

# Einführung in die Technische Akustik

## Inhalt

**1 Grundbegriffe der Schwingungslehre**

**2 Schallfeldgrößen und Wellengleichung für fluide Medien**

**3 Ebene Schallwellen in fluiden Medien**

**4 Kugelwellen**

**5 Synthese von Schallquellen**

**6 Reflexion, Brechung und Beugung**

**7 Akustische Leitungen**

**8 Geometrische Akustik**

# 5. Synthese von Schallquellen

## 5.1 Grundlagen

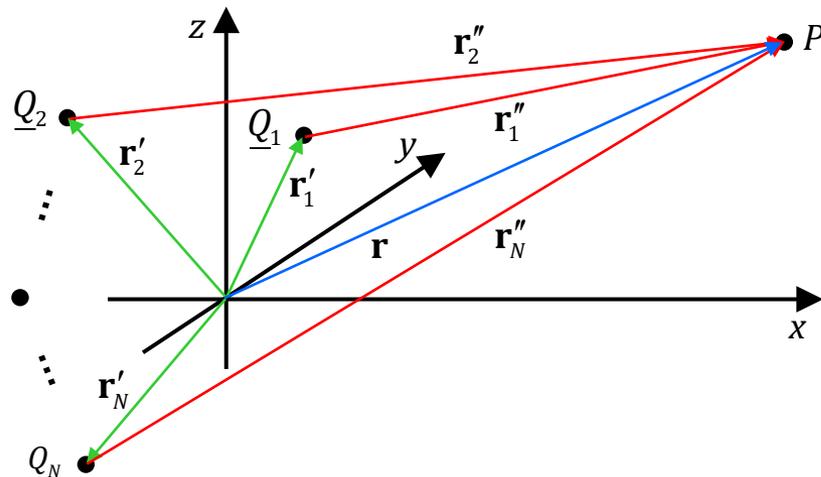
Komplexe Schallquellen kann man sich aus mehreren oder unendlich vielen Punktschallquellen zusammengesetzt denken.

Mehrere oder abzählbar unendlich viele Punktschallquellen

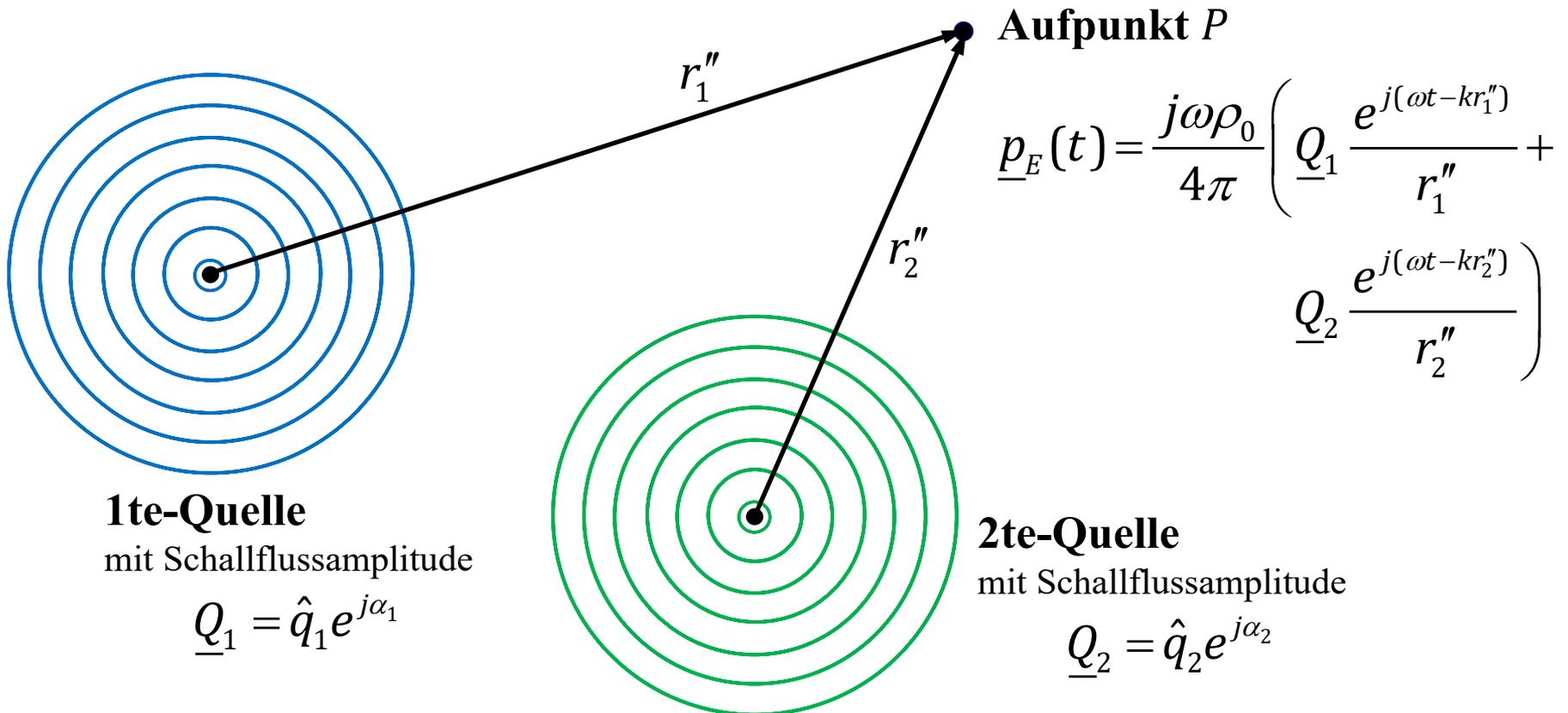
Für eine aus mehreren Punktschallquellen mit den Schallflüssen

$$Q_n \text{ mit } n = 1, \dots, N$$

zusammengesetzten Schallquelle ist der



## Überlagerung zweier kohärenter Kugelwellen



Gesamtschalldruck an einem Aufpunkt  $P$  durch

$$\underline{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N \underline{Q}_n \frac{e^{j(\omega t - k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|} = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi} \sum_{n=1}^N \underline{Q}_n \frac{e^{j(\omega t - k|\mathbf{r}''_n|)}}{|\mathbf{r}''_n|}, \quad \underline{Q}_n = \hat{q}_n e^{j\alpha_n}$$

gegeben. Die Abstände  $|\mathbf{r}''_n| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_n|$  ( $n = 1, \dots, N$ ) ergeben sich mit  $\mathbf{r} = (x, y, z)^T$  und  $\mathbf{r}'_n = (x'_n, y'_n, z'_n)^T$  zu

$$r''_n = |\mathbf{r}''_n| = \sqrt{(x - x'_n)^2 + (y - y'_n)^2 + (z - z'_n)^2}$$

oder mit Hilfe des Cosinus-Satzes zu

$$r''_n = \sqrt{r^2 + r_n'^2 - 2r r_n' \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n))}$$

wobei

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r'_n = |\mathbf{r}'_n| = \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 + z_n'^2}$$

und

$$\cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n)) = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}'_n}{r r'_n} = \frac{x x'_n + y y'_n + z z'_n}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x_n'^2 + y_n'^2 + z_n'^2}}.$$

Nun sei der Aufpunkt  $P$  soweit von den Schallquellen  $Q_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) entfernt, dass  $r \gg r'_n$  für alle  $n = 1, \dots, N$  gilt. Dann sind auch alle  $\mathbf{r}''_n$  mit  $n = 1, \dots, N$  nahezu parallel.

