Einführung in die Technische Akustik

Inhalt

2. Schallfeldgrößen und Wellengleichung für fluide Medien

Schall ist eine mechanische Wellenerscheinung in fluiden (gasförmigen und flüssigen) oder festen Stoffen. Demzufolge lässt sich mit Hilfe der dynamischen Gesetze des Mediums eine partielle Differentialgleichung, die sogenannte Wellengleichung, herleiten, die die Grundlage zur Beschreibung aller linearen Schallvorgänge darstellt.

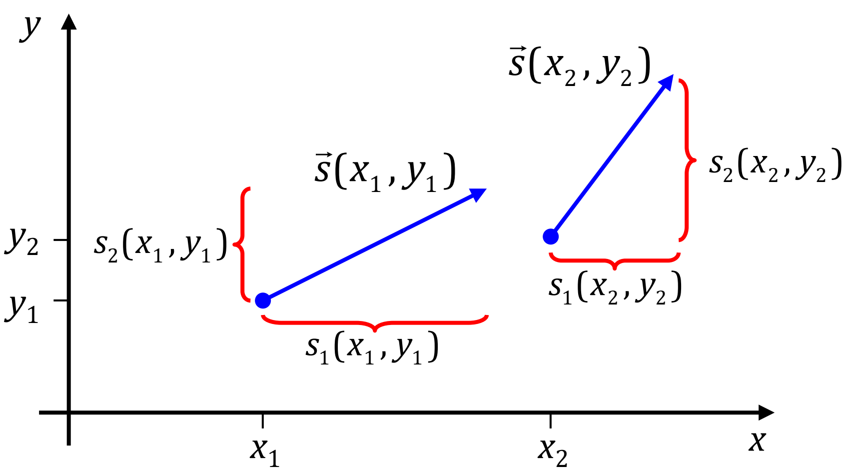
2.1 Die Schallfeldgrößen

In einer Schallwelle erfahren die Teilchen des Mediums eine orts- und zeitabhängige Verschiebung um

$$\vec{s}(x,y,z,t)=\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} s_1 &= s_1(x,y,z,t) \\ s_2 &= s_2(x,y,z,t) \\ s_3 &= s_3(x,y,z,t) \end{aligned}$$

aus ihrer Ruhelage.

Die Verschiebung wird auch als Schall-ausschlag bezeichnet.



Aus der Verschiebung ergibt sich die Geschwindigkeit der Verschiebung, d.h. die Schallschnelle, zu

$$\vec{v}(x,y,z,t) = \frac{d\vec{s}}{dt} \cong \frac{\partial\vec{s}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \partial s_1(x,y,z,t)/\partial t \\ \partial s_2(x,y,z,t)/\partial t \\ \partial s_3(x,y,z,t)/\partial t \end{pmatrix}$$

Da die Verschiebung (Auslenkung) nicht überall gleich ist, kommt es zu Verdichtungen bzw. Verdünnungen des Mediums. Es gilt

$$\rho_g(x,y,z,t) = \rho_0(x,y,z,t) + \rho(x,y,z,t),$$

wobei

ρ_0 die Ruhedichte

ρ die Wechseldichte, die schallbedingte Dichteänderung

und

ρ_g die Gesamtdichte

bezeichnet. Entsprechend erhält man für den Druck

$$p_g(x,y,z,t) = p_0(x,y,z,t) + p(x,y,z,t)$$

mit

p_0 dem Gleichdruck

p dem Wechseldruck/Schalldruck

p_g dem Gesamtdruck

Druck und Dichte sind in idealen Gasen durch die thermodynamischen Zustandsgleichungen adiabatisch ablaufender Zustandsänderungen, d.h. über

