

# Einführung in die Technische Akustik

## Inhalt

**1 Grundbegriffe der Schwingungslehre**

**2 Schallfeldgrößen und Wellengleichung für fluide Medien**

**3 Ebene Schallwellen in fluiden Medien**

**4 Kugelwellen**

**5 Synthese von Schallquellen**

**6 Reflexion, Brechung und Beugung**

**7 Akustische Leitungen**

**8 Geometrische Akustik**

# 7 Akustische Leitungen

## 7.1 Leitungsgleichung

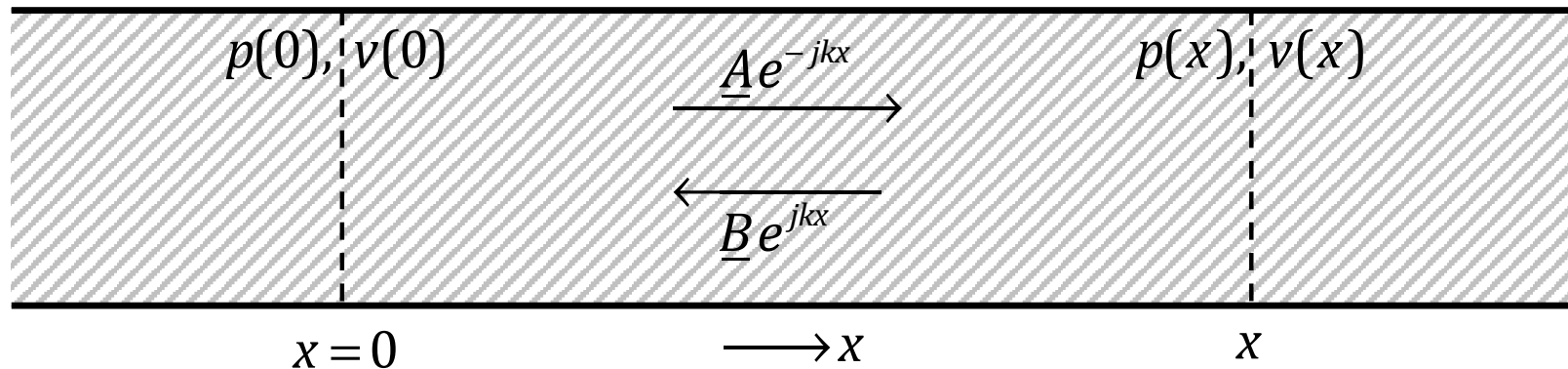
Die Ausbreitung ebener Wellen wird durch parallel zur Ausbreitungsrichtung befindliche schallharte Flächen nicht gestört.

Diese Feststellung gilt auch dann, wenn die schallharten Flächen zu einem Rohr zusammengebogen werden.

Die Ausbreitung zwischen parallelen, schallharten Ebenen oder einem schallharten Rohr folgt somit den gleichen Gesetzmäßigkeiten wie die Ausbreitung einer unbegrenzten ebenen Welle.

Ideal schallharte Wände sind natürlich nicht realisierbar. Für die Praxis genügt es aber, wenn die Wand hinreichend dick

und schwer und wenn der Wellenwiderstand des Wandmaterials möglichst groß im Vergleich zu dem des Schallausbreitungsmediums ist.



$$\underline{p}(x, t) = \underline{A} e^{j(\omega t - kx)} + \underline{B} e^{j(\omega t + kx)}$$

$$\underline{p}(x) = \underline{A} e^{-jkx} + \underline{B} e^{jkx},$$

wobei  $\underline{A}$  und  $\underline{B}$  vorerst beliebige komplexe Amplituden sind.

Die Schallschnelle ist über den Wellenwiderstand gemäß

$$\underline{v}(x) = \pm \underline{p}(x) / Z_W$$

mit dem Schalldruck verknüpft, wobei das positive Vorzeichen für die sich in positiver  $x$ -Richtung und das negative Vorzeichen für die sich in negativer  $x$ -Richtung ausbreitende ebene Welle gilt. Hieraus ergibt sich

$$Z_W \underline{v}(x) = \underline{A} e^{-jkx} - \underline{B} e^{jkx}$$

und nach Ausnutzen von

$$e^{\pm jkx} = \cos(kx) \pm j \sin(kx)$$

schließlich

$$\underline{p}(x) = (\underline{A} + \underline{B})\cos(kx) - j(\underline{A} - \underline{B})\sin(kx)$$

$$Z_W \underline{v}(x) = (\underline{A} - \underline{B})\cos(kx) - j(\underline{A} + \underline{B})\sin(kx)$$

bzw. wegen

$$\underline{p}(0) = \underline{A} + \underline{B} \quad \text{und} \quad Z_W \underline{v}(0) = \underline{A} - \underline{B}$$

die Darstellung

$$\underline{p}(x) = \underline{p}(0)\cos(kx) - jZ_W \underline{v}(0)\sin(kx)$$

$$Z_W \underline{v}(x) = -j\underline{p}(0)\sin(kx) + Z_W \underline{v}(0)\cos(kx).$$