Für  $r''_n$  erhält man deshalb näherungsweise

$$r_n'' = r \sqrt{1 + (r_n'/r)^2 - 2(r_n'/r) \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n'))}$$
$$\approx r \sqrt{1 - 2(r_n'/r) \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n'))}$$

und mit

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{128}x^4 - \dots \text{ für } |x| < 1$$

schließlich

$$r_n'' \approx r \left( 1 - r_n'/r \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n')) \right) = r - r_n' \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}_n'))$$

Einsetzen von  $r_n''$  in den Exponenten der Beziehung für den Gesamtschalldruck liefert, wenn man außerdem  $r_n''$  im Nen-

ner ohne großen Fehler durch  $r$  ersetzt, den Ausdruck

$$\underline{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \sum_{n=1}^N \underline{Q}_n e^{jk r'_n \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n))} .$$

Nach Einführen des maximal möglichen Gesamtschallflusses

$$\hat{q}_g = \sum_{n=1}^N \hat{q}_n, \quad \underline{Q}_n = \hat{q}_n e^{j\alpha_n}$$

kann die Richtfunktion

$$\underline{b}(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\hat{q}_g} \sum_{n=1}^N \underline{Q}_n e^{jk r'_n \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n))}$$

definiert werden. Hierbei gehen Azimut  $\varphi$  und Elevation  $\vartheta$  über

$$\mathbf{r} = r (\cos \varphi \cos \vartheta, \sin \varphi \cos \vartheta, \sin \vartheta)^T$$

in die Richtfunktion ein.

Der Schalldruck am Aufpunkt  $P$ , d.h. im Abstand  $r$  mit Azimut  $\varphi$  und Elevation  $\vartheta$ , berechnet sich dann zu

$$\underline{p}(r, \varphi, \vartheta, t) = \frac{j\omega\rho_0\hat{q}_g}{4\pi r} \underline{b}(\varphi, \vartheta) e^{j(\omega t - kr)} \quad \text{für } r \gg r'_n.$$

Dieser Ausdruck beschreibt den Schalldruck im Fernfeld der Punktschallquellenanordnung (Fraunhofer-Näherung).

Im Fernfeld besitzt der Schalldruck also die gleiche Entfernungsabhängigkeit wie eine Kugelwelle.

Das Betragsquadrat des Richtungsfaktors in dB

$$B(\varphi, \vartheta) = 10 \lg |\underline{b}(\varphi, \vartheta)|^2 = 20 \lg |\underline{b}(\varphi, \vartheta)|$$

bezeichnet man als die Richtcharakteristik (engl. beam pattern) der Strahleranordnung.

Die Intensität ergibt sich in Analogie zum Kugelstrahler zu

$$I(r, \varphi, \vartheta) = \frac{\rho_0 \hat{q}_g^2}{32\pi^2 c} \frac{\omega^2}{r^2} |\underline{b}(\varphi, \vartheta)|^2.$$

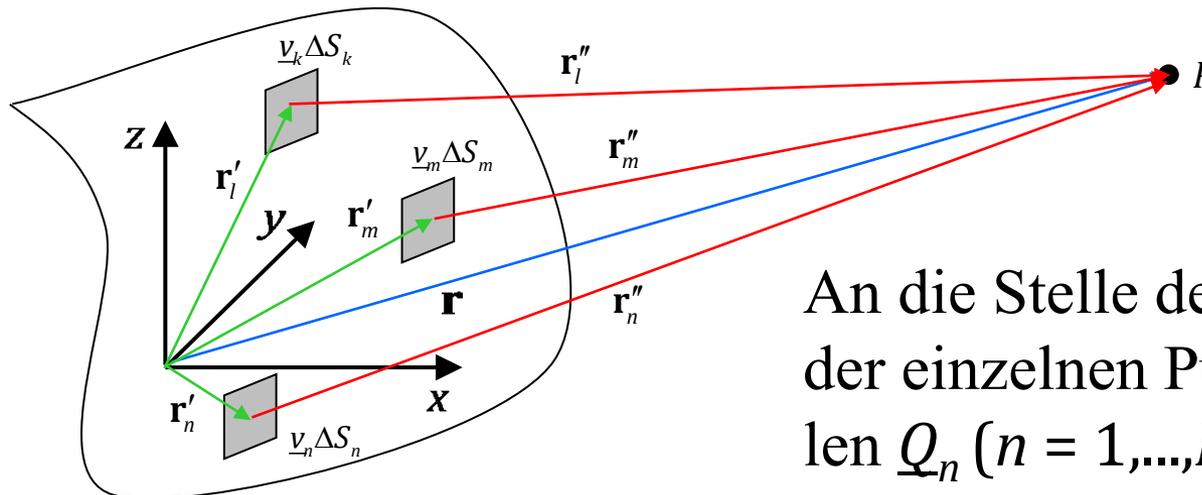
Integration der Intensität über eine Kugelfläche liefert die Wirkleistung

$$P = \frac{\rho_0 \hat{q}_g^2}{32\pi^2 c} \frac{\omega^2}{r^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\underline{b}(\varphi, \vartheta)|^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

(Für den Punktstrahler besitzt das Integral den Wert  $4\pi$ )

## Kontinuierliche Schallquellenbelegung

Die vorangegangenen Überlegungen und Ergebnisse können ohne größere Schwierigkeiten auf ausgedehnte Schallquellen, d.h. Schallquellen mit kontinuierlicher Flächenbelegung, übertragen werden.



An die Stelle des Schallflusses der einzelnen Punktschallquellen  $Q_n$  ( $n = 1, \dots, N$ ) tritt hier der Schallfluss der Flächenelemente  $\Delta S_k$ . Er beträgt  $\underline{v}_k \Delta S_k$ .

