Einführung in die Technische Akustik

Inhalt

4. Kugelwellen

Im Gegensatz zu ebenen Wellen sind Kugelwellen zwingend mit der Vorstellung bestimmter Schallquellen verbunden.

Dementsprechend wird bei sphärischen Wellenfeldern unmittelbar Bezug auf elementare Quellentypen genommen.

4.1 Einführung

Da Schallwellen i.d.R. von räumlich begrenzten Schallquellen ausgehen und sich dann über ein immer größeres Gebiet ausbreiten, stellen Kugelwellen einen im Vergleich zu ebenen Wellen realistischeren Wellentyp dar.

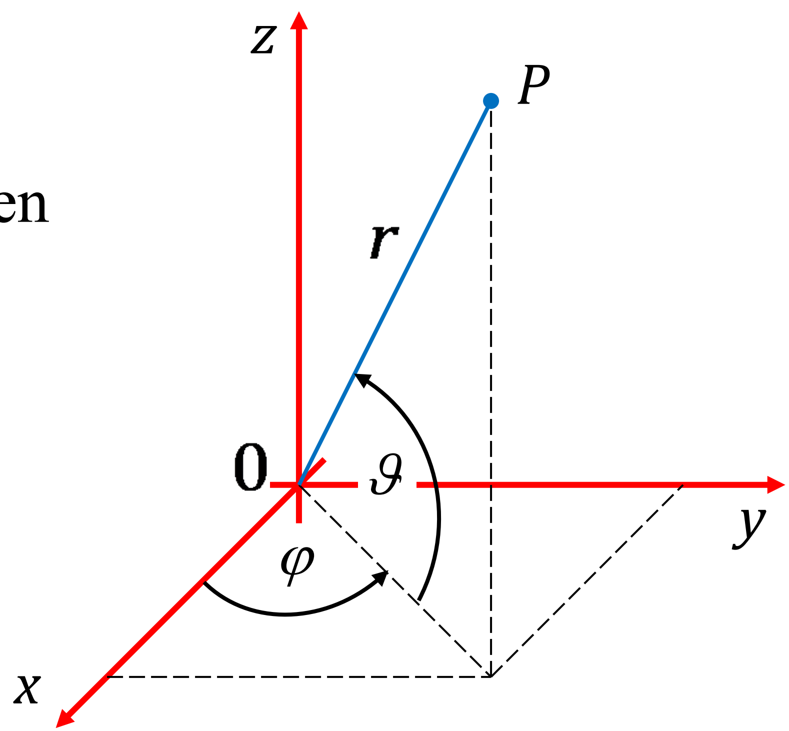
Bei Kugelwellen geht man von der Vorstellung einer punktförmigen Quelle aus von der sich die Schallwelle omnidirektional, d.h. in alle Richtungen gleichmäßig ausbreitet.

Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\cos\vartheta$$

$$y = r\sin\varphi\cos\vartheta$$

$$z = r\sin\vartheta$$



Im Ursprung des Koordinatensystems befinde sich eine Schallquelle verschwindend kleiner Ausdehnung. Von dort wird der Schall omnidirektional abgestrahlt. Die Schallfeldgrößen, z.B. der Druck, hängen nur von der Entfernung r, nicht aber vom Azimut φ und von der Elevation ϑ ab.

Der in der Wellengleichung

$$\Delta p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

auftretende Laplace-Operator Δ ist in kartesischen Koordinaten durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

und in Kugelkoordinaten durch

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\tan \vartheta}{r^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

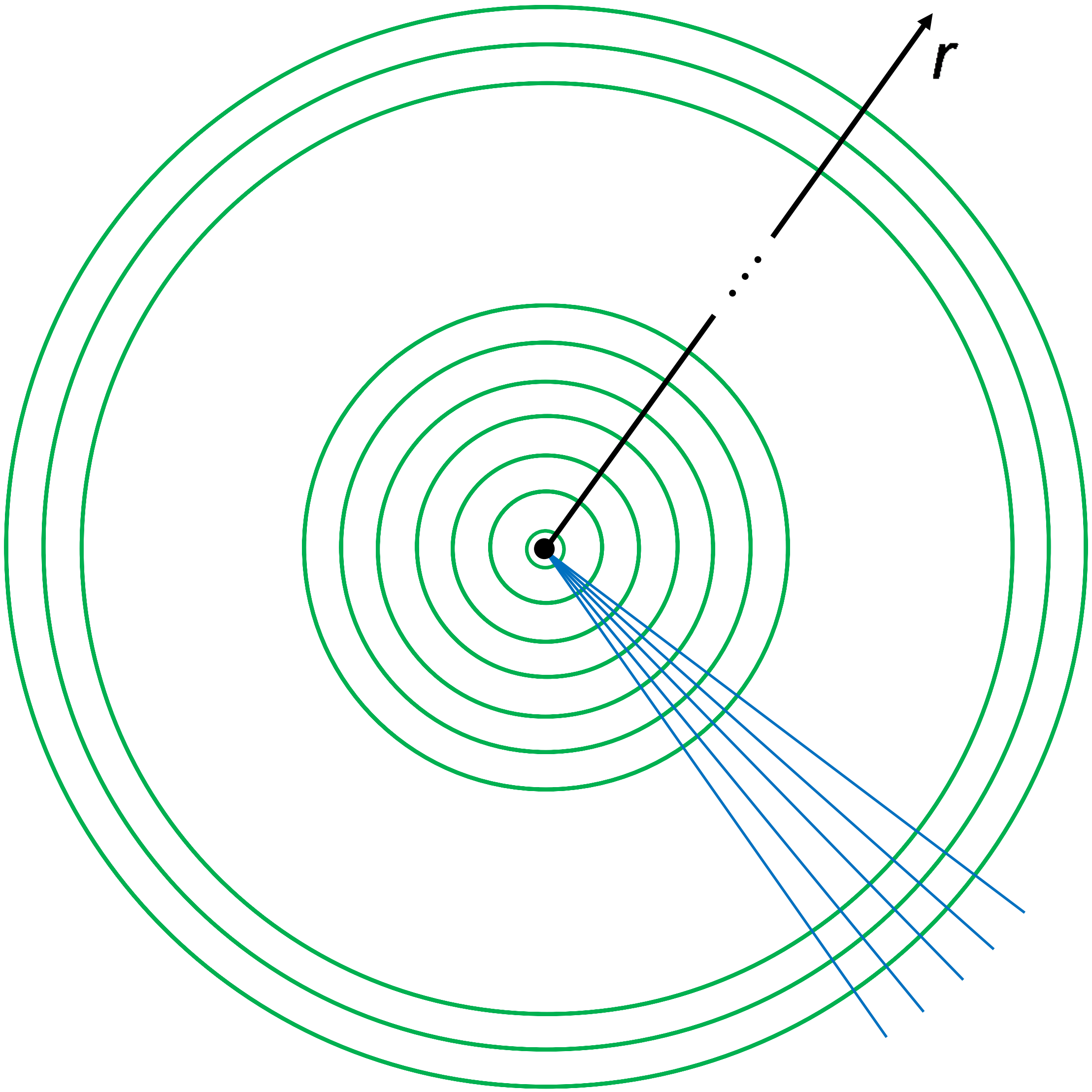
definiert. Da hier die Schallfeldgrößen unabhängig von φ und ϑ sind, vereinfacht sich der Laplace-Operator zu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Die Wellengleichung für den Schalldruck lautet somit