Diese Gleichungen heißen Leitungsgleichungen. Sie verknüpfen den Schalldruck und die Schallschnelle an einer beliebigen Stelle  $x$  mit den an der Stelle  $x = 0$  vorliegenden Größen.

Nun sei die Rohrleitung an der Stelle  $x = 0$  aufgetrennt und mit einer Fläche der Impedanz  $\underline{Z}(0) = \underline{p}(0)/\underline{v}(0)$  abgeschlossen. Die Stelle  $x = -l$  befindet sich im Abstand  $l$  vor diesem Abschluss.

Division der beiden Leitungsgleichungen

$$\begin{aligned}\underline{\tilde{p}}(l) &= \underline{p}(-l) = \underline{p}(0)\cos(kl) + jZ_W\underline{v}(0)\sin(kl) \\ Z_W\underline{\tilde{v}}(l) &= Z_W\underline{v}(-l) = j\underline{p}(0)\sin(kl) + Z_W\underline{v}(0)\cos(kl)\end{aligned}$$

liefert

$$\frac{\underline{Z}(l)}{Z_W} = \frac{\underline{p}(0)\cos(kl) + jZ_W\underline{v}(0)\sin(kl)}{j\underline{p}(0)\sin(kl) + Z_W\underline{v}(0)\cos(kl)}$$

bzw. nach Auflösen

$$\Rightarrow \underline{Z}(l) = \frac{\underline{Z}(0) + jZ_W \tan(kl)}{1 + j\underline{Z}(0)/Z_W \tan(kl)}$$

Diese Gleichung besagt, dass ein Rohrstück eine gegebene Impedanz i. Allg. in eine andere Impedanz transformiert.

### Spezialfälle:

1)  $l = \lambda/4$  also  $kl = \pi/2 \Rightarrow \underline{Z}(l) = Z_W^2 / \underline{Z}(0)$ ,

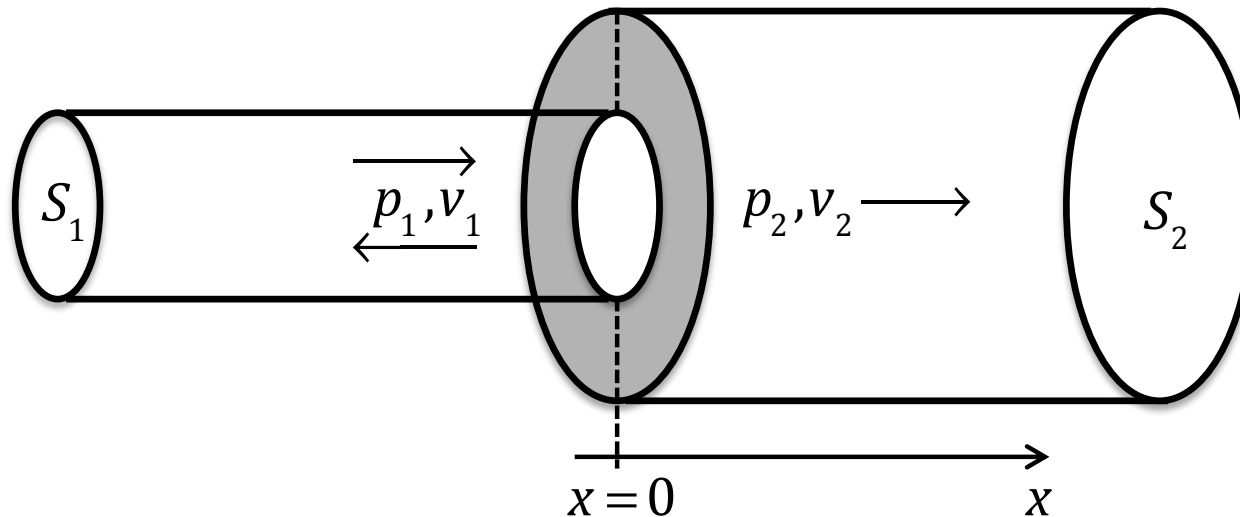
d.h. ein Rohr mit  $l = \lambda/4$  transformiert eine gegebene Impedanz  $\underline{Z}(0)$  bis auf den Faktor  $Z_W^2$  in ihren reziproken Wert.