Der Schalldruck am Aufpunkt  $P$  kann dann aus den Beiträgen der einzelnen Flächenstrahler gemäß

$$\underline{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \sum_k \underline{v}_k \Delta S_k \frac{e^{j(\omega t - k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_k|} = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} \sum_k \underline{v}_k \Delta S_k \frac{e^{j(\omega t - kr''_k)}}{r''_k}$$

berechnet werden, wobei durch den Faktor  $1/2\pi$  statt  $1/4\pi$  eine Abstrahlung der Flächenelemente nur in einen Halbraum zugrunde gelegt wurde.

Im Fernfeld, d.h. für  $r \gg r'_n$ , vereinfacht sich der Ausdruck zu

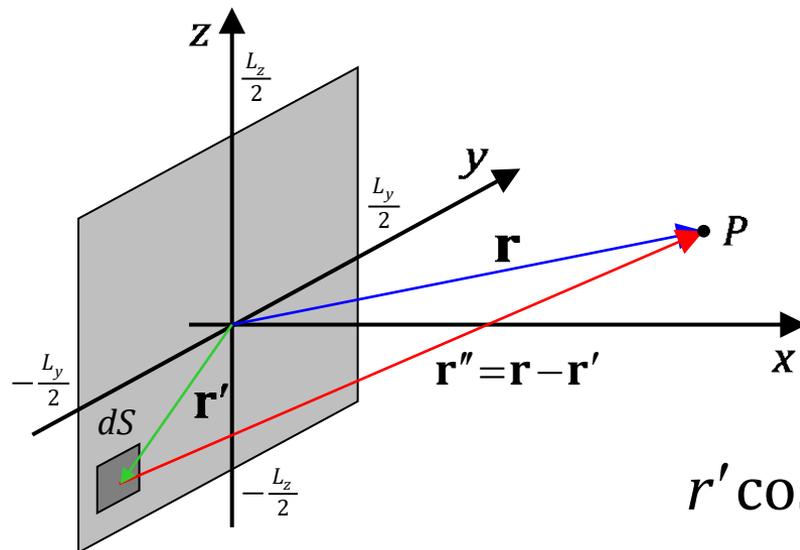
$$\underline{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \sum_k \underline{v}_k e^{jkr'_k \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_k))} \Delta S_k.$$

Bei einer kontinuierlichen Flächenbelegung geht die obige

Summe beim Grenzübergang auf infinitesimale Sender  $\underline{v} dS$  in ein Flächenintegral über und es gilt

$$\underline{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \int_S \underline{v}(\mathbf{r}') e^{jkr' \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))} dS.$$

Für eine ebene Strahlerfläche folgt mit



$$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$$

$$\mathbf{r}' = (0, y', z')^T$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r' \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}'}{r} = \frac{yy' + zz'}{r}$$

nach Einsetzen

$$\underline{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \underline{v}(y', z') e^{jk\left(\frac{y}{r}y' + \frac{z}{r}z'\right)} dy' dz'.$$

bzw. mit dem Wellenvektor

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{mit } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}
 \underline{p}(r, \varphi, \vartheta, t) &= \frac{j\omega\rho_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \underline{v}(y', z') e^{j\mathbf{k}^T \mathbf{r}'} dy' dz' \\
 &= \frac{j\omega\rho_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \underline{v}(y', z') e^{jk(\sin\varphi \cos\vartheta y' + \sin\vartheta z')} dy' dz' \\
 &= \frac{j\omega\rho_0}{2\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \underbrace{\int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \underline{v}(y', z') e^{j(k_y y' + k_z z')} dy' dz'}_{\text{2dimensionale Fourier-Transformation}}.
 \end{aligned}$$

Das hier auftretende Integral stellt nichts anderes als die 2dimensionale Fourier-Transformation der auf der Strahlerfläche

$S$  existierenden Schnelleverteilung dar.

Nach Einführen des maximal möglichen Gesamtschallflusses

$$\hat{q}_g = \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \hat{v}(y', z') dy' dz'$$

mit

$$\underline{v}(y', z') = \hat{v}(y', z') e^{j\alpha(y', z')}$$

lässt sich die Richtfunktion

$$\underline{b}(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\hat{q}_g} \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \underline{v}(y', z') e^{jk(\sin\varphi \cos\vartheta y' + \sin\vartheta z')} dy' dz'$$

definieren.

Analog zur diskreten Strahlerverteilung erhält man hier für den Druck, die Intensität und die Leistung die Beziehungen

$$\underline{p}(r, \varphi, \vartheta, t) = \frac{j\omega\rho_0\hat{q}_g}{2\pi r} \underline{b}(\varphi, \vartheta) e^{j(\omega t - kr)},$$

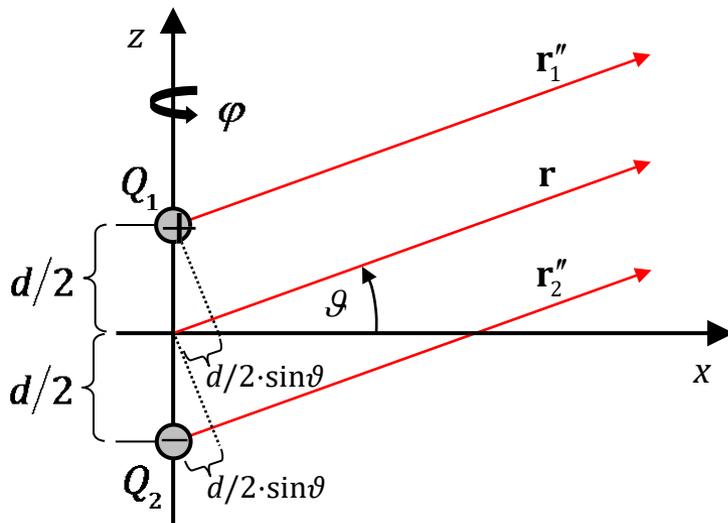
$$I(r, \varphi, \vartheta, t) = \frac{\rho_0\hat{q}_g^2}{8\pi^2 c} \frac{\omega^2}{r^2} |\underline{b}(\varphi, \vartheta)|^2$$

und

$$P = \frac{\rho_0\hat{q}_g^2}{8\pi^2 c} \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\underline{b}(\varphi, \vartheta)|^2 \cos \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

## 5.2 Dipolstrahler

Ein Dipolstrahler besteht aus zwei gegenphasig zueinander arbeitenden Punktschallquellen gleicher Stärke, z.B.  $Q_1 = -Q_2 = \hat{q}$  die einen Abstand  $d$  besitzen der klein im Vergleich zur Schallwellenlänge ist, d.h.  $kd = 2\pi d/\lambda \ll 1$ .