$$pV^{\kappa} = \text{const.} \quad \text{und} \quad \rho V = \text{const.}$$

gemäß

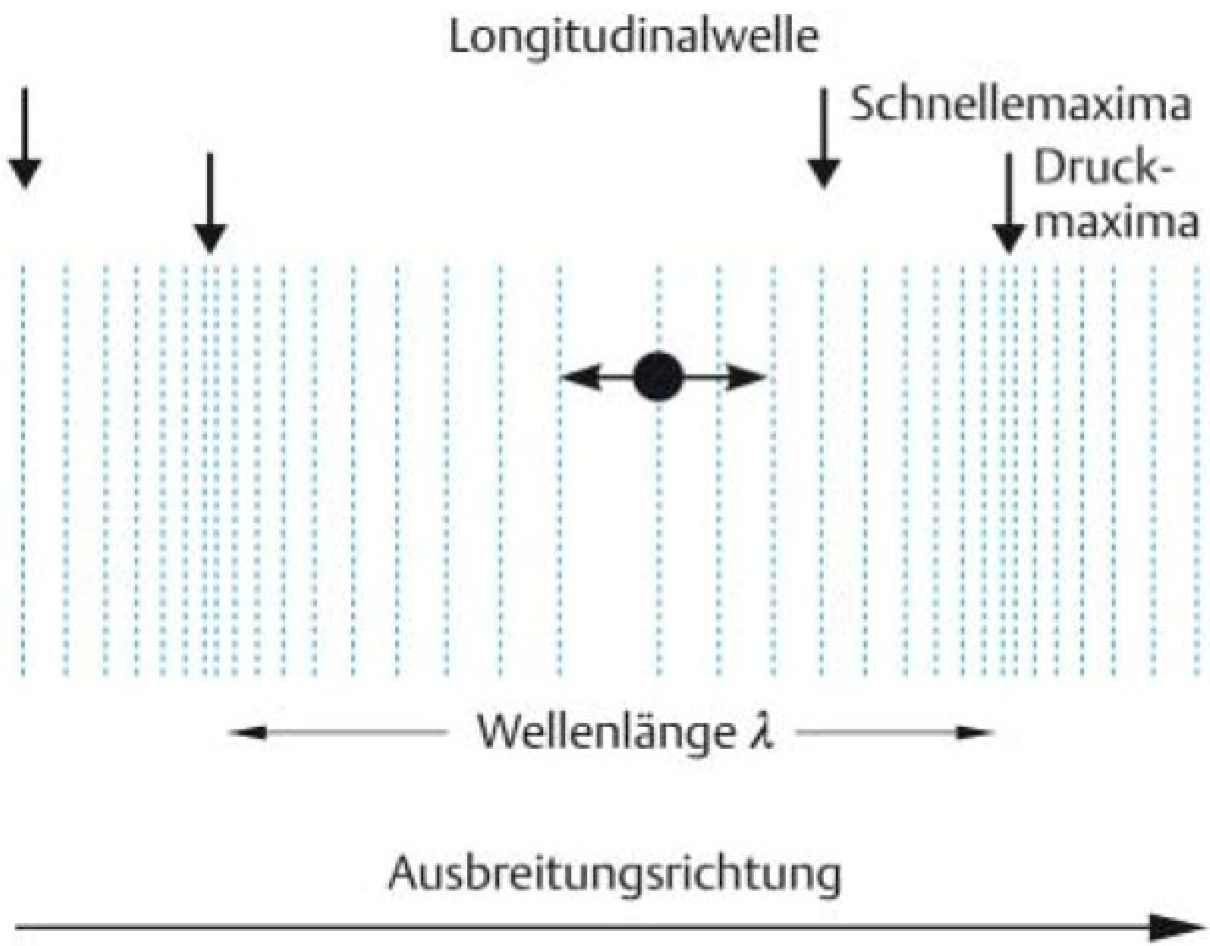
$$\frac{p_g}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V_g}\right)^{\kappa} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_0}\right)^{\kappa}$$

miteinander verknüpft, wobei

κ den Adiabatenexponent (= 1,4 für Luft)