2) Schallharter Abschluss bei  $x = 0$ , d.h.  $\underline{Z}(0) = \infty$

$$\underline{Z}(l) = -jZ_W \cot(kl).$$

## 7.2 Leitungen mit un stetigen Querschnitts- änderungen

### 7.2.1 Einfacher Querschnittsprung



An der Verbindungsstelle muss der Druck  $\underline{p}_1$  auf der linken Seite mit dem Druck  $\underline{p}_2$  auf der rechten Seite übereinstimmen. Drückt man  $\underline{p}_1$  und  $\underline{p}_2$  mit Hilfe des Reflexions- und Transmis-



sionskoeffizienten und dem Schalldruck der einfallenden Welle  $\underline{p}_e$  aus, d.h.  $\underline{p}_1 = (1+R)\underline{p}_e$  und  $\underline{p}_2 = T\underline{p}_e$ , dann ergibt sich nach Gleichsetzen

$$1 + R = T. \quad (*)$$

Überdies muss das von links an den Querschnittsprung herangeführte Medium (Wechselströmung) von der rechten Seite vollständig aufgenommen werden (Kontinuitätsprinzip). Es gilt also

$$\underline{v}_1 S_1 = \underline{v}_2 S_2$$

oder mit

$$\underline{v}_1 = \underline{v}_e (1 - R) = \frac{\underline{p}_e}{Z_W} (1 - R)$$

und

$$\underline{v}_2 = T\underline{v}_e = T \frac{p_e}{Z_W}$$

letztlich

$$S_1(1-R) \frac{p_e}{Z_W} = S_2 T \frac{p_e}{Z_W}. \quad (**)$$

Aus (\*) und (\*\*) folgt für den Reflexionskoeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} S_1(1-R) = S_2(1+R) \\ R(S_1 + S_2) = S_1 - S_2 \end{array} \right\} \Rightarrow R = \frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2}$$

und für den Transmissionskoeffizienten

$$\left. \begin{array}{l} S_1(2-T) = S_2 T \\ T(S_1 + S_2) = 2S_1 \end{array} \right\} \Rightarrow T = \frac{2S_1}{S_1 + S_2}.$$

- a) Rohrerweiterung, d.h.  $S_2 > S_1$   
 $\Rightarrow -1 < R < 0$ , d.h. die Welle wird bzgl. des Schalldrucks unter Phasenumkehr reflektiert.
- b) Rohrverengung, d.h.  $S_2 < S_1$   
 $\Rightarrow 0 < R < 1$  und  $T > 1$ , letzteres ist durchaus im Einklang mit dem Energieerhaltungsprinzip, da die durch die Sprungstelle sekundlich hindurchtretende Schallenergie in jedem Fall um den Faktor

$$T^2 S_2 / S_1$$

kleiner ist als die von der einfallenden Welle herangeführte Energie.