$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d/2 \end{pmatrix}$$

$$r'_1 \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1)) = \frac{d}{2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{d}{2} \sin \vartheta$$

$$r'_2 \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_2)) = -\frac{d}{2} \cdot \frac{z}{r} = -\frac{d}{2} \sin \vartheta$$

Der Schalldruck des Dipolstrahlers im Fernfeld lautet

$$\begin{aligned}\underline{p}(r, \varphi, \vartheta, t) &= \frac{j\omega\rho_0\hat{q}}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \begin{pmatrix} e^{j\frac{kd}{2}\sin\vartheta} & -e^{-j\frac{kd}{2}\sin\vartheta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{-\omega\rho_0\hat{q}}{2\pi r} \sin\left(\frac{kd}{2}\sin\vartheta\right) e^{j(\omega t - kr)}.\end{aligned}$$

Wegen  $kd = 2\pi d/\lambda \ll 1$  und damit

$$\sin\left(\frac{kd}{2}\sin\vartheta\right) \approx \frac{kd}{2}\sin\vartheta$$

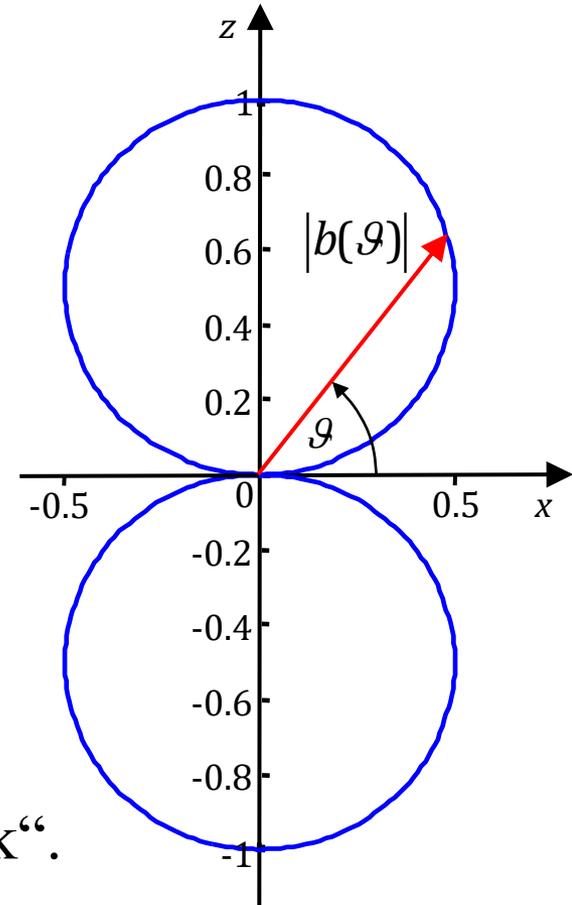
ergibt sich der Schalldruck zu

$$\begin{aligned}
 \underline{p}(r, \varphi, \vartheta, t) &= \frac{-\omega \rho_0 k d \hat{q}}{4\pi r} \sin \vartheta e^{j(\omega t - kr)} \\
 &= -\rho_0 c \frac{k^2 d \hat{q}}{4\pi r} b(\vartheta) e^{j(\omega t - kr)}.
 \end{aligned}$$

Der Dipolstrahler hat also die Richtfunktion

$$b(\vartheta) = \sin \vartheta,$$

d.h. eine sogenannte ‘‘Achtcharakteristik‘‘.



Für die durch den Dipolstrahler auf einer Kugel mit sehr großem Radius hervorgerufene Intensitätsverteilung gilt

$$I(r, \varphi, \vartheta) = \rho_0 c \frac{k^4 d^2 \hat{q}^2}{32\pi^2 r^2} \sin^2 \vartheta.$$

Integration über der Intensitätsverteilung auf dieser Kugel liefert die Gesamtleistung

$$\begin{aligned} P &= \rho_0 c \frac{k^4 d^2 \hat{q}^2}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \vartheta \cos \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \rho_0 c \frac{k^4 d^2 \hat{q}^2}{32\pi^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\vartheta) \cos \vartheta d\vartheta = \dots \end{aligned}$$

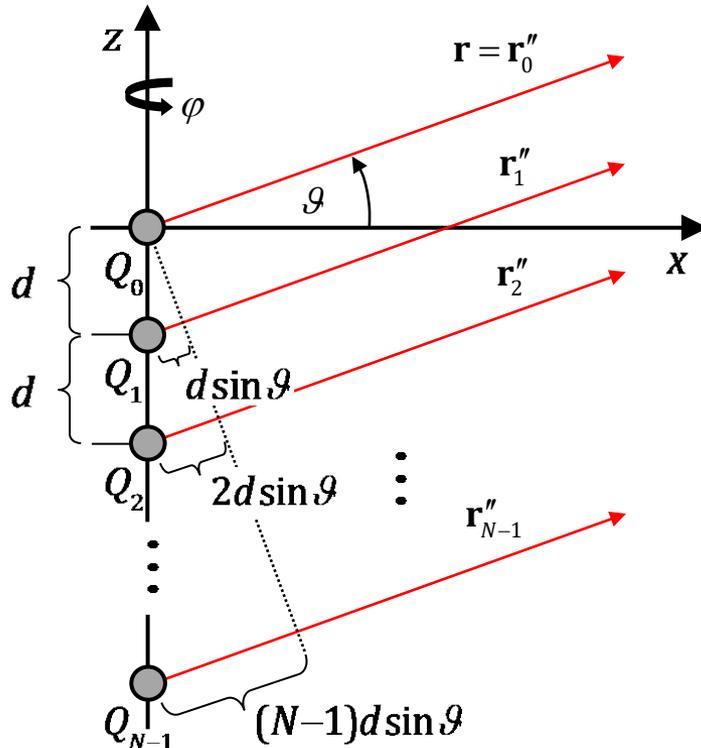
$$\begin{aligned} \dots &= \rho_0 c \frac{k^4 d^2 \hat{q}^2}{32\pi} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \vartheta d\vartheta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2\vartheta \cos \vartheta d\vartheta \right\} \\ &= \rho_0 c \frac{k^4 d^2 \hat{q}^2}{32\pi} \left\{ 2 - \int_0^{\pi/2} \underbrace{(\cos \vartheta + \cos 3\vartheta)}_{1+(-1)^{1/3}} d\vartheta \right\} = \frac{\rho_0 d^2 \hat{q}^2}{24\pi c^3} \omega^4. \end{aligned}$$

## 5.3 Gerade Strahlerzeile

Die gerade Strahlerzeile (engl. line array) besteht aus  $N$  äquidistant angeordneten Punktquellen.