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Kugelwellen



Kugeloberfläche:

$$A(r) = 4\pi r^2$$

Intensität:

$$I(r) = \frac{P}{A(r)} = \frac{P}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

$$= p_{eff}^2(r) / Z_W$$

Schalldruck:

$$p_{eff}(r) \propto \frac{1}{r}$$

Ansatz:

$$p(r,t) = \left. \frac{\tilde{p}(x,t)}{x} \right|_{x=r}$$

mit (harmonische ebene Welle)

$$\tilde{p}(x,t) = \hat{p}\cos(\omega t - kx + \vartheta)$$

folgt

$$p(r,t) = \frac{\tilde{p}(r,t)}{r} = \frac{\hat{p}}{r}\cos(\omega t - kr + \vartheta)$$

Durch den Ansatz

$$p(r,t)=\frac{\tilde{p}(r,t)}{r}$$

geht sie in die folgende einfachere Differentialgleichung über

$$\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial r^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial t^2}.$$

<u>*Beweis:*</u>

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tilde{p}}{r}\right)\right)+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tilde{p}}{r}\right)=\frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial t^2}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tilde{p}_r r-\tilde{p}}{r^2}\right)+\frac{2}{r}\left(\frac{\tilde{p}_r r-\tilde{p}}{r^2}\right)=\frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow\frac{(\tilde{p}_{rr}r+\tilde{p}_r-\tilde{p}_r)r^2-(\tilde{p}_r r-\tilde{p})2r}{r^4}+\frac{2r(\tilde{p}_r r-\tilde{p})}{r^4}=\frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial t^2}\Rightarrow\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial r^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial t^2}$$

Diese besitzt analog zu Kapitel 3.1 die allgemeine Lösung

$$\tilde{p}(r,t) = f(t - r/c) + g(t + r/c).$$

Lösung der Wellengleichung für den Schalldruck ist folglich

$$p(r,t) = \underbrace{\frac{1}{r} f(t - r/c)}_{\text{divergierend}} + \underbrace{\frac{1}{r} g(t + r/c)}_{\text{konvergierend}} \Rightarrow p(r,t) = \frac{1}{r} f(t - r/c).$$

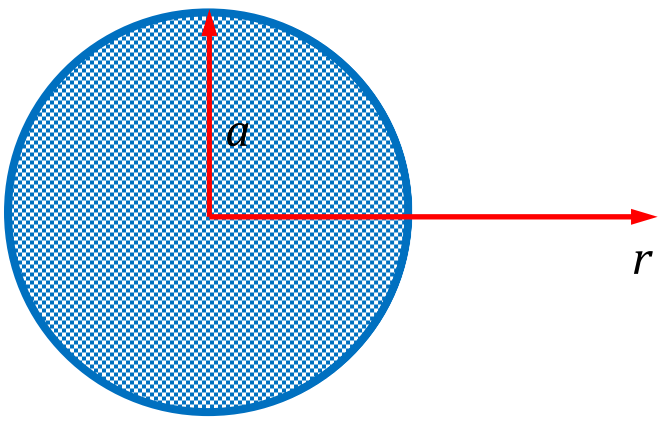
Sie besteht aus einer divergierenden sich in Richtung wachsender r ausbreitenden Schallwelle, die die eigentliche Lösung der Abstrahlung darstellt und einer konvergierenden auf den Ursprung zulaufenden Schallwelle, die physikalisch wenig Sinn macht.