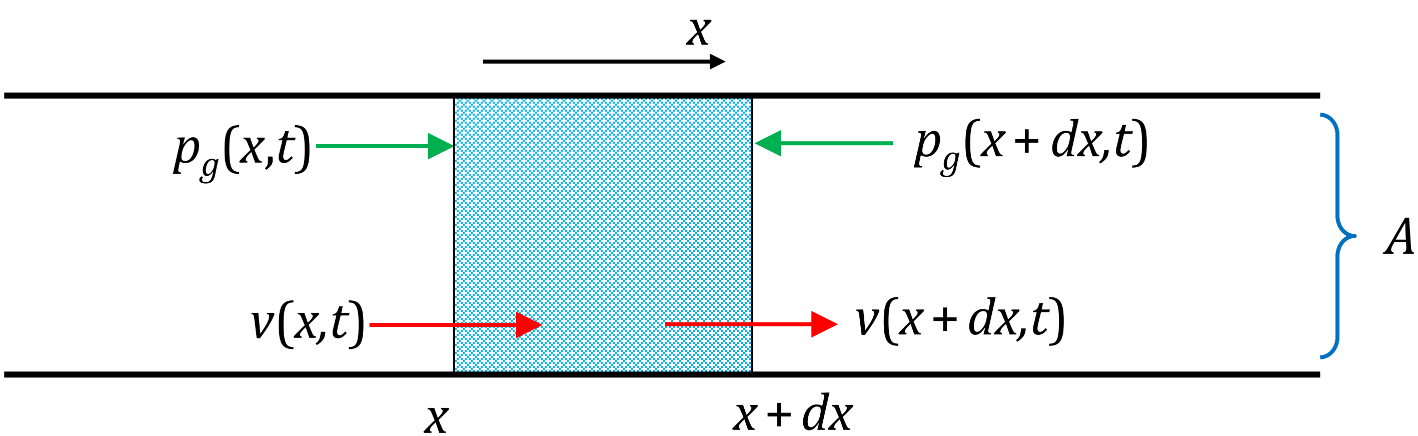
bezeichnet.

Anmerkung:
Bei adiabatischen Zustandsänderungen geht man davon aus, dass die Zustandsänderungen so schnell ablaufen, dass zwischen benachbarten Volumenelementen näherungsweise kein Wärmeaustausch stattfindet.


Longitudinalwelle
Schnellemaxima
Druck-
maxima
Wellenlänge λ
Ausbreitungsrichtung

2.2 Wellengleichung

In idealen Gasen kann die Wellengleichung mit Hilfe der nachfolgenden Abbildung durch Ausnutzen der Eulerschen Gleichung, der Gleichung zur Massenerhaltung und der adiabatischen Zustandsgleichung hergeleitet werden.



Nach dem 2ten Newtonschen Axiom $F = m \cdot a$ gilt für das betrachtete Volumenelement

$$\underbrace{\underbrace{p_g(x,t)A}_{F_{l,W}} - \underbrace{p_g(x+dx,t)A}_{F_{r,W}}}_{F} = \underbrace{\rho_g \underbrace{A\,dx}_{V}}_{m} \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a}.$$

Umformen

$$\frac{p_g(x,t)-p_g(x+dx,t)}{dx} = -\frac{p_g(x+dx,t)-p_g(x,t)}{dx} = -\frac{\partial p_g}{\partial x} = \rho_g \frac{dv}{dt}$$

sowie Ausnutzen von

$$\frac{\partial p_g}{\partial x} = \frac{\partial(p_0+p)}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{und} \qquad \frac{dv}{dt}^{1)} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}$$

liefert die Eulersche Gleichung

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_g \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

[1] Totales Differential (einfacher)

$$dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

Totale Ableitung (mathematisch sauberer)

$$v\big(x(t),t\big) \cong v(x_0,t_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{x=x_0,\,t=t_0} (t-t_0) + \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=x_0,\,t=t_0} (x-x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt} v\big(x(t),t\big) = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x}$$

Außerdem erhält man wegen des Massenerhaltungsgesetzes

$$\underbrace{\underbrace{\rho_g(x+dx,t)\,\underbrace{Av(x+dx,t)}_{\substack{\text{austretender}\\ \text{Volumenstrom}}}}_{\substack{\text{austretender}\\ \text{Massenstrom}}} - \underbrace{\rho_g(x,t)\,\underbrace{Av(x,t)}_{\substack{\text{eintretender}\\ \text{Volumenstrom}}}}_{\substack{\text{eintretender}\\ \text{Massenstrom}}}}_{\substack{\text{resultierender}\\ \text{Massenstrom}}} = -\underbrace{\underbrace{A\,dx}_{V}\;\underbrace{\frac{\partial \rho_g}{\partial t}}_{\text{Dichteänderung}}}_{\text{Massenänderung}}$$

sowie nach Umformen

$$\frac{\rho_g(x+dx,t)v(x+dx,t)-\rho_g(x,t)v(x,t)}{dx} = -\frac{\partial \rho_g}{\partial t} = -\frac{\partial(\rho_0+\rho)}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\rho_g v)}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Als dritte Gleichung benötigt man noch eine Beziehung zwischen dem Wechseldruck p und der Wechseldichte ρ.

