}^{T/2} b_k \sin(k\omega_0 t) \begin{Bmatrix} \cos(l\omega_0 t) \\ \sin(l\omega_0 t) \end{Bmatrix} dt$$

sowie Ausnutzen der Eigenschaften

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(l\omega_0 t) dt = 0 \quad l \neq 0, \quad \int_{-T/2}^{T/2} \sin(l\omega_0 t) dt = 0,$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 t) \sin(l\omega_0 t) dt = 0$$

und

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(k\omega_0 t)\cos(l\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0: & k \neq l \\ T/2: & k = l \end{cases}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin(k\omega_0 t)\sin(l\omega_0 t)\,dt = \begin{cases} 0: & k \neq l \\ T/2: & k = l \end{cases}$$

zu

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Die Integrationsgrenzen, die hier mit $\pm T/2$ angenommen worden sind, können beliebig gewählt werden solange sich die Integration über eine volle Periode erstreckt.

Die Kosinus- und Sinusglieder gleicher Frequenzen können jeweils zu resultierenden Kosinus- oder Sinusglieder zusammengefasst werden.

$$
\begin{aligned}
a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) &= A_k \sin(k\omega_0 t + \vartheta_k) = \\
&= A_k \left[\sin\vartheta_k \cos(k\omega_0 t) + \cos\vartheta_k \sin(k\omega_0 t)\right]
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$A_k \sin\vartheta_k = a_k \quad \text{und} \quad A_k \cos\vartheta_k = b_k .$$

Daraus folgt

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \text{und} \quad \tan \vartheta_k = \frac{a_k}{b_k}.$$

Die Fourier-Reihe kann somit auch durch

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \vartheta_k)$$

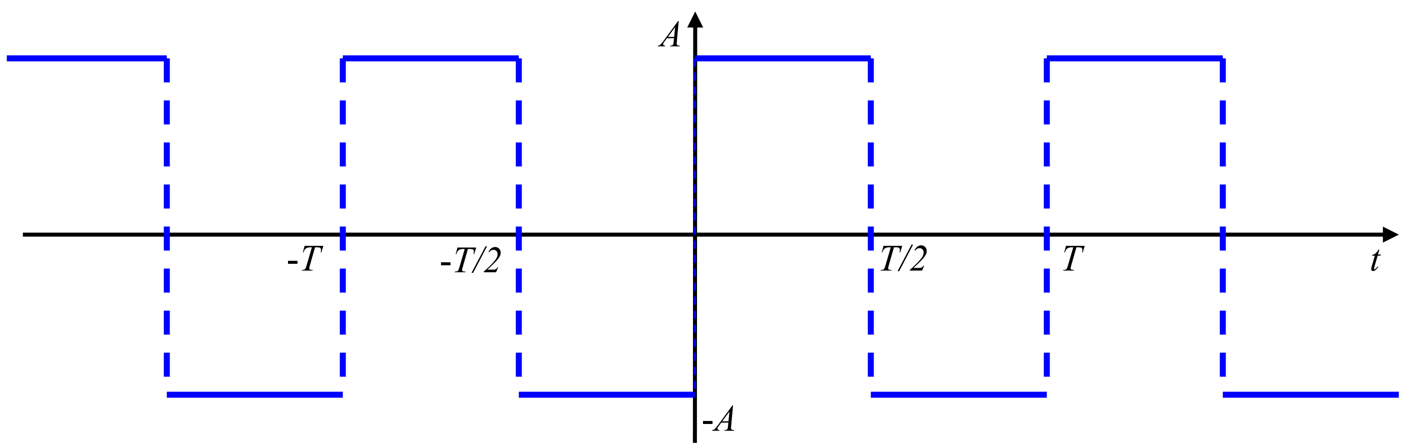
ausgedrückt werden.

Man erhält einen anschaulichen Überblick über die in einer periodischen Schwingung enthaltenen harmonischen Schwingungskomponenten, wenn man die Amplituden A_k über der Frequenz in einem sogenannten Amplitudenspektrum darstellt.

A_k gibt dabei die Amplitude der k-ten Harmonischen bzw. der $(k-1)$-ten Oberschwingung an.

Das Amplitudenspektrum enthält aber keine Information über die Phasenlagen der harmonischen Schwingungskomponenten.

Beispiel: Fourier-Reihe der Rechteckschwingung



Da $y(t)$ eine ungerade Funktion ist, d.h. $y(t) = -y(-t)$, gilt

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \cos(k\omega_0 t)\, dt = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

und

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) \sin(k\omega_0 t)\, dt$$

$$= \frac{2A}{T} \left\{ -\int_{-T/2}^{0} \sin(k\omega_0 t)\, dt + \int_{0}^{T/2} \sin(k\omega_0 t)\, dt \right\}$$

$$= \frac{2A}{T} \left\{ \frac{1}{k\omega_0} \cos(k\omega_0 t) \Big|_{-\frac{T}{2}}^{0} - \frac{1}{k\omega_0} \cos(k\omega_0 t) \Big|_{0}^{\frac{T}{2}} \right\} = \ldots$$