4.2 Die harmonische Kugelwelle

Bei harmonischer Anregung eines Kugelstrahlers des Radius *a* (atmende Kugel mit omnidirektionaler Abstrahlcharakteristik) ist die Lösung der Wellengleichung durch

$$\underline{p}(r,t)=\frac{\hat{a}}{r}e^{j(\omega t-kr+\varphi)}$$

$$=\frac{\underline{A}}{r}e^{j(\omega t-kr)} \quad \text{mit} \quad \underline{A}=\hat{a}\,e^{j\varphi}$$



bzw. in reeller Form durch

$$p(r,t)=\mathrm{Re}\left\{\underline{p}(r,t)\right\}=\frac{\hat{a}}{r}\cos(\omega t-kr+\varphi)$$

gegeben.

Die in Kapitel 3.2 für den 1-dimensionalen Fall hergeleitete (approximative) Euler-Gleichung

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

lautet in komplexer Darstellung und unter Berücksichtigung, dass hier r die Rolle von x übernimmt

$$-\frac{\partial \underline{p}}{\partial r} = \rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$$

Einsetzen von $\underline{p}(r,t)$ liefert

$$\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{\underline{A}}{\rho_0} \frac{-jke^{j(\omega t - kr)}r - e^{j(\omega t - kr)}}{r^2} = \frac{\underline{A}}{\rho_0}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r}\right)e^{j(\omega t - kr)}$$

und, nach Integration bzgl. t die Schallschnelle

$$\underline{v}(r,t) = \frac{\underline{A}}{j\omega\rho_0}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{jk}{r}\right)e^{j(\omega t - kr)} = \underline{v}(r)\,e^{j\omega t}.$$

Im Gegensatz zum Schalldruck setzt sich die Schallschnelle aus dem mit

- $1/r$ abfallenden Beitrag, der mit dem Schalldruck in Phase ist,

und dem mit

- $1/r^2$ abfallenden Beitrag, dessen Phase um 90° gegenüber der des Schalldrucks verschoben ist,

zusammen. Der erste Beitrag beschreibt das Fernfeld

$$1/r \gg 1/r^2 \quad \text{für} \quad r > 1$$

der zweite das Nahfeld

$$1/r \ll 1/r^2 \quad \text{für} \quad r < 1\,.$$

Zur Bestimmung der komplexen Amplitude $\underline{A}$ müssen wir die Randbedingung in die Gleichung für die Schallschnelle einsetzen, d.h. unsere Lösung so anpassen, dass sie auf der Oberfläche des Kugelstrahlers mit der vom Kugelstrahler erzeugten Schnelle übereinstimmt.

Man erhält für $r = a$

$$\underline{v}(a,t) = \underline{v}(a)e^{j\omega t} = \frac{\underline{A}}{j\omega\rho_0}\left(\frac{1}{a^2} + j\frac{k}{a}\right)e^{j(\omega t - ka)} = \frac{(1 + jka)}{j\omega\rho_0 a^2}\underline{A}\, e^{j(\omega t - ka)},$$

wobei $\underline{v}\,(a)$ die physikalisch gegebene komplexe Schnelleamplitude auf der Kugelstrahleroberfläche bezeichnet. Umstellen nach $\underline{A}$ liefert

$$\underline{A} = \frac{j\omega\rho_0 a^2}{1 + jka} \underline{v}(a)\, e^{jka}.$$

Da der Radius a des Kugelstrahlers i.d.R. sehr viel kleiner als die Wellenlänge λ ist, d.h. $ka = 2\pi a/\lambda \ll 1$, gilt

$$\underline{A} \cong j\omega\rho_0 a^2\, \underline{v}(a)$$

und mit

$$\underline{p}(a,t) = \frac{\underline{A}}{a} e^{j(\omega t - ka)} = \underline{p}(a)\, e^{j\omega t}$$

schließlich

$$\underline{p}(a) \cong j\omega\rho_0 a\, \underline{v}(a).$$

An der Oberfläche des Kugelstrahlers sind der Schalldruck und die Schallschnelle ungefähr 90° zueinander phasenverschoben.

Außerhalb des Kugelstrahlers, d.h. $r > a$, ergibt sich der Schalldruck zu

$$\underline{p}(r,t) = \frac{\underline{A}}{r} e^{j(\omega t - kr)} = \frac{j\omega\rho_0 a^2 \underline{v}(a)}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

$$= \frac{j\omega\rho_0 \underline{q}(a)}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} = \underline{p}(r)\, e^{j\omega t},$$

wobei

$$\underline{q}(a) = 4\pi a^2 \underline{v}(a)$$

die Schallflussamplitude des Kugelstrahlers, d.h. die über die Kugeloberfläche integrierte Schnelleamplitude, bezeichnet.

Diese Beziehung gilt im ganzen interessierenden Frequenzbereich, wenn der Radius des Kugelstrahlers nur hinreichend klein ist (Punktstrahler, Monopol).