Zunächst sei angenommen, dass alle Quellen gleichphasig arbeiten. O.B.d.A. gelte

$$Q_0 = Q_1 = \dots = Q_{N-1} = \hat{q}.$$



$$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$$

$$\mathbf{r}'_n = (0, 0, -nd)^T$$

$$r'_n \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_n)) = \frac{\mathbf{r}^T \mathbf{r}'_n}{r} = \frac{z z'_n}{r}$$

$$= -nd \sin \vartheta$$

für  $n = 0, 1, \dots, N - 1$

Der Schalldruck der Strahlerzeile ergibt sich im Fernfeld zu

$$\underline{p}(r, \varphi, \vartheta, t) = \frac{j\omega\rho_0\hat{q}}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jknd \sin \vartheta}$$

und nach Einführen der Richtfunktion

$$\underline{b}(\vartheta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jkn d \sin \vartheta} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-jkd \sin \vartheta})^n$$

schließlich zu

$$p(r, \varphi, \vartheta, t) = \frac{j\omega\rho_0\hat{q}_g}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)} \underline{b}(\vartheta) \text{ mit } \hat{q}_g = N\hat{q}.$$

Mit Hilfe der endlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1 - q^N}{1 - q}$$

lässt sich die Richtfunktion durch

$$\underline{b}(\vartheta) = \frac{1}{N} \frac{1 - (e^{-jkd \sin \vartheta})^N}{1 - e^{-jkd \sin \vartheta}} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-jkNd \sin \vartheta}}{1 - e^{-jkd \sin \vartheta}}$$

ausdrücken.

Für den Betrag der Richtfunktion erhält man nach Ausklammern von  $\exp(-jkNd \sin \vartheta / 2)$  im Zähler und  $\exp(-jkd \sin \vartheta / 2)$  im Nenner die Gleichung

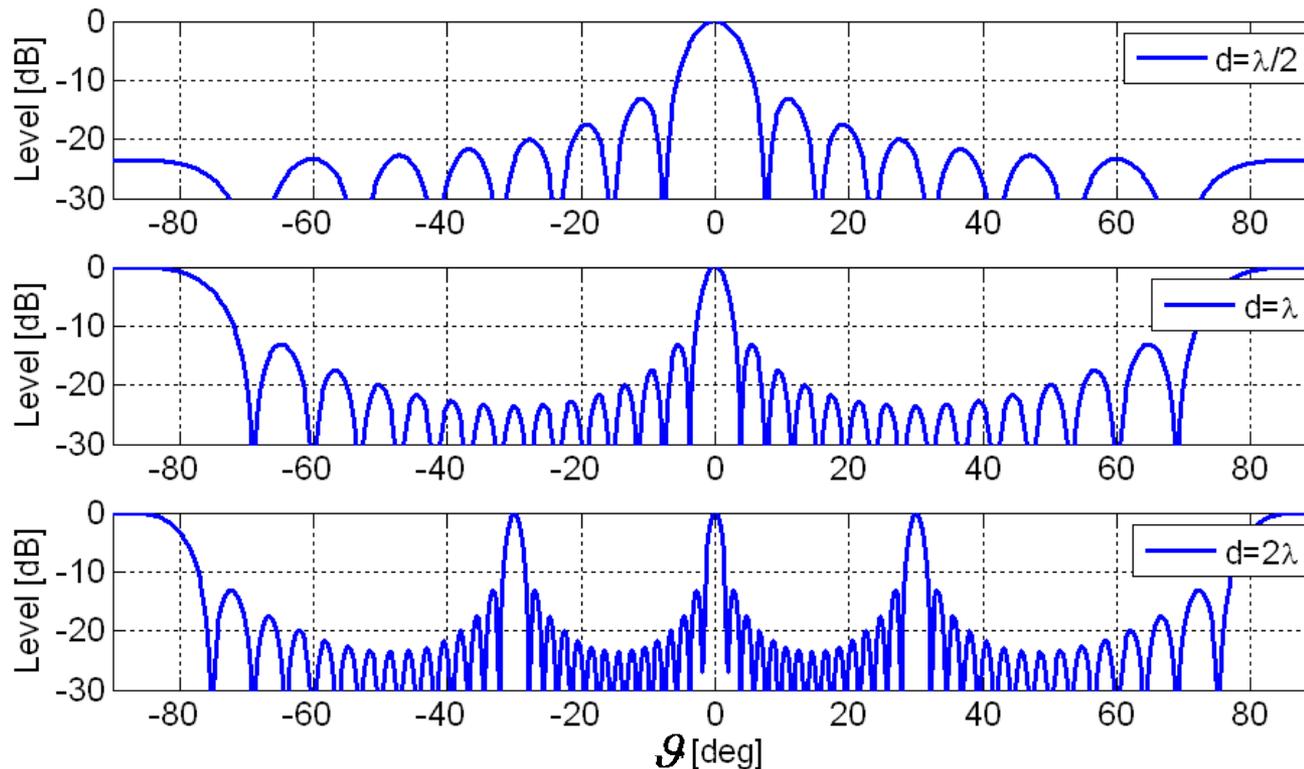
$$|\underline{b}(\vartheta)| = \frac{1}{N} \left| \frac{e^{j\frac{kNd}{2} \sin \vartheta} - e^{-j\frac{kNd}{2} \sin \vartheta}}{e^{j\frac{kd}{2} \sin \vartheta} - e^{-j\frac{kd}{2} \sin \vartheta}} \cdot \frac{e^{-j\frac{kNd}{2} \sin \vartheta}}{e^{-j\frac{kd}{2} \sin \vartheta}} \right| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(kNd/2 \sin \vartheta)}{\sin(kd/2 \sin \vartheta)} \right|.$$

Die Halbwertsbreite der Richtfunktion  $2\Delta\vartheta$  ist definiert durch

$$|\underline{b}(\vartheta)|^2 = 1/2 \text{ bzw. } |\underline{b}(\vartheta)| = 1/\sqrt{2}.$$

Für  $Nd$  hinreichend groß gilt

$$2\Delta\vartheta \approx 0,88 \frac{\lambda}{Nd} [\text{rad}] \text{ bzw. } 2\Delta\vartheta \approx 50 \frac{\lambda}{Nd} [\text{deg}] \text{ mit } \lambda = c/f.$$