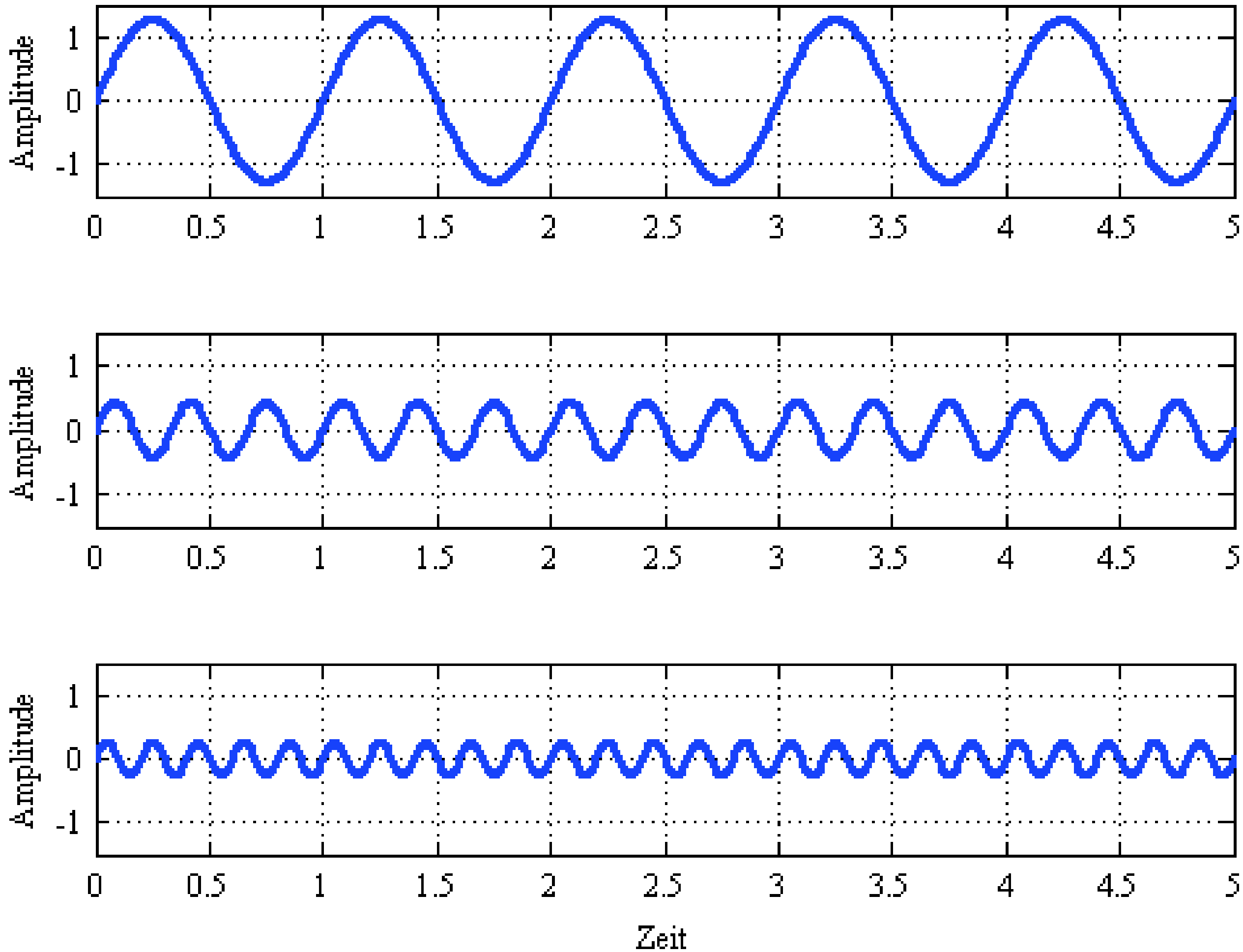
$$\ldots = \frac{A}{k\pi}\left(1 - 2\cos(k\omega_0 T/2) + 1\right)$$

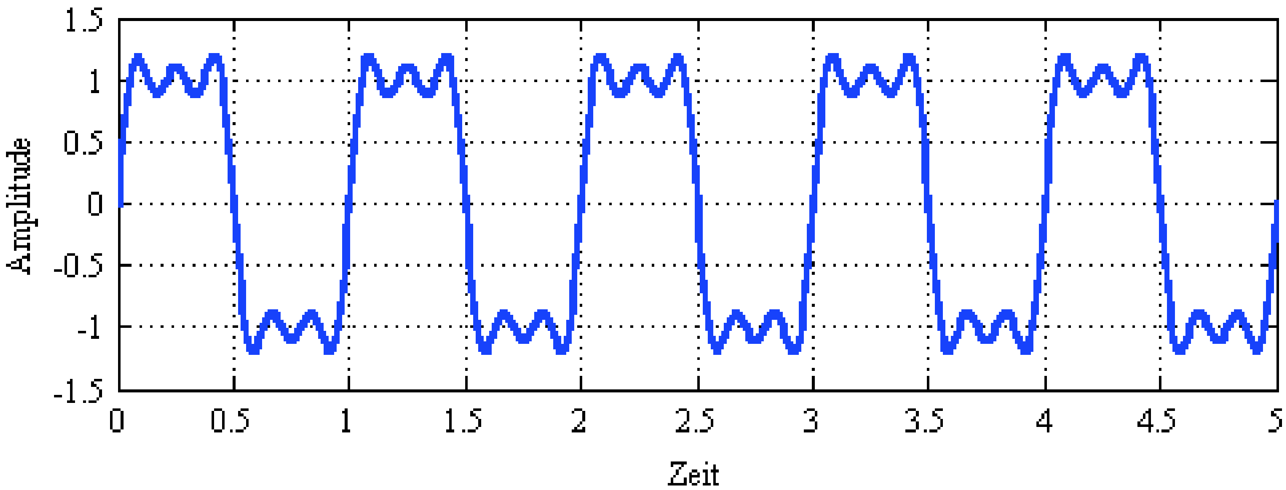
$$= \frac{A}{k\pi}\left(2 - 2(-1)^k\right) = \left\{\begin{matrix} 0 & \text{für} & k = 0,2,4\ldots \\ \dfrac{4A}{k\pi} & \text{für} & k = 1,3,5\ldots \end{matrix}\right\}.$$