Diese ergibt sich bei idealen Gasen aus der adiabatischen Zustandsgleichung

$$\frac{p_g}{p_0} = \frac{p_0 + p}{p_0} = \left(\frac{\rho_g}{\rho_0}\right)^{\kappa}$$

nach Umstellen

$$p = p_0\left(\left(\rho_g/\rho_0\right)^{\kappa} - 1\right) = p(\rho_g) \quad \text{mit} \quad p(\rho_0) = 0$$

und Taylor-Reihenentwicklung um ρ_0

$$p(\rho_g) = p(\rho_0) + \left.\frac{dp}{d\rho_g}\right|_{\rho_g=\rho_0} (\rho_g - \rho_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 p}{d\rho_g^2}\right|_{\rho_g=\rho_0} (\rho_g - \rho_0)^2 + \dots$$

für $\rho = \rho_g - \rho_0 \ll \rho_0$ näherungsweise zu

$$p = \left.\frac{dp}{d\rho_g}\right|_{\rho_g=\rho_0} \rho = \kappa \frac{p_0}{\rho_0}\left.\left(\frac{\rho_g}{\rho_0}\right)^{\kappa-1}\right|_{\rho_g=\rho_0} \rho = \kappa \frac{p_0}{\rho_0}\rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = c^2 \rho,}$$

wobei

$$c = \sqrt{\kappa p_0 / \rho_0} = \sqrt{\kappa R T / M}$$

wie später noch ersichtlich wird die Schallgeschwindigkeit,

$R = 8{,}3145 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}}$ die universelle Gaskonstante,

M in [kg/mol] die molare Masse und

T in [K] die absolute Temperatur

bezeichnen.

<u>Beispiel:</u> (*Schallgeschwindigkeit in Luft*)

Mit $\kappa = 1{,}4$ und $M = 0{,}02896 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}$ gilt

$$c = \sqrt{\kappa R T / M} \cong \sqrt{1{,}4 \cdot 8{,}3145 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\,K}} \cdot T \Big/ 0{,}02896 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}} \cong 20{,}05 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{T/\mathrm{K}}$$

bzw. mit der Temperatur $\vartheta = (T/\mathrm{K} - 273{,}15)$ in [C°]

$$c \cong 20{,}05 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{\vartheta/\mathrm{C}° + 273{,}15}$$

$$\cong 331{,}5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \sqrt{1 + (\vartheta/\mathrm{C}°)/273{,}15} \cong (331{,}5 + 0{,}6\,\vartheta/\mathrm{C}°) \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Um nun zur Wellengleichung zu gelangen, wendet man auf die Eulersche Gleichung eine partielle Differentiation nach x und auf die Kontinuitätsgleichung eine partielle Differentiation nach t an, d.h.

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g v \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\rho_g v)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial t} v\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g \frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Für kleine Geschwindigkeiten v kann der konvektive Term

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g v \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

in der ersten und für $\rho \ll \rho_0$ der Term

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial t} v\right)$$

in der zweiten Gleichung vernachlässigt werden. Also gilt

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g \frac{\partial v}{\partial t}\right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_g \frac{\partial v}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Zusammenfassen liefert schließlich die lineare 1dimensionale

Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Verallgemeinerung auf 3dimesionale Schallfelder liefert die lineare 3dimensionale Wellengleichung

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2},$$

wobei

$$\Delta = \mathrm{div}\left(\mathrm{grad}(\cdot)\right)$$

$$= \nabla^T \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Literatur zu Kapitel 2

[1] D.T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Wiley, 2000

[2] L. Cremer und M. Möser, *Technische Akustik*, Springer, 2003

[3] H. Henn, *Ingenieurakustik*, Vieweg, 2001

[4] H. Kuttruff, *Akustik: Eine Einführung,* Hirzel Verlag, 2004

[5] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf, *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*, Springer, 2009

[6] I. Veit, *Technische Akustik*, Vogel, 1996