Außerdem besteht zwischen den Impedanzen zu beiden Seiten der Sprungstelle

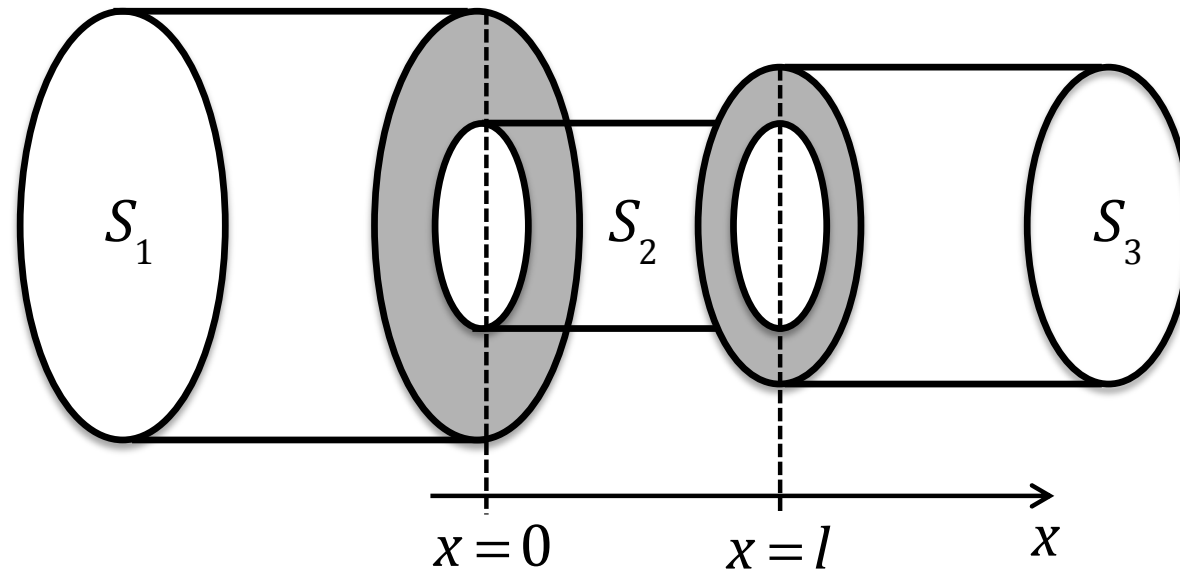
$$\underline{Z}^- = \underline{p}_1 / \underline{v}_1 \quad \text{und} \quad \underline{Z}^+ = \underline{p}_2 / \underline{v}_2$$

die Beziehung

$$\frac{\underline{Z}^-}{\underline{Z}^+} = \frac{\underline{p}_1 \underline{v}_2}{\underline{p}_2 \underline{v}_1} = \frac{(1+R) \underline{p}_e T \underline{v}_e}{(1-R) \underline{v}_e T \underline{p}_e} = \frac{S_1}{S_2} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z}^- = \frac{S_1}{S_2} \underline{Z}^+$$

d.h. der Querschnittsprung in einer Rohrleitung transformiert also auch die Impedanz.

## 7.2.2 Doppelter Querschnittsprung



Primärwelle fällt von links auf die Sprungstellen ein. Ferner breitet sich im rechten Rohr nur die durchgelassene Welle aus, d.h. das Rohr ist entweder unendlich lang oder mit einer Wand der akustischen Impedanz = Wellenwiderstand abgeschlossen.

Damit gilt dort

$$Z_W = \frac{p}{\underline{v}} = \rho_0 c = \underline{Z}(l+).$$

Durch den rechten Querschnittsprung wird dieser in

$$\underline{Z}(l-) = \frac{S_2}{S_3} \underline{Z}(l+) = \frac{S_2}{S_3} Z_W$$

transformiert. Ausnutzen der Impedanztransformationseigenschaften von Leitungen liefert die Impedanz am Ort  $x = 0+$

$$\underline{Z}(0+) = \frac{\underline{Z}(l-) + jZ_W \tan(kl)}{1 + j\underline{Z}(l-) / Z_W \tan(kl)} = \frac{S_2 / S_3 + j \tan(kl)}{1 + jS_2 / S_3 \tan(kl)} Z_W = \dots$$

$$\dots = Z_W \frac{S_2 + jS_3 \tan(kl)}{S_3 + jS_2 \tan(kl)}.$$

Der linke Querschnittsprung bewirkt eine weitere Impedanztransformation

$$\underline{Z}(0-) = \frac{S_1}{S_2} \underline{Z}(0+).$$

Die Eigenimpedanz der Gesamtanordnung ergibt sich damit zu

$$\underline{Z}_E = \underline{Z}(0-) = Z_W \frac{S_1}{S_2} \frac{S_2 + jS_3 \tan(kl)}{S_3 + jS_2 \tan(kl)}.$$

## Spezialfälle:

Im folgenden sei  $kl \ll 1$  und  $S_3 = S_1$ , d.h.

$$\underline{Z}_E \cong Z_W \frac{S_1}{S_2} \frac{S_2 + jklS_3}{S_3 + jklS_2} = Z_W \frac{S_1}{S_2} \frac{S_2 + jklS_1}{S_1 + jklS_2}.$$

a) *Rohrverengung*,  $S_2 < S_1$

$$\underline{Z}_E \cong Z_W \frac{1 + jklS_1/S_2}{1 + \underbrace{jklS_2/S_1}_{\ll 1}} \cong Z_W \left( 1 + jkl \frac{S_1}{S_2} \right)$$