4.3 Leistung eines Punktstrahlers

Die Intensität ist nach Kapitel 3.5 gegeben durch

$$I(r)=\overline{p(r,t)v(r,t)}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{p}(r)\underline{v}^*(r)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\underline{A}}{r}e^{-jkr}\frac{j\underline{A}^*(1-jkr)}{\omega\rho_0 r^2}e^{jkr}\right\}=\frac{|\underline{A}|^2}{2\omega\rho_0 r^3}kr=\frac{\omega^2\rho_0^2 a^4|\underline{v}(a)|^2}{2\omega\rho_0 r^2}\frac{\omega}{c}$$

$$=\frac{\omega^2\rho_0\left(4\pi a^2|\underline{v}(a)|\right)^2}{32\pi^2 r^2 c}=\frac{\rho_0|\underline{q}(a)|^2}{32\pi^2 c}\frac{\omega^2}{r^2}=\frac{\rho_0\hat{q}^2(a)}{32\pi^2 c}\frac{\omega^2}{r^2}$$

mit

$$\underline{q}(a)=\hat{q}(a)\,e^{j\vartheta},\ \text{wobei}\ \underline{q}(a,t)=\underline{q}(a)\,e^{j\omega t}=\hat{q}(a)\,e^{j(\omega t+\vartheta)}$$

Bei stationärem/harmonischem Schallfluss nimmt die Intensität

- quadratisch mit der Frequenz zu
- bei zunehmender Entfernung mit $1/r^2$ ab.

Durch Integration der Intensität auf der Kugeloberfläche erhält man die gesamte Wirkleistung

$$P=\oiint_S I\,dA=4\pi a^2 I(a)=\frac{\rho_0\hat{q}^2(a)}{8\pi c}\omega^2.$$

4.4 Strahlungsimpedanz

Die atmende Kugel muss an ihrer Oberfläche die Reaktions-kraft des sie umgebenden Mediums überwinden. Diese ist gegeben durch

$$\underline{F}(a) = S\,\underline{p}(a) = S\,\underline{Z}\,\underline{v}(a) = \underline{Z}_S\,\underline{v}(a),$$

wobei $S = 4\pi a^2$ die Oberfläche der ruhenden Kugel,

$\underline{p}(a)$ den Schalldruck und

$\underline{v}(a)$ die Schallschnelle an der Oberfläche,

$\underline{Z} = \underline{p}(a)/\underline{v}(a)$ die akustische Impedanz und

$\underline{Z}_S = \underline{F}(a)/\underline{v}(a)$ die Strahlungsimpedanz mit $\underline{Z}_S = S\,\underline{Z}$

angibt.

Einsetzen von $\underline{p}(a)$ und $\underline{v}(a)$ in $\underline{Z}$ bzw. $\underline{Z}_S$ liefert

$$\underline{Z} = \frac{(\underline{A}/a)e^{-jka}}{(\underline{A}/j\omega\rho_0 a^2)(1+jka)e^{-jka}} = \frac{j\omega\rho_0 a}{1+jka}$$

$$= \frac{j\rho_0 cka}{1+jka} = \rho_0 c \frac{jka}{1+jka} = \frac{\rho_0 c}{1+1/jka} = \frac{\rho_0 c}{1-j/ka}$$

bzw.

$$\underline{Z}_S = S\frac{j\omega\rho_0 a}{1+jka} = S\rho_0 c \frac{jka}{1+jka} = S\frac{\rho_0 c}{1-j/ka}.$$

Mit Hilfe der Strahlungsimpedanz lässt sich gemäß

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{F}(a)\underline{v}^*(a)\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{S\underline{p}(a)\underline{v}^*(a)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left|\underline{v}(a)\right|^2 \mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_S\right\} = \frac{1}{2}\left|\underline{v}(a)\right|^2 W_S$$

die abgestrahlte Wirkleistung berechnen, wobei W_S als Strahlungswiderstand bezeichnet wird, der hier durch

$$W_S = \mathrm{Re}\{\underline{Z}_S\} = \frac{S\rho_0 c}{1+1/(ka)^2} = \frac{S\rho_0 c k^2 a^2}{1+k^2a^2} \approx \begin{cases} S\rho_0 c k^2 a^2 & \text{für } ka \ll 1 \\ S\rho_0 c & \text{für } ka \gg 1 \end{cases}$$

gegeben ist.

Die Frequenzabhängigkeit des Strahlungswiderstandes und der abgegebenen Leistung bei frequenzkonstanter Strahlerschnelle kann leichter interpretiert werden, wenn man den Kehrwert der Strahlungsimpedanz bildet

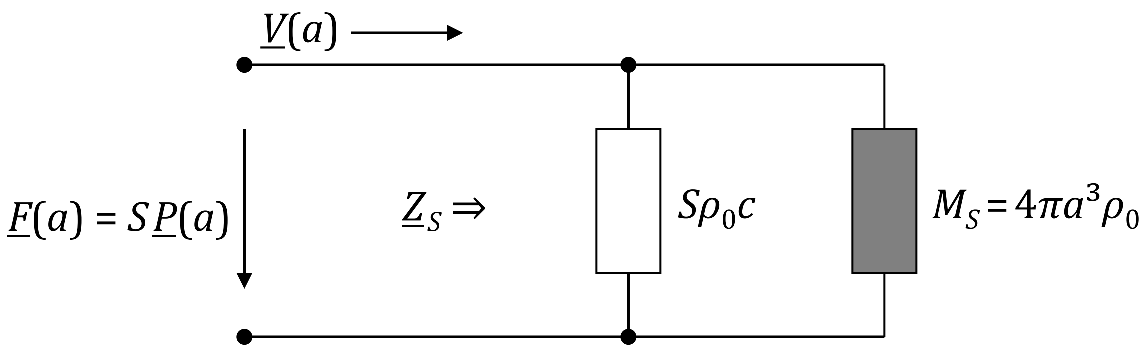
$$\frac{1}{\underline{Z}_S} = \frac{1}{S\rho_0 c}\frac{1+jka}{jka} = \frac{1}{S\rho_0 c} + \frac{1}{jS\rho_0 \underbrace{ck}_{\omega} a} = \frac{1}{S\rho_0 c} + \frac{1}{j\omega 4\pi a^3 \rho_0} = \frac{1}{S\rho_0 c} + \frac{1}{j\omega M_S},$$