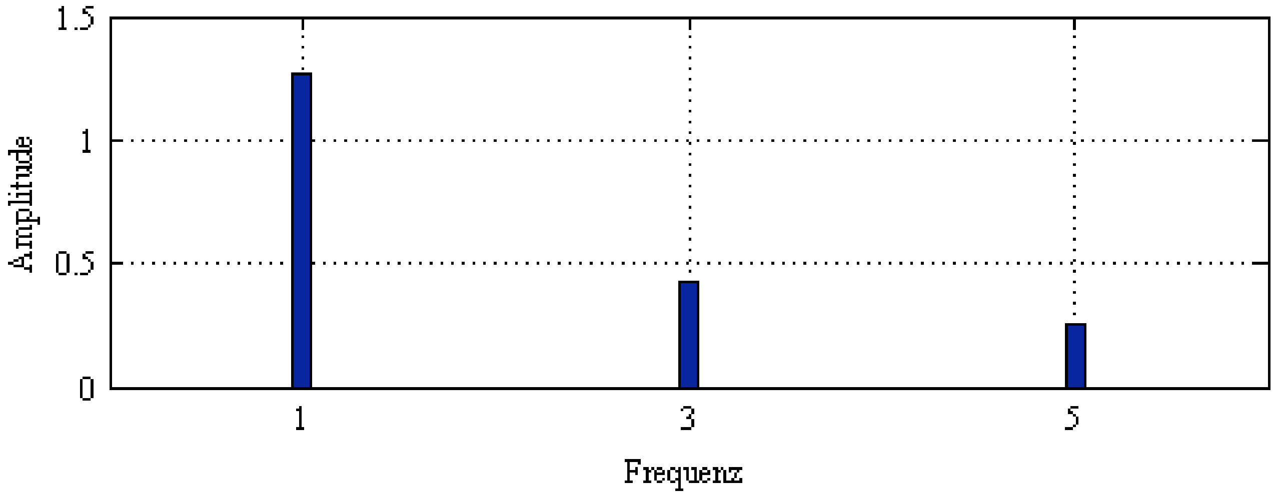
Mit $A_k = b_k = 4A/k\pi$ sowie $\vartheta_k = 0$ für $k = 1,2,3,\ldots$ ergibt sich die Fourier-Reihe der Rechteckschwingung schließlich zu

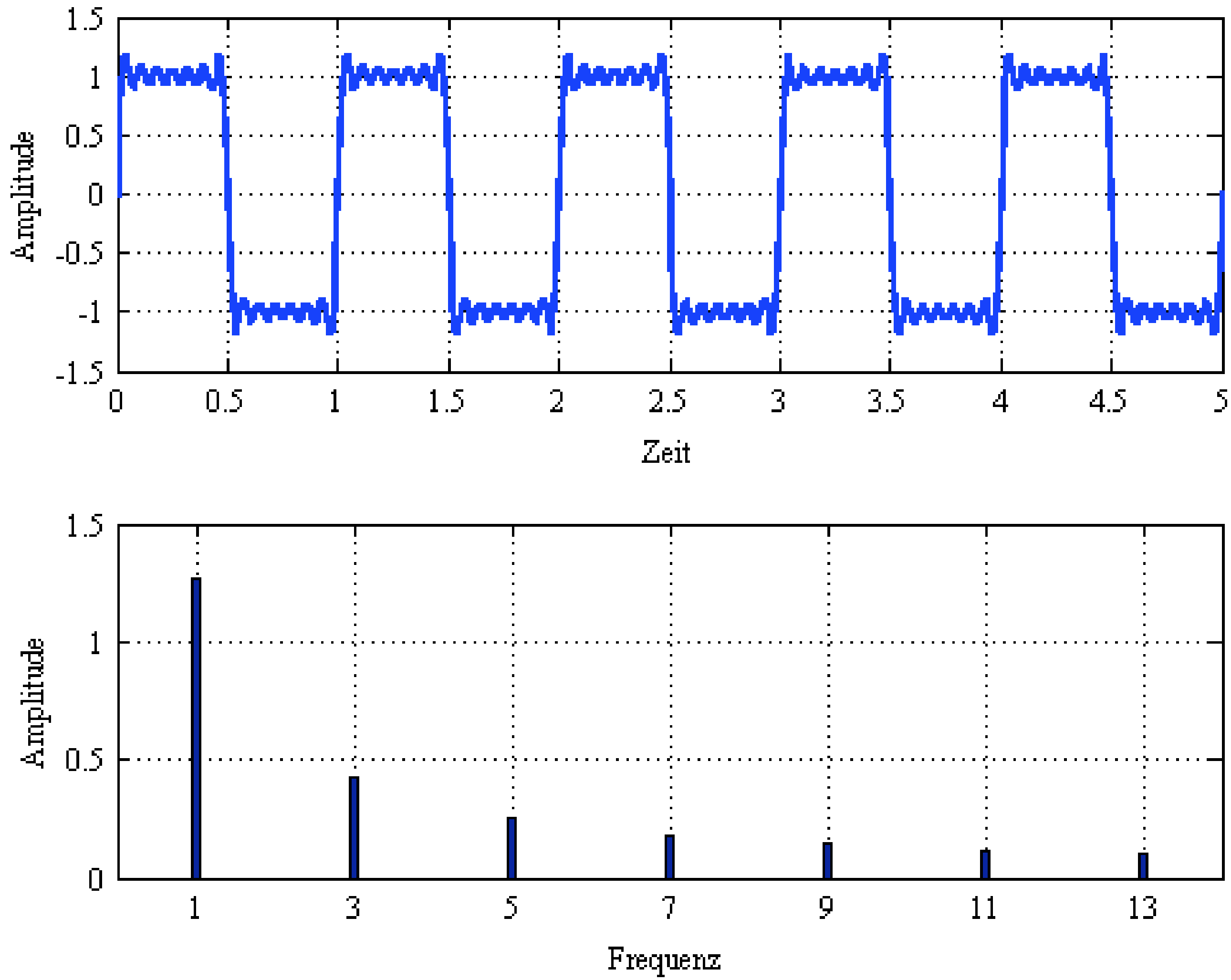
$$y(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \vartheta_k)$$

$$= \frac{4A}{\pi}\left(\sin(\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \ldots\right).$$


Amplitude
1
0
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Zeit


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
Amplitude
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Zeit


1.5
1
0.5
0
Amplitude
1
3
5
Frequenz


Amplitude
Zeit
Amplitude
Frequenz

b) Fourier-Reihe in komplexer Darstellung

Ausgehend von den Eulerschen Gleichungen

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) - j\sin(\omega_0 t)$$

erhält man durch Addition bzw. Subtraktion

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$$

$$\sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right).$$

Einsetzen in die reelle Fourier-Reihe

$$y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(k\omega_0 t)+b_k\sin(k\omega_0 t)\right)$$

liefert

$$y(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{2}\left(e^{jk\omega_0 t}+e^{-jk\omega_0 t}\right)+\frac{b_k}{2j}\left(e^{jk\omega_0 t}-e^{-jk\omega_0 t}\right)\right)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k-jb_k)e^{jk\omega_0 t}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_k+jb_k)e^{-jk\omega_0 t}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t},$$

wobei

$$c_0 = a_0/2, \qquad c_k = (a_k - jb_k)/2 \quad k > 0 \quad \text{und} \quad c_{-k} = c_k^*.$$

Die komplexen Fourier-Koeffizienten können mittels

$$\begin{aligned} c_k &= (a_k - jb_k)/2 \\ &= \frac{1}{T}\left\{\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\cos(k\omega_0 t)\,dt - j\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\sin(k\omega_0 t)\,dt\right\} \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)\left[\cos(k\omega_0 t) - j\sin(k\omega_0 t)\right]dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} y(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt \end{aligned}$$

auch direkt bestimmt werden.