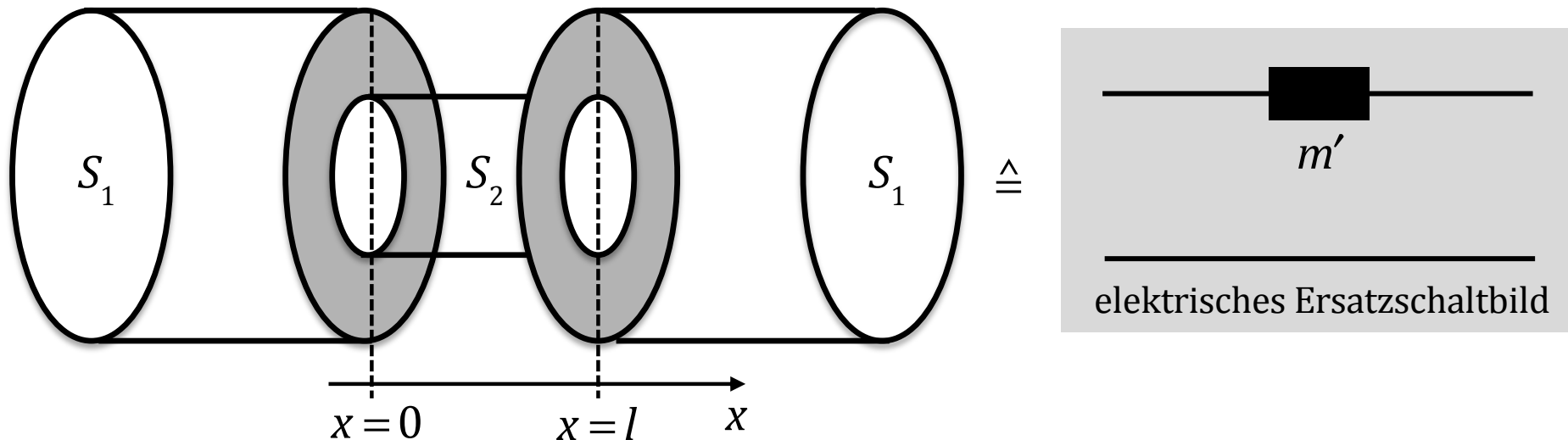
$$\cong Z_W + j\rho_0 c \frac{2\pi}{\lambda} l \frac{S_1}{S_2} = Z_W + j\omega \rho_0 l \frac{S_1}{S_2} = Z_W + j\omega m'$$



## Die Rohrverengung wirkt wie eine Flächenmasse

$$m' = \rho_0 l \frac{S_1}{S_2}$$

deren Trägheit von der einfallenden Schallwelle zusätzlich überwunden werden muss.



Lässt man  $l$  immer kleiner, d.h. das verengte Rohrstück immer kürzer werden, dann erhält man beim Grenzübergang eine verschwindend dünne Blende, die nach obiger Gleichung keinen Einfluss auf die Schallausbreitung hätte, was physikalisch natürlich unsinnig ist.

Dieser Schwierigkeit begegnet man durch Einführen einer effektiven Länge

$$\tilde{l} = l + 2\Delta l,$$

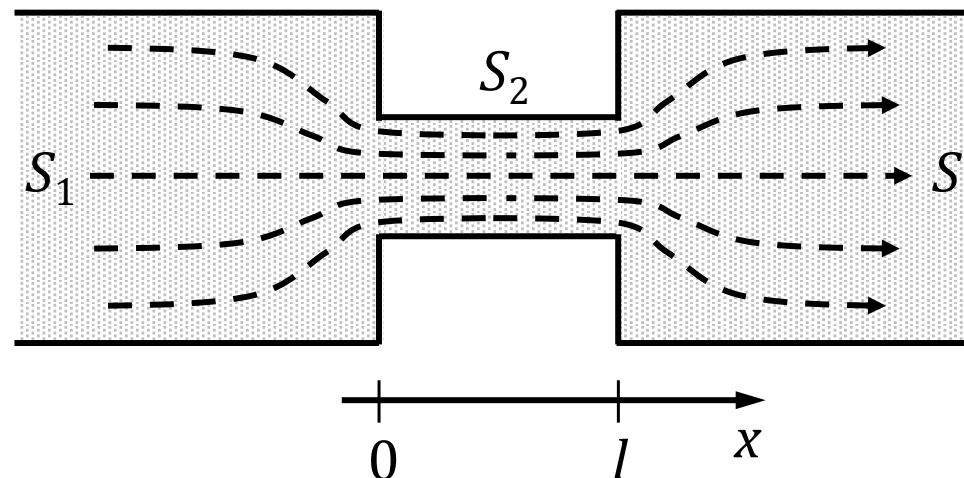
wobei  $\Delta l$  die Mündungskorrektur bezeichnet, die der allmählichen Einschnürung der Stromlinien Rechnung trägt.