wobei

$$M_S = 4\pi a^3 \rho_0$$

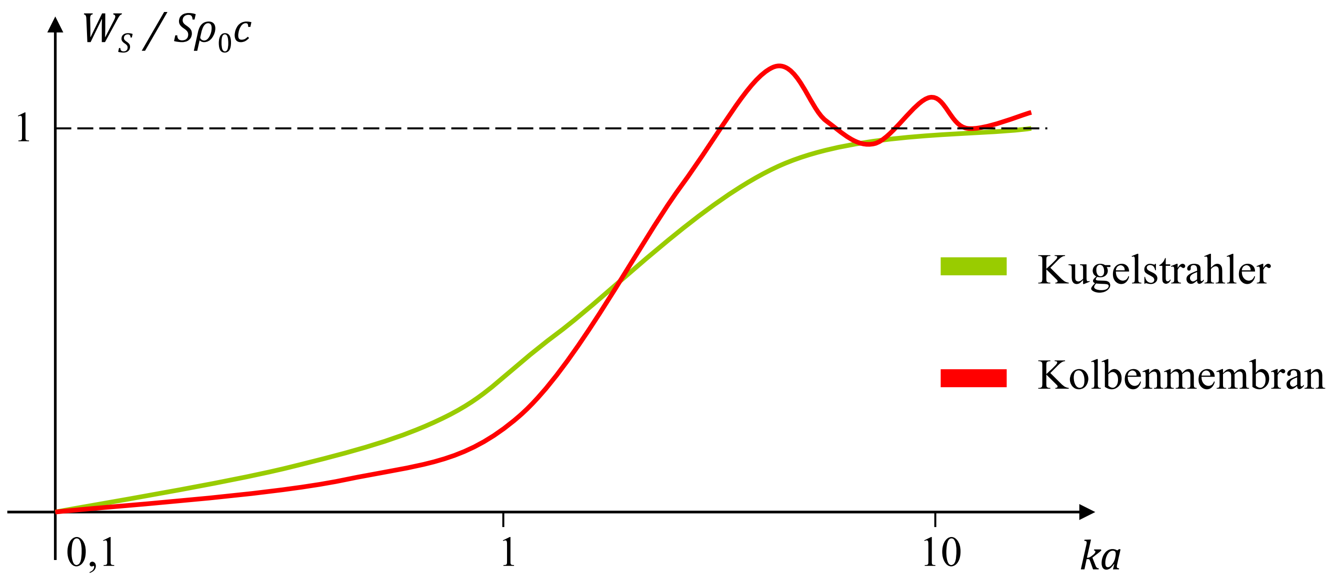
die „mitschwingende Mediummasse“ bezeichnet.

<u>Elektrisches Ersatzschaltbild</u>



Die mechanische Last besteht also aus dem

- reellen Anteil $S\rho_0 c$ und dem
- imaginären Anteil $M_S = 4\pi a^3 \rho_0$, der mitschwingenden Mediummasse.



Bei tiefen Frequenzen wird überwiegend Mediummasse hin- und her bewegt, was wirkleistungslos und ohne Schallabstrahlung erfolgt.

Bei höheren Frequenzen wird das Medium wegen der Massenträgheit zunehmend periodisch verdichtet (Druckänderungen), was zu einer fortwandernden Welle, d.h. zur Schallabstrahlung, führt.

4.5 Doppler-Effekt

Bewegt sich Quelle und Empfänger einer Welle relativ zueinander, so nimmt der Empfänger mit der Frequenz f_E eine von der Frequenz f_Q der Quelle verschiedene Frequenz wahr.

Bei Schallwellen wurde dieser Effekt erstmals von C. Doppler im Jahre 1842 beschrieben.

Zur Berechnung der Empfängerfrequenz sind die Fälle

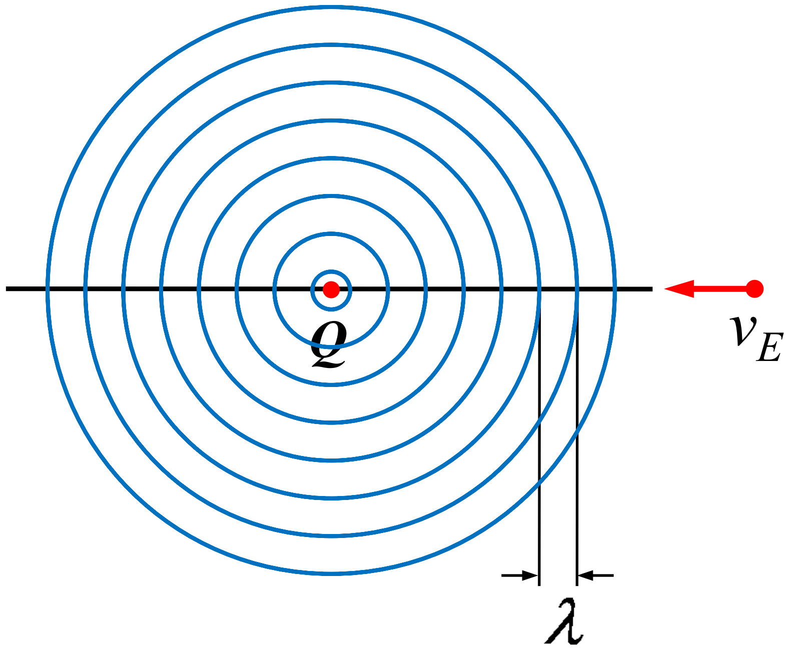
- Quelle ruht, Empfänger bewegt sich
- Empfänger ruht, Quelle bewegt sich
- Empfänger und Quelle bewegen sich
- Quelle bewegt sich mit Überschallgeschwindigkeit