## 5.4 Kreisförmige Kolbenmembran

Als Beispiel eines ebenen Schallstrahlers betrachten wir eine kreisförmige, in eine starre Wand eingesetzte Kolbenmembran mit dem Radius  $a$ , die in Richtung ihrer Normalen mit der ortsunabhängigen (gleichphasigen) komplexen Schnelleamplitude

$$\underline{v} = \hat{v} e^{j\alpha}$$

schwingt. Die Richtfunktion eines ebenen Schallstrahlers lautet

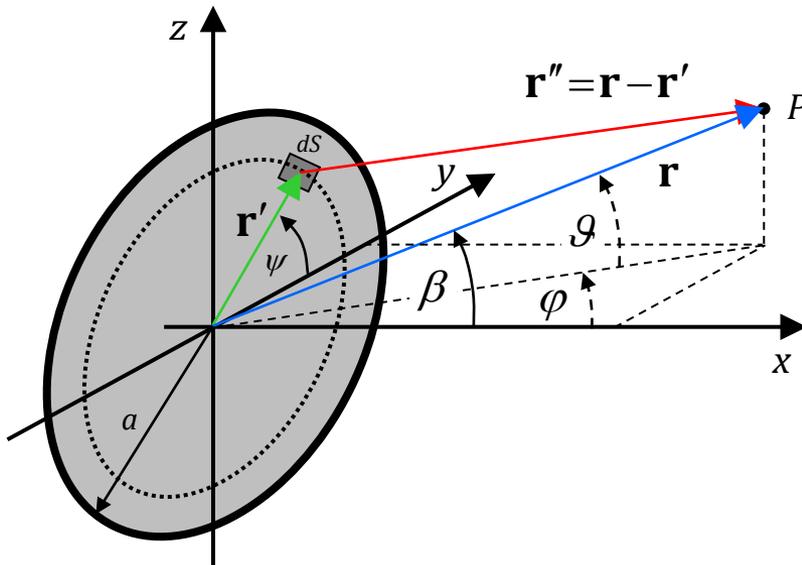
$$\underline{b}(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\hat{q}_g} \int_S \underline{v}(y', z') e^{j(k_y y' + k_z z')} d(y', z').$$

Für die gleichphasig schwingende Kolbenmembran, wobei o.B.d.A.  $\alpha = 0$  sei, ergibt sich der Schallfluss zu

$$\underline{Q}_g = S \underline{v} = \pi a^2 \hat{v} = \hat{q}_g.$$

Einsetzen von  $\underline{v}$  und  $\hat{q}_g$  in  $\underline{b}(\varphi, \vartheta)$  liefert

$$\underline{b}(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\pi a^2} \int_S e^{j(k_y y' + k_z z')} d(y', z').$$



$$\mathbf{r} = (x, y, z)^T$$

$$\mathbf{r}' = (0, y', z')^T$$

$$r' \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) = \frac{y y' + z z'}{r}$$

Nach Einführen der Polarkoordinaten

$$y' = r' \cos \psi, \quad z' = r' \sin \psi \quad \text{und} \quad r' = |\mathbf{r}'|$$

mit  $d(y', z') = \det(\mathbf{J}) d(r', \psi) = r' d(r', \psi)$  erhält man den Ausdruck

$$\underline{b}(\varphi, \vartheta) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} e^{jr'(k_y \cos \psi + k_z \sin \psi)} r' d\psi dr'.$$

Ausnutzen von

$$k_y \cos \psi + k_z \sin \psi = k(\sin \varphi \cos \vartheta \cos \psi + \sin \vartheta \sin \psi)$$

und der Zylindersymmetrie, d.h. Einführen des Winkels  $\beta$  zwischen dem Vektor  $\mathbf{r}$  und der  $x$ -Achse liefert für  $\varphi = 0$

$$\vartheta = \beta \quad \text{und} \quad k_y \cos \psi + k_z \sin \psi = k \sin \beta \sin \psi$$

und damit die Richtfunktion

$$\underline{\tilde{b}}(\beta) = \underline{b}(0, \beta) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \left( \int_{-\pi}^{\pi} e^{jkr' \sin \beta \sin \psi} d\psi \right) r' dr'.$$

Mit Hilfe der Besselfunktion  $n$ -ter Ordnung

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(x \sin \alpha - n\alpha)} d\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2l}$$

(Zylinderfunktion erster Art) kann die Richtfunktion durch

$$\underline{\tilde{b}}(\beta) = \frac{2}{a^2} \int_0^a J_0(kr' \sin \beta) r' dr'$$

ausgedrückt werden.

Substitution gemäß

$$x = kr' \sin \beta, \quad r' = x/(k \sin \beta), \quad dr' = 1/(k \sin \beta) dx$$

liefert

$$\underline{\tilde{b}}(\beta) = \frac{2}{k^2 a^2 \sin^2 \beta} \int_0^{ka \sin \beta} J_0(x) x dx$$

und wegen

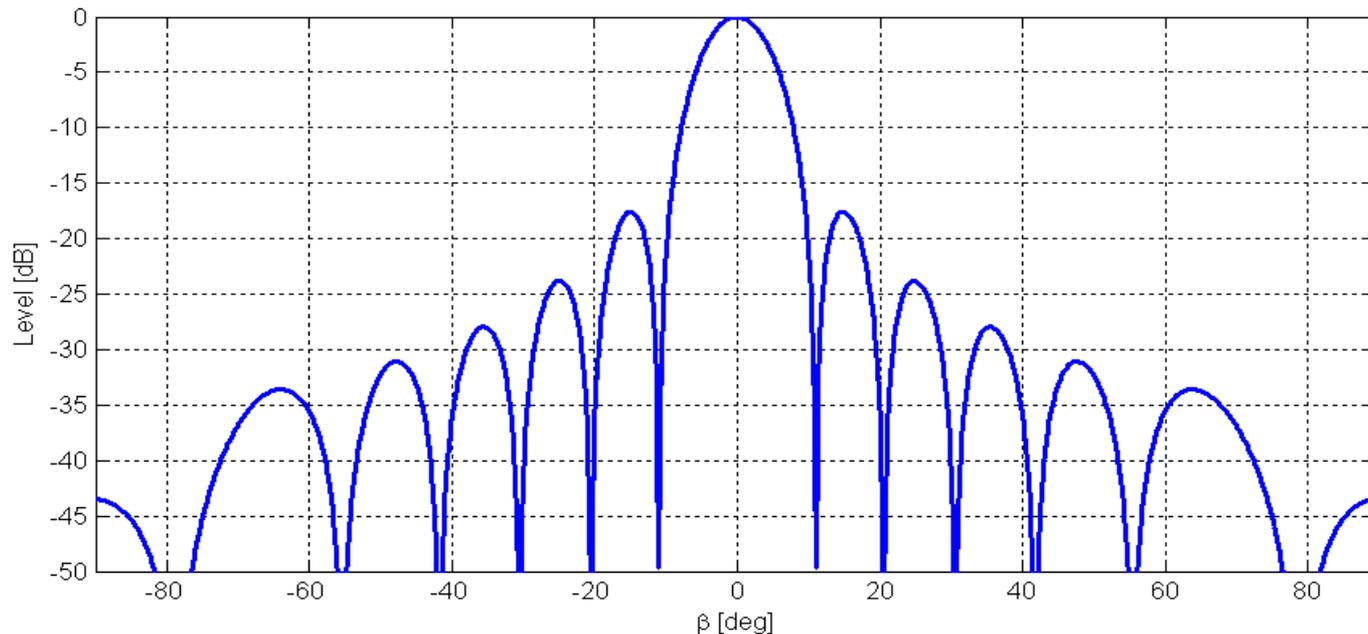
$$\frac{d}{dx} \left( x^n J_n(x) \right) = x^n J_{n-1}(x) \Rightarrow \int x^n J_{n-1}(x) dx = x^n J_n(x) + C$$