Für kreisrunde, koaxiale Rohre gilt

$$\Delta l = \frac{\pi}{4} a \left( 1 - 1,47 \left( \frac{a}{b} \right) + 0,47 \left( \frac{a}{b} \right)^3 \right) \approx \frac{\pi}{4} a \approx 0,8a,$$

wobei  $a$  und  $b$  den Radius des engeren bzw. weiteren Rohrabschnitts angibt.

Mündungskorrektur (Modellierung der allmählichen Einschnürung der Stromlinien)



b) Rohrerweiterung,  $S_1 < S_2$

$$\underline{Z}_E = Z_W \frac{1 + \overbrace{jklS_1/S_2}^{\ll 1}}{1 + jklS_2/S_1} \cong Z_W \frac{1}{1 + jklS_2/S_1}$$

Für die Admittanz, d.h. den Kehrwert der Impedanz

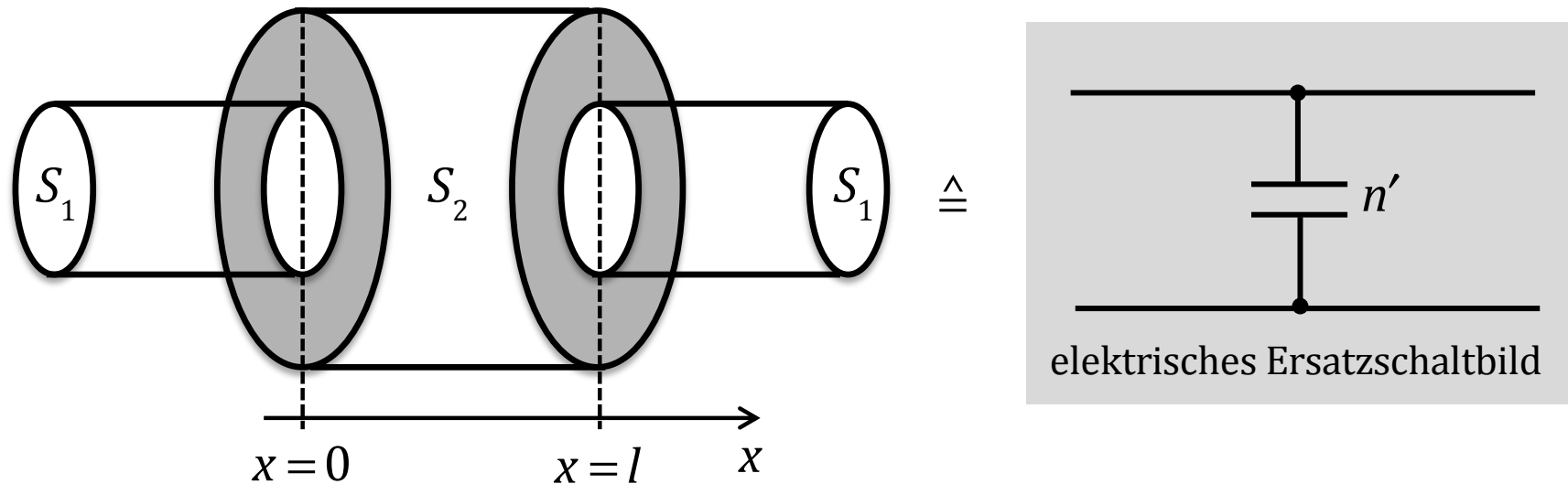
$$\underline{Y}_E = \frac{1}{\underline{Z}_E} \quad \text{und} \quad Y_W = \frac{1}{Z_W} = \frac{1}{\rho_0 c}$$

erhält man

$$\underline{Y}_E \cong Y_W \left( 1 + jkl \frac{S_2}{S_1} \right) = Y_W + j \frac{\omega}{\rho_0 c^2} l \frac{S_2}{S_1} = Y_W + j\omega n'$$

Hierbei stellt  $j\omega n'$  die Admittanz eines Federelements dar, die

dem vom Schalldruck der einfallenden Welle beanspruchten Medium gewissermaßen eine Ausweichmöglichkeit bietet.