Anmerkung:

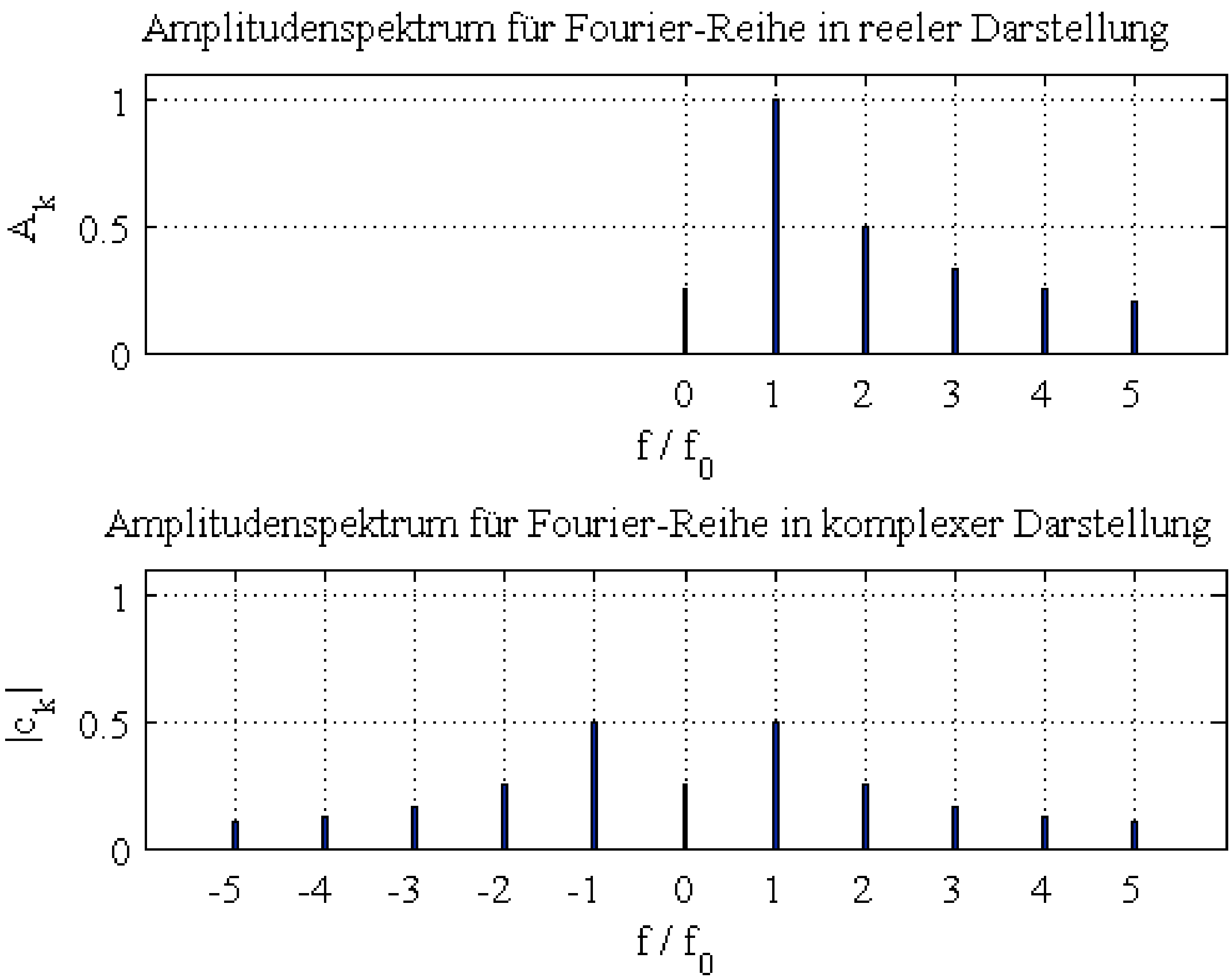
Die Paare

$$c_k e^{jk\omega_0 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_0 t} \quad k = 1,2,3,\ldots$$

sind reell. Ein solches Paar entspricht genau der Darstellung einer Sinusschwingung durch ihre komplexe Amplitude

$$\frac{1}{2}\left(\underline{U}\, e^{jk\omega_0 t} + \underline{U}^* e^{-jk\omega_0 t}\right).$$

Die c_k stimmen also bis auf den Faktor 1/2 mit der komplexen Amplitude der Wechselstromrechnung überein. Sie bestimmen wie diese die Amplitude und den Nullphasenwinkel der betreffenden Schwingung.


Amplitudenspektrum für Fourier-Reihe in reeler Darstellung
A_k
1
0.5
0
0 1 2 3 4 5
f / f_0
Amplitudenspektrum für Fourier-Reihe in komplexer Darstellung
$|c_k|$
1
0.5
0
-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
f / f_0

Zwischen den Amplituden der reellen und komplexen Fourier-Reihe bestehen die Zusammenhänge:

$$c_0 = A_0 = a_0/2, \quad |c_{-k}| = |c_k|, \quad A_k = 2|c_k| \quad k > 0$$

c) Fourier-Integral

Es stellt sich nun die Frage, ob auch nichtperiodische Funktionen in harmonische Schwingungen zerlegt werden können.

Hierzu führt man eine periodische Funktion $f_T(t)$ ein, in dem man den Ausschnitt von $f(t)$ über $-T/2 < t < T/2$ periodisch wiederholt, d.h.