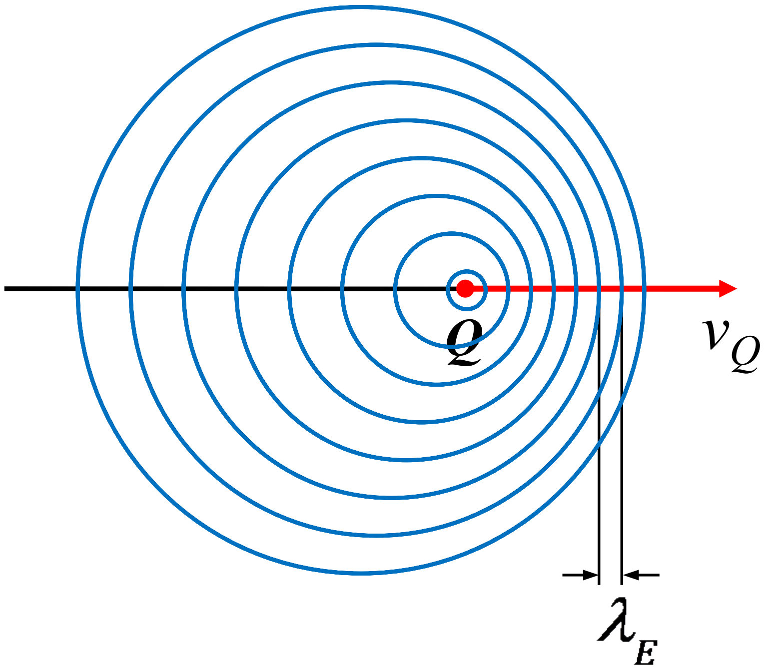
zu unterscheiden.

Wellenfelder zum Doppler-Effekt

a) ruhende Quelle, bewegter Empfänger

b) bewegte Quelle, ruhender Empfänger





4.5.1 Quelle ruht, Empfänger bewegt sich

Empfänger bewegt sich mit v_E radial auf die Quelle zu bzw. von der Quelle weg.

- Wellenberg/Verdichtung und Wellental/Verdünnung wechseln sich beim Empfänger in rascherer Folge bzw. in langsamerer Folge gegenüber dem statischen Fall ab.

Der zeitliche Abstand zweier aufeinanderfolgender Wellenberge / Verdichtungen beträgt am Empfänger

$$\boxed{T_E = \frac{\lambda}{c + v_E}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{T_E = \frac{\lambda}{c - v_E}}$$

Der Empfänger registriert also die Frequenz

$$\boxed{f_E = \frac{c + v_E}{\lambda}} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{f_E = \frac{c - v_E}{\lambda}}$$

die sich mit $c = \lambda f_Q$ wie folgt ausdrücken lässt.

$$\boxed{f_E = f_Q\left(1 + \frac{v_E}{c}\right)} \qquad \text{bzw.} \qquad \boxed{f_E = f_Q\left(1 - \frac{v_E}{c}\right)}$$

4.5.2 Empfänger ruht, Quelle bewegt sich

In Bewegungsrichtung eilt eine Quelle ihren eigenen Wellenzügen hinterher

- Der Abstand der Wellenfronten verringert sich vor der Quelle bzw. vergrößert sich hinter der Quelle.

Für einen Empfänger auf den sich die Quelle zubewegt bzw. von dem sich die Quelle wegbewegt ist die wirksame Wellenlänge durch

$$\boxed{\lambda_E = \lambda - v_Q T_Q} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\lambda_E = \lambda + v_Q T_Q}$$

gegeben. Der Empfänger nimmt also wegen

$$f_E = c/\lambda_E \;\; \text{und} \;\; c = \lambda f_Q = \lambda / T_Q$$

die Frequenz

$$\boxed{f_E = \frac{f_Q}{1 - v_Q/c}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{f_E = \frac{f_Q}{1 + v_Q/c}}$$

wahr.

4.5.3 Empfänger und Quelle bewegen sich

Bewegt sich Empfänger und Quelle relativ zum Ausbreitungs-medium so unterscheidet man die folgenden 4 Fälle.

- Empfänger und Quelle bewegt sich aufeinander zu
- Empfänger und Quelle bewegt sich voneinander weg
- Empfänger folgt Quelle
- Quelle folgt Empfänger

Empfänger und Quelle bewegen sich aufeinander zu

$$f_{\tilde{Q}} = \frac{f_Q}{1 - v_Q / c}$$

Frequenz einer ruhenden Ersatzquelle (vor der Quelle)

$$f_E = f_{\tilde{Q}} \left(1 + \frac{v_E}{c} \right) = f_Q \frac{1 + v_E / c}{1 - v_Q / c} = f_Q \frac{c + v_E}{c - v_Q}$$