### c) Resonator

Eine Rohrverengung von  $S_1$  auf den Querschnitt  $S_2$  der Länge  $l$  wird durch einen schallhart abgeschlossenen Rohrabschnitt mit dem Querschnitt  $S_1$  der Länge  $l'$  abgeschlossen. Die Ein-

gangsimpedanz der schallhart abgeschlossenen Leitung ist nach Kap. 7.1 gegeben durch

$$\underline{Z}(l+) = -jZ_W \cot(kl').$$

Für  $kl' \ll 1$  gilt approximativ

$$\underline{Z}(l+) = -j \frac{Z_W}{kl'} = \frac{1}{j\omega l' / \rho_0 c^2} = \frac{1}{j\omega n'}$$

mit  $n' = l' / \rho_0 c^2$ , d.h. der schallhart abgeschlossene Rohrabchnitt wirkt als Feder mit der Nachgiebigkeit  $n'$ . Die Impedanz der vorgelagerten Einschnürung lautet

$$j\omega m' = j\omega \frac{S_1}{S_2} \rho_0 l.$$

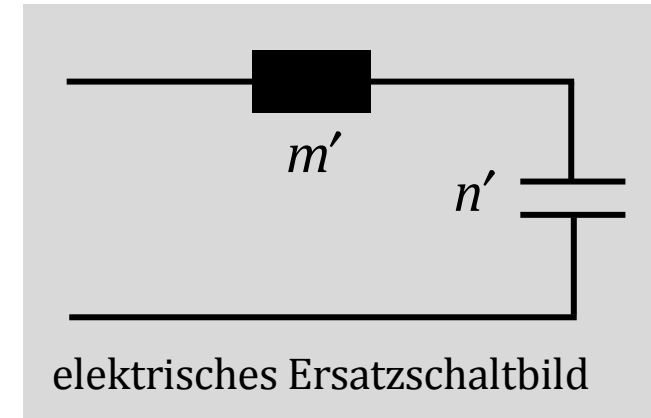
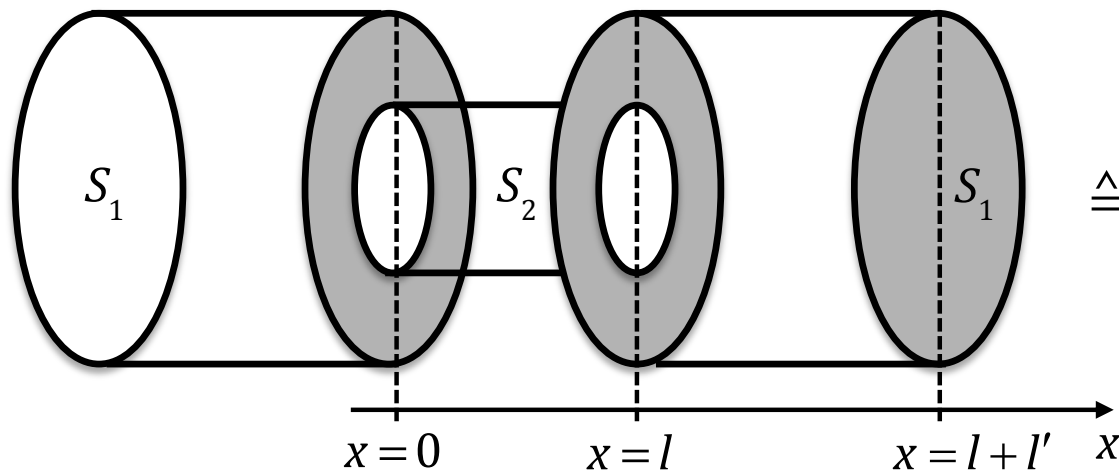
Addition beider Impedanzen liefert die Eingangsimpedanz der Anordnung, d.h.

$$\underline{Z}_E = j\omega m' + \frac{1}{j\omega n'} = j\rho_0 \left( \frac{S_1}{S_2} l\omega - \frac{c^2}{\omega l'} \right).$$