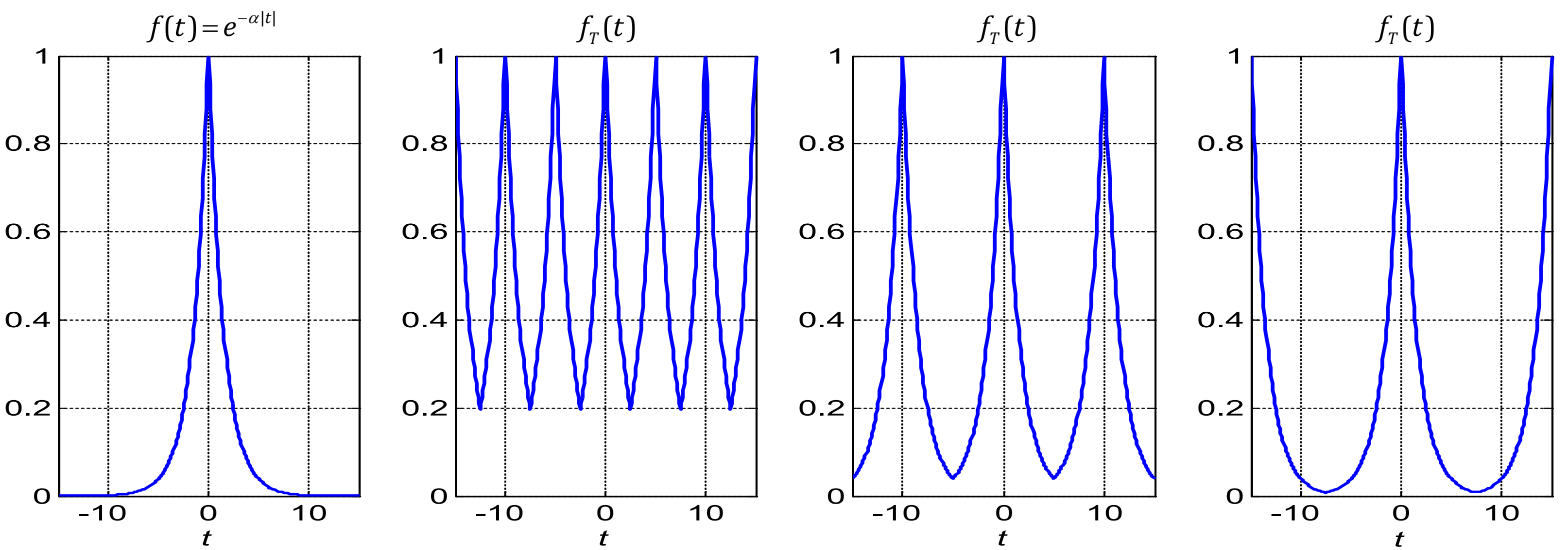
$$f_T(t) = f(t) \quad \text{für} \quad -T/2 < t < T/2$$

und

$$f_T(t) = f_T(t+T) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich gilt

$$f(t) = \lim_{T\to\infty} f_T(t).$$



Für $f_T(t)$ existiert die komplexe Fourier-Reihe

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

mit der Grundkreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ und den komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Beim Grenzübergang strebt die Grundkreisfrequenz ω_0 und damit auch der Abstand zweier benachbarter Frequenzen des Spektrums gegen Null.

Das Linienspektrum (mit einer abzählbaren Menge beitragender Frequenz-Komponenten) geht dabei in ein kontinuierliches Spektrum (mit einer überabzählbaren Menge beitragender Frequenz-Komponenten) über.

Um dies anzudeuten, schreibt man $\Delta\omega$ statt ω_0, also

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{statt} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}.$$

Anwendung dieser Schreibweise liefert mit $T = 2\pi/\Delta\omega$

$$c_k = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t)\, e^{-jk\Delta\omega t}\, dt$$

und

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k 2\pi}{\Delta\omega} e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega.$$

Beim Grenzübergang $\Delta\omega \to 0$ kann $k\Delta\omega$ jeden beliebigen Wert ω annehmen, wenn man k nur genügend groß wählt.

Für alle ω für die

$$\int_{-\pi/\Delta\omega}^{\pi/\Delta\omega} f(t) e^{-jk\Delta\omega t} dt$$

endlich bleibt, folgt, dass beim Grenzübergang

$$\Delta\omega \to 0 \quad \text{auch} \quad c_k \to 0$$

aber

$$\frac{2\pi c_k}{\Delta\omega} \rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

strebt. $F(\omega)$ bezeichnet man als die Fourier-Transformierte von $f(t)$.

Die Fourier-Reihe geht beim Grenzübergang $\Delta\omega \rightarrow 0$, d.h. $T \rightarrow \infty$, in das Integral

$$f(t) = \lim_{T\rightarrow\infty} f_T(t) = \lim_{T\rightarrow\infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi c_k}{\Delta\omega} e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

über. Es wird als Umkehrintegral der Fourier-Transformation bezeichnet.

Die Fourier-Transformation

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t} dt$$

und die inverse Fourier-Transformation

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t} d\omega$$

bilden das sogenannte Fourier-Transformationspaar.

Bisher wurde stillschweigend davon ausgegangen, dass die Grenzübergänge, die das Fourier-Transformationspaar liefern, ungeachtet der Eigenschaften der Zeitfunktion zulässig sind.