abschließend

$$\underline{\tilde{b}}(\beta) = \frac{2}{k^2 a^2 \sin^2 \beta} x J_1(x) \Big|_0^{ka \sin \beta} = \frac{2}{ka \sin \beta} J_1(ka \sin \beta).$$

Die Halbwertsbreite der Richtfunktion einer Kolbenmembran ergibt sich für hinreichend große Radien  $a$  approximativ zu

$$2\Delta\beta \approx \frac{\lambda}{2a} [\text{rad}] \text{ bzw. } 2\Delta\beta \approx 57 \frac{\lambda}{2a} [\text{deg}] \text{ mit } \lambda = c/f.$$



## Nahfeld – Fernfeldübergang

Der Schalldruck im Aufpunkt  $P$  ergibt sich allgemein, d.h. ohne Fernfeldannahme, zu

$$\underline{p}(\mathbf{r}, t) = \frac{j\omega\rho_0\hat{v}}{2\pi} e^{j\omega t} \int_S \frac{e^{-jkr''}}{r''} d(y', z') = \frac{j\omega\rho_0\hat{v}}{2\pi} e^{j\omega t} \int_0^a \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkr''}}{r''} r' d\psi dr'$$

mit

$$r'' = |\mathbf{r}''| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\angle(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Für die Berechnung des Schalldrucks auf der Strahlermittelachse, d.h.  $\mathbf{r} = r(1, 0, 0)^T$ , gilt wegen

$$r'' = \sqrt{r^2 + r'^2}$$

unabhängig von  $\psi$  und

$$\underline{p}(r,t) = j\omega\rho_0\hat{v}e^{j\omega t} \int_0^a \frac{e^{-jk\sqrt{r^2+r'^2}}}{\sqrt{r^2+r'^2}} r' dr'$$

nach Substitution mit

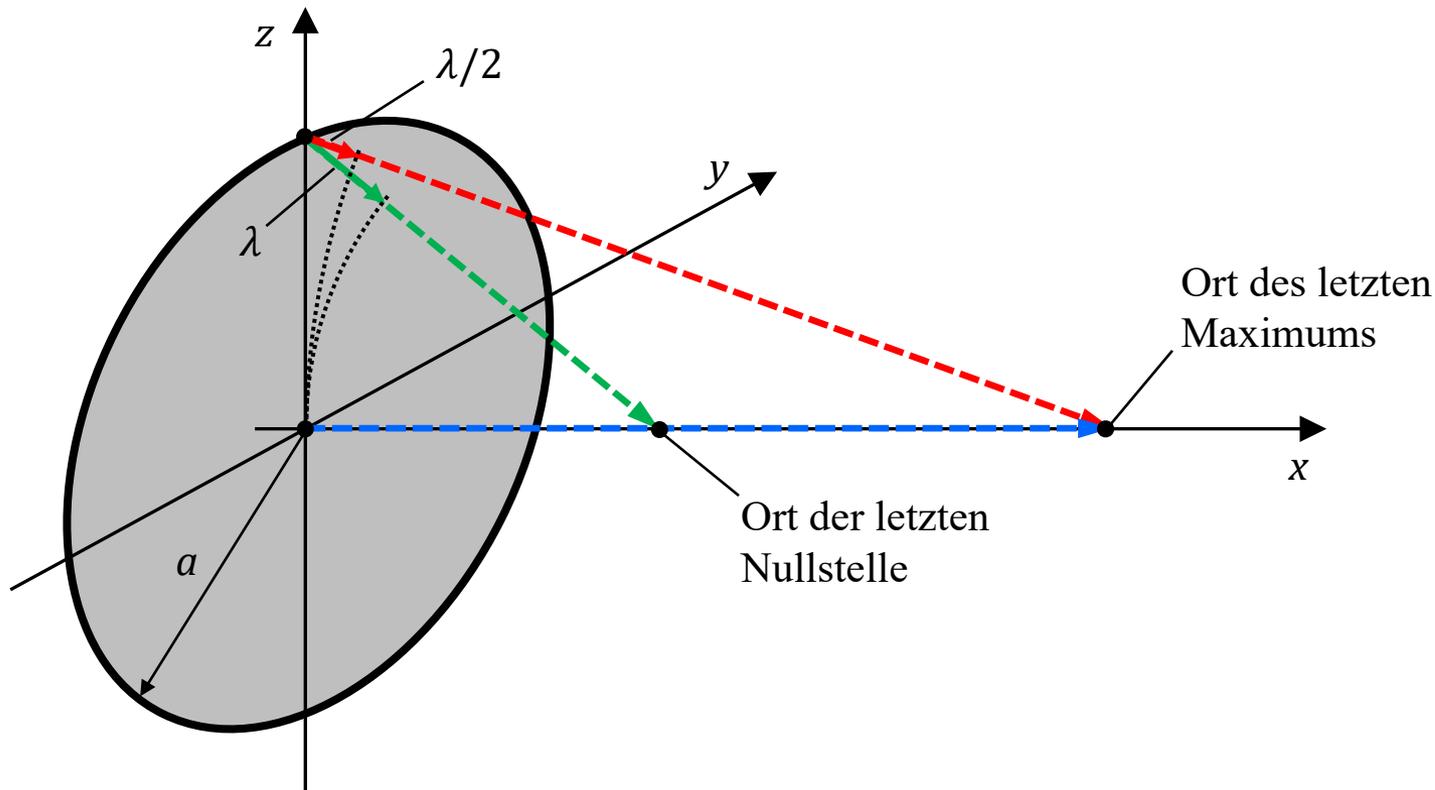
$$r'' = \sqrt{r^2+r'^2}, \quad dr'' = \frac{r'}{\sqrt{r^2+r'^2}} dr'$$

schließlich

$$\begin{aligned} \underline{p}(r,t) &= j\omega\rho_0\hat{v}e^{j\omega t} \int_r^{\sqrt{r^2+a^2}} e^{-jkr''} dr'' = \frac{\omega\rho_0\hat{v}}{-k} e^{j\omega t} e^{-jkr''} \Big|_r^{\sqrt{r^2+a^2}} \\ &= c\rho_0\hat{v}e^{j\omega t} \left( e^{-jkr} - e^{-jk\sqrt{r^2+a^2}} \right). \end{aligned}$$

Der gesamte Schalldruck setzt sich somit aus einer vom Mem-

brammittelpunkt und einer vom Rand ausgehenden ebenen Welle zusammen. Beide interferieren miteinander, wodurch starke ortsabhängige Schalldruckschwankungen entstehen.