Empfänger und Quelle bewegen sich voneinander weg

$$f_{\tilde{Q}} = \frac{f_Q}{1 + v_Q / c}$$

Frequenz einer ruhenden Ersatzquelle (hinter der Quelle)

$$f_E = f_{\tilde{Q}} \left(1 - \frac{v_E}{c} \right) = f_Q \frac{1 - v_E / c}{1 + v_Q / c} = f_Q \frac{c - v_E}{c + v_Q}$$

Empfänger folgt Quelle

$$f_{\tilde{Q}} = \frac{f_Q}{1 + v_Q / c}$$

Frequenz einer ruhenden Ersatzquelle (hinter der Quelle)

$$f_E = f_{\tilde{Q}} \left(1 + \frac{v_E}{c} \right) = f_Q \frac{1 + v_E / c}{1 + v_Q / c} = f_Q \frac{c + v_E}{c + v_Q}$$

Quelle folgt Empfänger

$$f_{\tilde{Q}} = \frac{f_Q}{1 - v_Q / c}$$

Frequenz einer ruhenden Ersatzquelle (vor der Quelle)

$$f_E = f_{\tilde{Q}} \left(1 - \frac{v_E}{c} \right) = f_Q \frac{1 - v_E / c}{1 - v_Q / c} = f_Q \frac{c - v_E}{c - v_Q}$$

Anmerkung

Die angegebenen Formeln sind nicht beim Doppler-Effekt von elektromagnetischen Wellen anwendbar. Dort ist nicht die Geschwindigkeit relativ zu einem ruhenden Koordinatensystem, sondern nur die Relativgeschwindigkeit v von Quelle und Empfänger zueinander maßgebend.

Es ergibt sich bei

Annäherung bzw. Entfernung

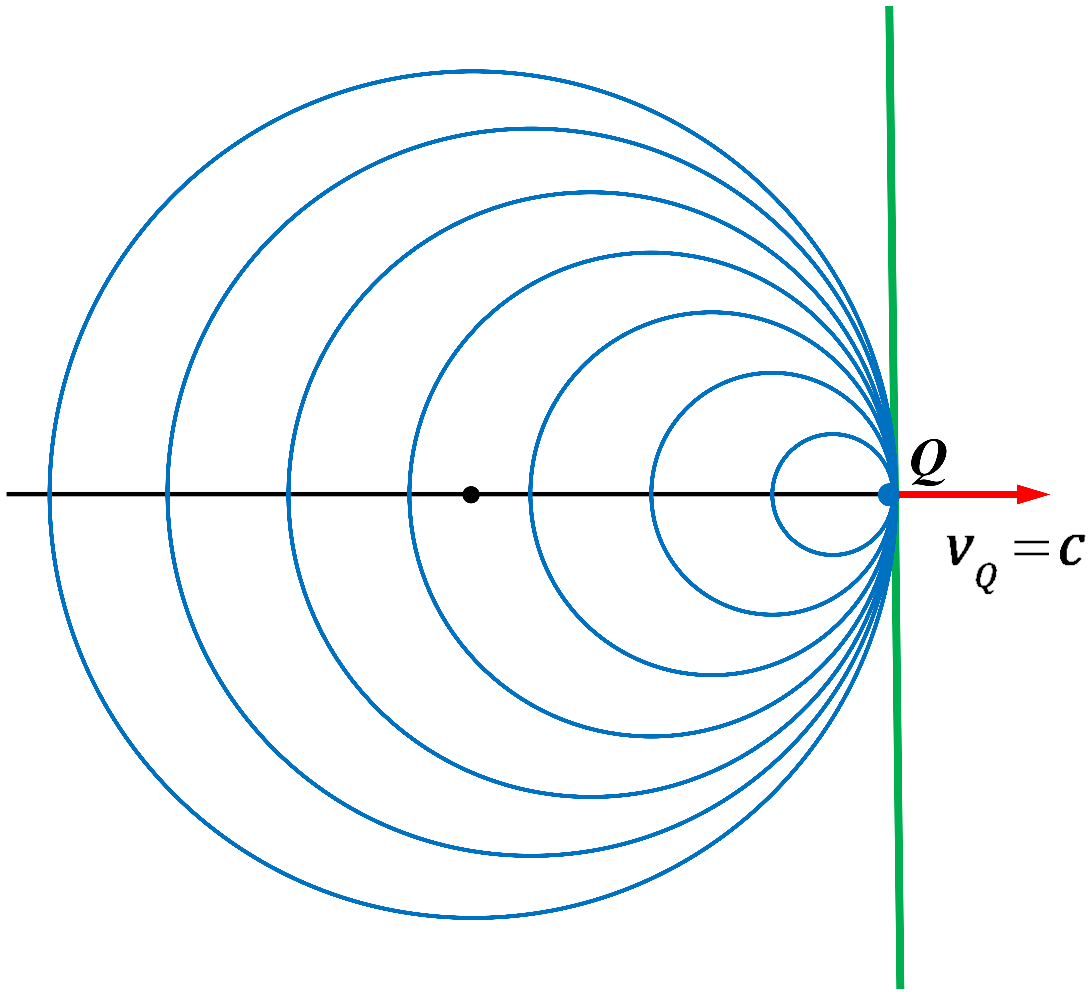
$$f_E = f_Q \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \qquad\qquad f_E = f_Q \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