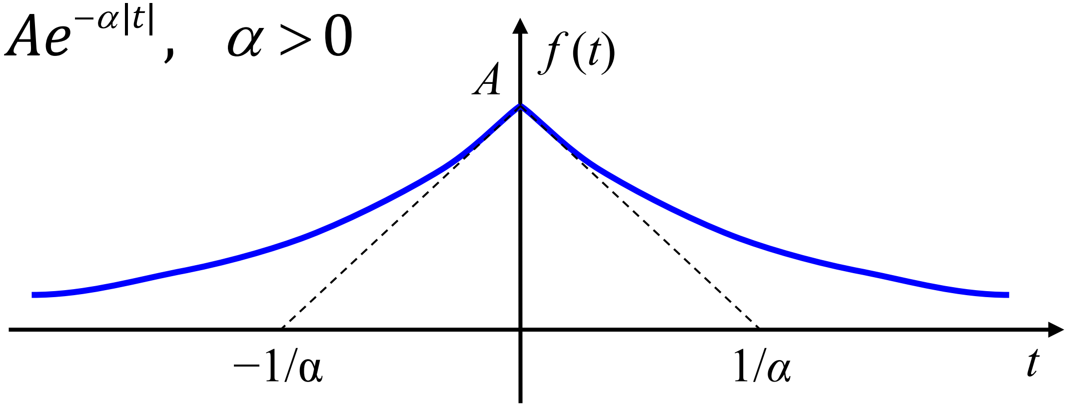
Hinreichend für die Gültigkeit des Fourier-Transformations-paares sind

1) Die Zeitfunktion $f(t)$ ist absolut integrierbar, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt < \infty.$$

2) Die Zeitfunktion $f(t)$ ist in jedem endlichen Intervall stück-weise stetig differenzierbar (von beschränkter Variation).

<u>Beispiel:</u> $f(t) = Ae^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$



$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\alpha|t|}e^{-j\omega t}dt$$

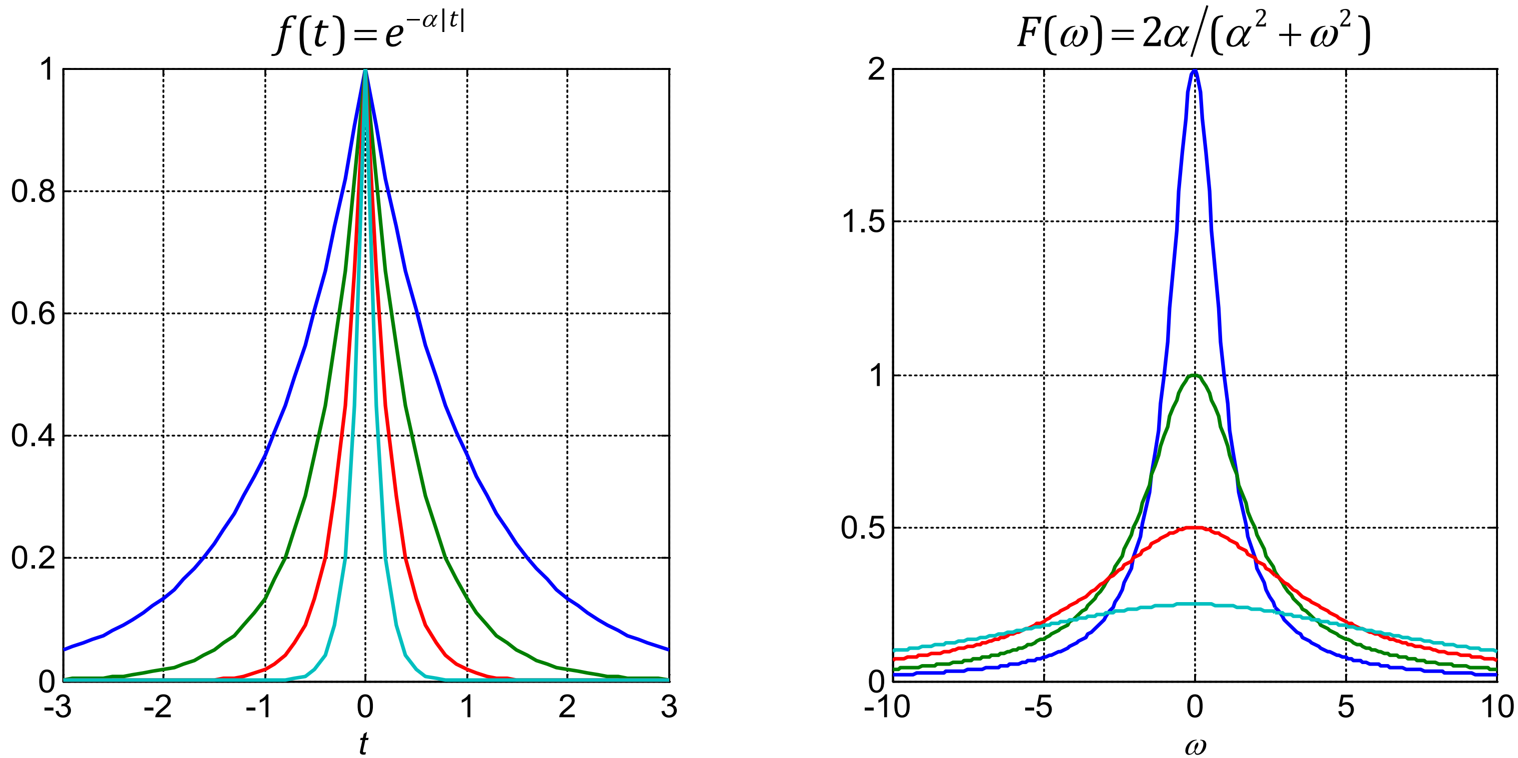
$$=A\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-j\omega t}dt+A\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\omega t}dt$$

$$=A\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-j\omega)t}dt+\int_{0}^{\infty} e^{(-\alpha-j\omega)t}dt\right\}$$

$$=A\left\{\left.\frac{e^{(\alpha-j\omega)t}}{\alpha-j\omega}\right|_{-\infty}^{0}+\left.\frac{e^{(-\alpha-j\omega)t}}{-\alpha-j\omega}\right|_{0}^{\infty}\right\}=A\left\{\frac{1}{\alpha-j\omega}-\frac{1}{-\alpha-j\omega}\right\}$$

$$=A\left\{\frac{1}{\alpha-j\omega}+\frac{1}{\alpha+j\omega}\right\}=A\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}$$

Unvereinbarkeit von strenger Zeit- und Frequenzbegrenztheit am Beispiel von $f(t)=e^{-\alpha|t|}$.



1.3 Mechanische Impedanz

Die mechanische Impedanz ist der Widerstand, den eine elastische Struktur den wirkenden Kräften entgegensetzt.