Erst in großer Entfernung, d.h.  $r \gg a$ , tritt das schon oben behandelte Fernfeldverhalten, d.h.  $|p| \propto 1/r$  auf.

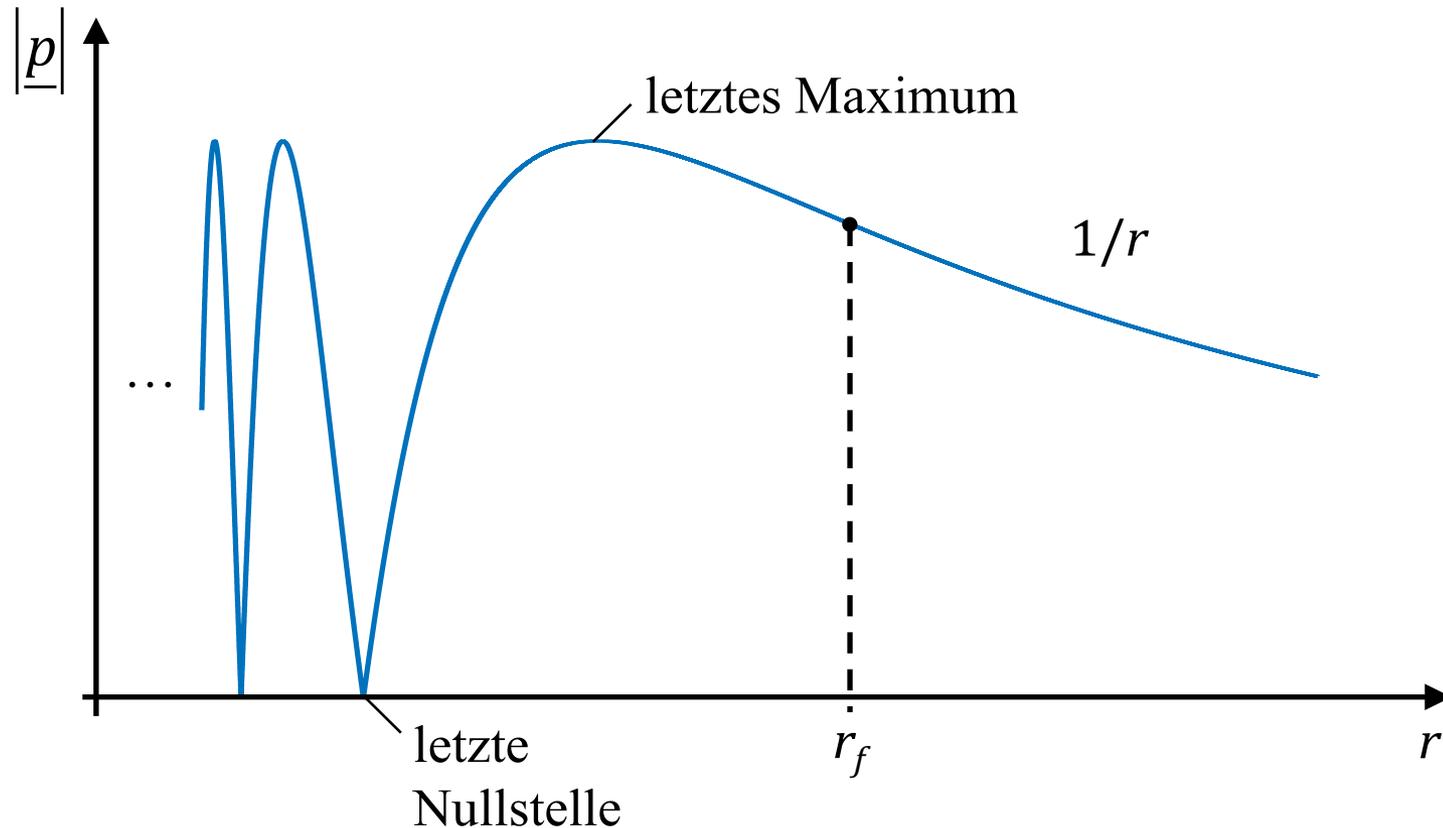
Das letzte Maximum von  $|p(r,t)|$  tritt auf, wenn

$$k\left(\sqrt{r^2 + a^2} - r\right) = kr\left(\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2}} - 1\right) \approx kr\left(1 + \frac{a^2}{2r^2} - 1\right) = \frac{ka^2}{2r} = \pi.$$

Hieraus kann geschlossen werden, dass bei der Entfernung

$$r_f > \frac{ka^2}{2\pi} = \frac{a^2}{\lambda} \Rightarrow r_f \approx \pi \frac{a^2}{\lambda} = \frac{S}{\lambda}$$

das Nah- in das Fernfeld übergeht. Diese Faustformel kann im übrigen auch auf andere Kolbenmembranformen angewendet werden.



## Analogie Sender/Empfänger

Die zuvor behandelten Gesetze der Schallabstrahlung lassen sich auf den Schallempfang übertragen. Geht z.B. von einem Punkt  $P$  eine Welle aus und besteht der Schallempfänger aus einer Anordnung schallempfindlicher Punkte, z.B. einem Mikrofon-Array, so hat deren Summensignal dieselbe Orts- und Richtungsabhängigkeit von  $P$  wie der Schalldruck im Fall der Schallabstrahlung. Insbesondere gelten dieselben Gesetzmäßigkeiten hinsichtlich Fernfeld und Richtfunktion.

## Literatur zu Kapitel 5

- [1] D.T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Wiley, 2000
- [2] L. Cremer und M. Hubert, *Vorlesungen über Technische Akustik*, Springer, 1990
- [3] L. Cremer und M. Möser, *Technische Akustik*, Springer, 2003
- [4] H. Kuttruff, *Akustik: Eine Einführung*, Hirzel Verlag, 2004
- [5] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf, *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*, Springer, 2009