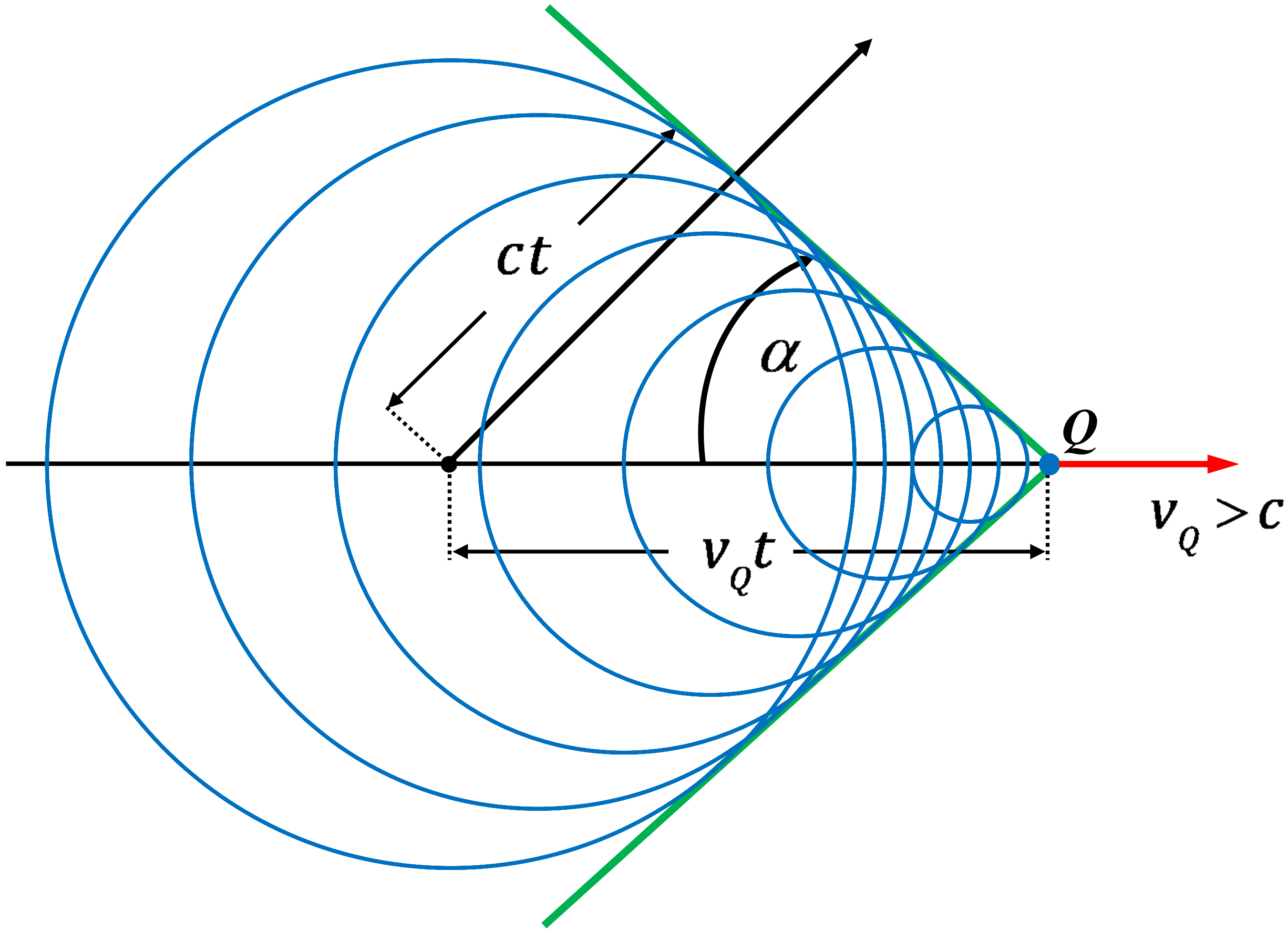
4.5.4 Quelle bewegt sich mit Überschallgeschwindigkeit

Mit $v_{\mathrm{Q}} \to c$ rücken die Wellenfronten vor der Quelle immer dichter zusammen, bis sie schließlich bei $v_{\mathrm{Q}} = c$ alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen und die Einhüllende einer ebenen Wand gleicht.

Bei $v_{\mathrm{Q}} > c$, d.h. Überschallgeschwindigkeit, durchstößt die Quelle diese Wand (sogenannte Schallmauer) und es stellt sich ein Wellenfeld mit einer kegelförmigen Einhüllenden, dem sogenannten Machschen-Kegel, ein.

Die kegelförmige Wellenfront nennt man auch Kopfwelle.


Q
$v_Q = c$


ct
α
Q
$v_Q t$
$v_Q > c$

Da sich die Wellenfront auf dem Kegelmantel konstruktiv addieren, hört ein von der kegelförmigen Wellenfront getroffener Beobachter einen explosionsartigen Knall.

Der Öffnungswinkel des Machschen-Kegels ergibt sich wegen

$$\sin\alpha = \frac{ct}{v_Q t} = \frac{c}{v_Q} = \frac{1}{Ma}$$

zu

$$\beta = 2\alpha = 2\arcsin\left(\frac{1}{Ma}\right)$$

wobei

$$Ma = v_Q / c$$

die Machsche-Zahl bezeichnet.

Literatur zu Kapitel 4

[1] D.T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Wiley, 2000

[2] L. Cremer und M. Möser, *Technische Akustik*, Springer, 2003

[3] E. Hering, R. Martin und M. Stohrer, *Physik für Ingenieure*, Springer, 2002

[4] H. Kuttruff, *Akustik: Eine Einführung,* Hirzel Verlag, 2004

[5] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf, *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*, Springer, 2009

[6] P.A. Tipler, *Physik*, Spektrum, 1994