Ist F die angreifende Kraft und v die Teilchen-/Systemgeschwindigkeit dann gibt das Verhältnis

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{v}(t)}$$

unter Voraussetzung, dass beide in gleicher Richtung wirken und $\underline{F}(t)$ und $\underline{v}(t)$ den harmonischen Schwingungsgesetzen

$$\underline{F}(t) = \hat{F} e^{j(\omega t + \varphi_1)} = \underline{F}\, e^{j\omega t} \quad \text{bzw.} \quad \underline{v}(t) = \hat{v} e^{j(\omega t + \varphi_2)} = \underline{V}\, e^{j\omega t}$$

gehorchen, die mechanische Impedanz eines Systems bzw. eines bestimmten Punktes des Systems an.

Die Geschwindigkeit der Teilchen *v* wird in der Akustik zur Abkürzung und Unterscheidung von der Schallausbreitungsgeschwindigkeit *c*, Schallschnelle oder kurz Schnelle genannt.

Durch Einsetzen von $\underline{F}(t)$ und $\underline{v}(t)$ ergibt sich die mechanische Impedanz zu

$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}(t)}{\underline{v}(t)} = \frac{\underline{F}}{\underline{V}} = \frac{\hat{F}}{\hat{v}} e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = \left|\underline{Z}_m\right| e^{j\vartheta}$$

mit

$$\left|\underline{Z}_m\right| = \frac{\hat{F}}{\hat{v}} \quad \text{und} \quad \vartheta = \varphi_1 - \varphi_2 .$$

1.4 Mechanisches Resonanzsystem

Das System besteht aus

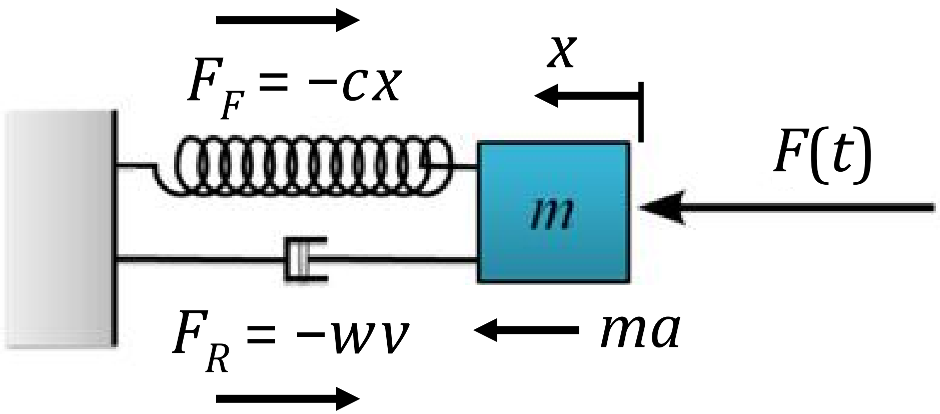
- einer Masse m,
- einer Feder mit der Nachgiebigkeit n,
  bzw. Federkonstante $c = 1/n$,
- einem Verlustwiderstand w.

Dabei ist

$$n = \frac{\text{Auslenkung}}{\text{Federkraft}} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{Kehrwert der}\\ \text{Federkonstante}\end{array}\right)$$

und

$$w = \frac{\text{Reibungskraft}}{\text{Schnelle}} \qquad \left(\begin{array}{c}\text{geschwindigkeitspro-}\\ \text{portionale Reibung}\end{array}\right)$$



Nach dem Newtonschen Bewegungsgesetzen gilt

$$F(t) + F_F + F_R = ma = m\frac{dv}{dt},$$

wobei

$$F_F = -cx = -\frac{1}{n}x = -\frac{1}{n}\int v\,dt$$

die Federkraft,

$$F_R = -wv$$

die Reibungskraft und $F(t)$ die erregende äußere Kraft bezeichnet. Einsetzen von F_F und F_R in die Bewegungsgleichung liefert nach Umformen

$$F(t) = m\frac{dv}{dt} + wv + \frac{1}{n}\int v dt.$$

Bei harmonischem (erregenden) Kraftverlauf mit der Kreisfrequenz ω ergibt sich aus

$$\underline{F}\, e^{j\omega t} = m\frac{d}{dt}\left(\underline{V}\, e^{j\omega t}\right) + w\left(\underline{V}\, e^{j\omega t}\right) + \frac{1}{n}\int \underline{V}\, e^{j\omega t} dt = \ldots$$

$$\ldots = j\omega m \underline{V} e^{j\omega t} + w \underline{V} e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega n} \underline{V} e^{j\omega t}$$

und

$$\underline{F} = \left(j\omega m + w + \frac{1}{j\omega n} \right) \underline{V}$$

die mechanische Impedanz zu

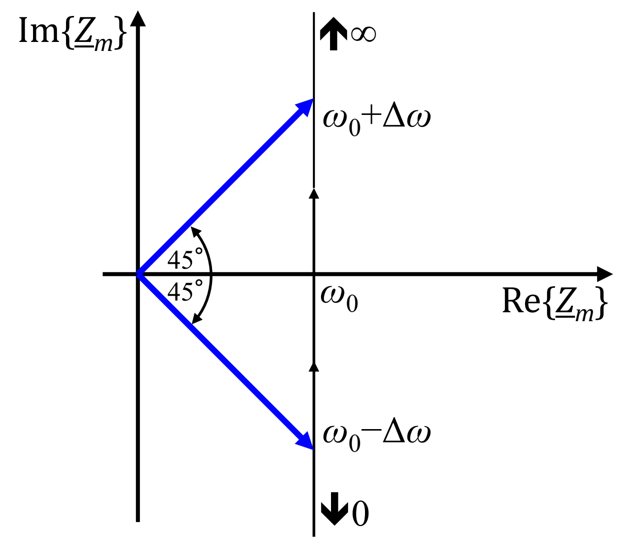
$$\underline{Z}_m = \frac{\underline{F}}{\underline{V}} = w + j\left(\omega m - \frac{1}{\omega n} \right)$$

bzw. mit $\omega_0 = 1/\sqrt{mn}$ zu

$$\underline{Z}_m = w + j\frac{m}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2 \right).$$

Ortskurve der Impedanz

Die Ortskurve wird für ω von $0 \rightarrow \infty$ von unten nach oben durchlaufen.



Für $\omega = \omega_0$ ist $\underline{Z}_m$ reell.

Die Kreisfrequenz $\omega_0 \pm \Delta\omega$ bei denen der Phasenwinkel $\varphi = \pm 45°$ ist, heißen auch "45°-Frequenzen".

Dabei gilt z.B. für $\varphi = 45°$

$$w = \frac{m}{\omega}\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)$$

und für $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ mit $\Delta\omega \ll \omega_0$, d.h. $w \ll \omega_0 m$,

$$\frac{w}{m} = \frac{(\omega_0 + \Delta\omega)^2 - \omega_0^2}{(\omega_0 + \Delta\omega)} = \frac{\omega_0^2 + 2\Delta\omega\omega_0 + \Delta\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0 + \Delta\omega}$$

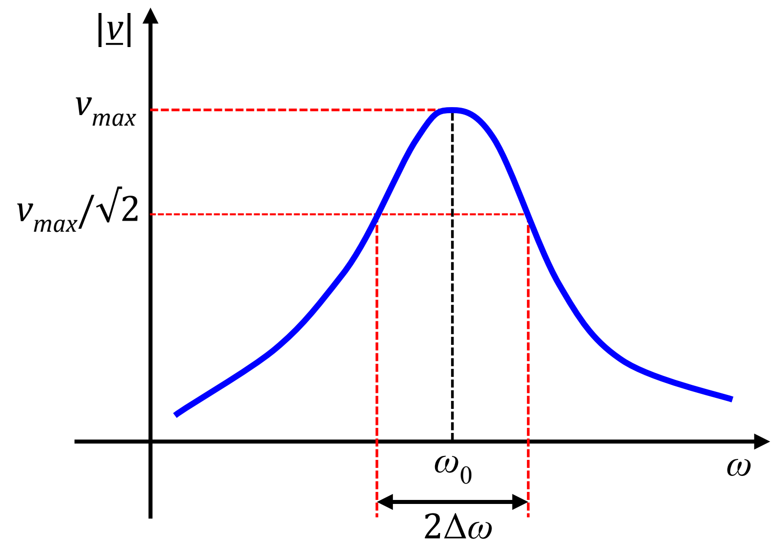
$$= \frac{2\Delta\omega(\omega_0 + \Delta\omega/2)}{\omega_0 + \Delta\omega} \approx 2\Delta\omega$$

Bei aufgeprägter Kraft F ist der Betrag der Schnelle gegeben durch

$$|\underline{V}| = \frac{|\underline{F}|}{|\underline{Z}_m|} = \frac{|\underline{F}|}{\sqrt{w^2 + (m/\omega)^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2}}$$

$$= \frac{|\underline{F}|}{m\sqrt{(w/m)^2 + \left((\omega^2 - \omega_0^2)/\omega\right)^2}}.$$

Die Schnelleamplitude ist bei den Frequenzen $\omega_0 \pm \Delta\omega$ auf das $\sqrt{1/2}$-fache der maximalen Schnelleamplitude v_{max} abgesunken, d.h. Halbierung der Leistung.



Demzufolge bezeichnet

$2\Delta\omega$	:	die Halbwertsbreite
$2\Delta\omega/\omega_0$	:	die relative Halbwertsbreite
$Q = \omega_0/2\Delta\omega$	:	die Güte

des Resonanzsystems.

1.5 Wirkleistung einer auf ein Schwingungs-system einwirkenden Kraft

Unter einer Wirkleistung P versteht man den zeitlichen Mittel-wert der Momentanleistung $P(t)=F(t)v(t)$, d.h.

$$P=\overline{P}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}F(t)v(t)dt.$$

Bei harmonischen Schwingungen gilt bekanntlich

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}F(t)v(t)dt,$$

wobei T die Periodendauer der harmonischen Schwingung angibt.

Mit

$$F(t)=\hat{F}\cos(\omega t+\varphi_1)=\frac{1}{2}\left(\underline{F}\,e^{j\omega t}+\underline{F}^*e^{-j\omega t}\right),\quad \underline{F}=\hat{F}\,e^{j\varphi_1}$$

und

$$v(t)=\hat{v}\cos(\omega t+\varphi_2)=\frac{1}{2}\left(\underline{V}\,e^{j\omega t}+\underline{V}^*e^{-j\omega t}\right),\quad \underline{V}=\hat{v}\,e^{j\varphi_2}$$

kann die Wirkleistung wie folgt berechnet werden.

$$P=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{2}\left(\underline{F}\,e^{j\omega t}+\underline{F}^*e^{-j\omega t}\right)\frac{1}{2}\left(\underline{V}e^{j\omega t}+\underline{V}^*e^{-j\omega t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4T}\int_{-T/2}^{T/2}\left(\underline{F}\,\underline{V}e^{j2\omega t}+\underline{F}^*\underline{V}^*e^{-j2\omega t}+\underline{F}\,\underline{V}^*+\underline{F}^*\underline{V}\right)dt=\ldots$$

$$\ldots = \frac{1}{4}\left(\underline{F}\,\underline{V}^* + \underline{F}^*\underline{V}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{F}\,\underline{V}^*\right\} = \frac{1}{2}\hat{F}\,\hat{v}\cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ausnutzen von

$$\underline{F} = \underline{Z}_m\underline{V} \quad \text{bzw.} \quad \underline{V} = \underline{F}/\underline{Z}_m$$

liefert die Schreibweisen

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_m\underline{V}\,\underline{V}^*\right\} = \frac{1}{2}\hat{v}^2\,\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_m\right\}$$

bzw.

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{F}\,\underline{F}^* / \underline{Z}_m^*\right\} = \frac{1}{2}\hat{F}^2\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\underline{Z}_m}\right\}.$$

Literatur zu Kapitel 1

[1] G. Bosse, *Grundlagen der Elektrotechnik IV*, B.I.-Verlag, 1984

[2] H. Henn, *Ingenieurakustik*, Vieweg, 2001

[3] H. Kuttruff, *Akustik: Eine Einführung,* Hirzel Verlag, 2004

[4] I. Veit, *Technische Akustik*, Vogel, 1996

[5] H. Weber, *Laplace-Transformation*, Teubner, 2003