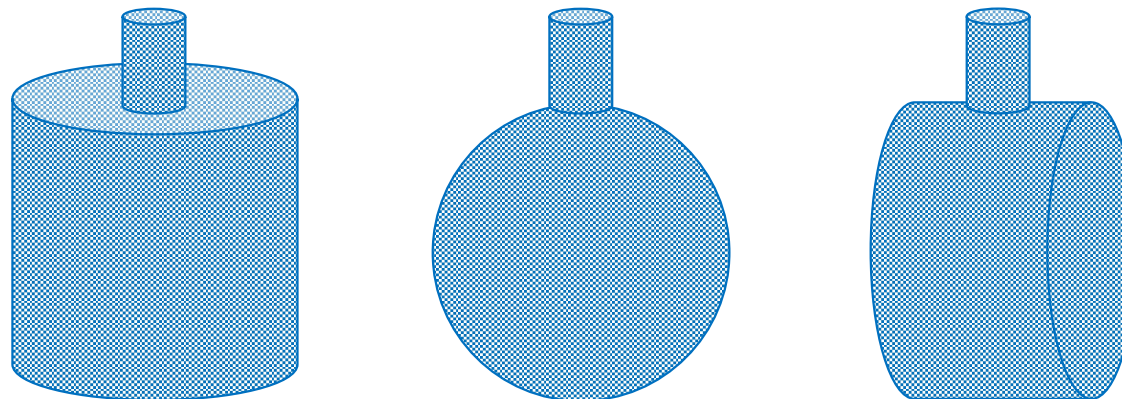
Sie stellt einen Resonator dar, bei dessen Resonanzfrequenz  $\omega = \omega_0$  die Eingangsimpedanz verschwindet, d.h.

$$\frac{S_1}{S_2} l\omega_0 = \frac{c^2}{\omega_0 l'} \Rightarrow \omega_0 = c \sqrt{\frac{S_2}{S_1 l' \cdot l}} = c \sqrt{\frac{S_2}{V l'}},$$

wobei  $V = S_1 l'$  das Volumen des abgeschlossenen Teils angibt.



Da die Abmessungen des Resonators im Vergleich zur Wellenlänge klein sind, kommt es nicht so sehr auf seine Form an.



Verschiedene Formen von Helmholtzresonatoren



## *d) Tiefpassfilter*

Durch eine abwechselnde Folge von Rohrerweiterungen und -verengungen entstehen in Analogie zu den aus Längsinduktivitäten und Querkapazitäten aufgebauten elektrischen Tiefpassfiltern, akustische Tiefpassfilter.

Das Filter überträgt Schall mit Frequenzen unterhalb seiner Grenzfrequenz

$$\omega_g = 2c \sqrt{\frac{S_2}{S_1 l' \cdot l}}$$

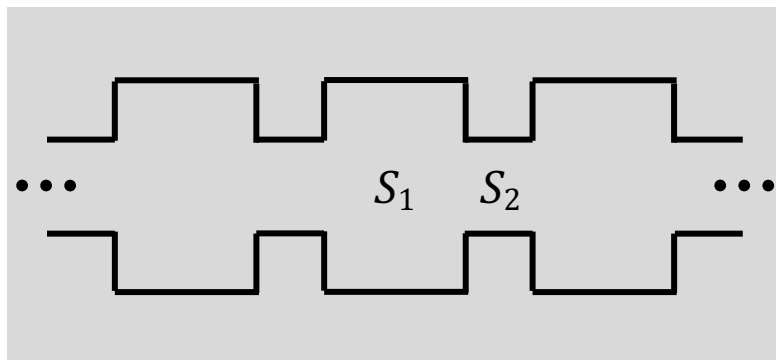
und darüber dämpft es die Schallwelle mit wachsender Frequenz zunehmend.

Die Dämpfung je Filterglied beträgt

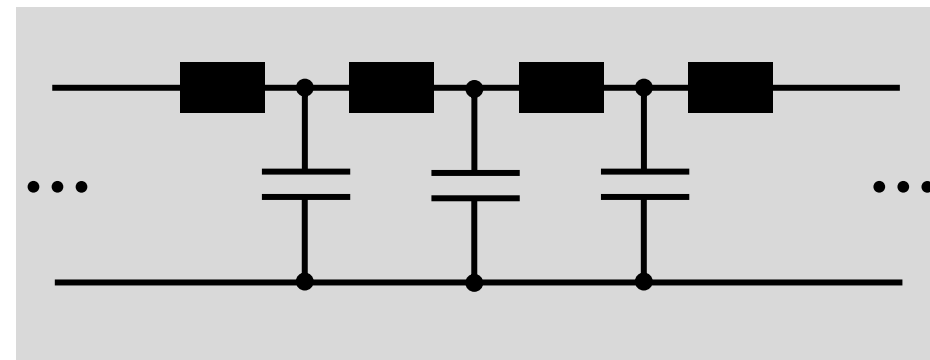
$$\tilde{D} = 8,686 \operatorname{arcosh} \left( \frac{\omega}{\omega_g} \right) \quad [\text{dB}].$$

## Akustisches Tiefpassfilter

Anordnung



elektrisches Ersatzschaltbild

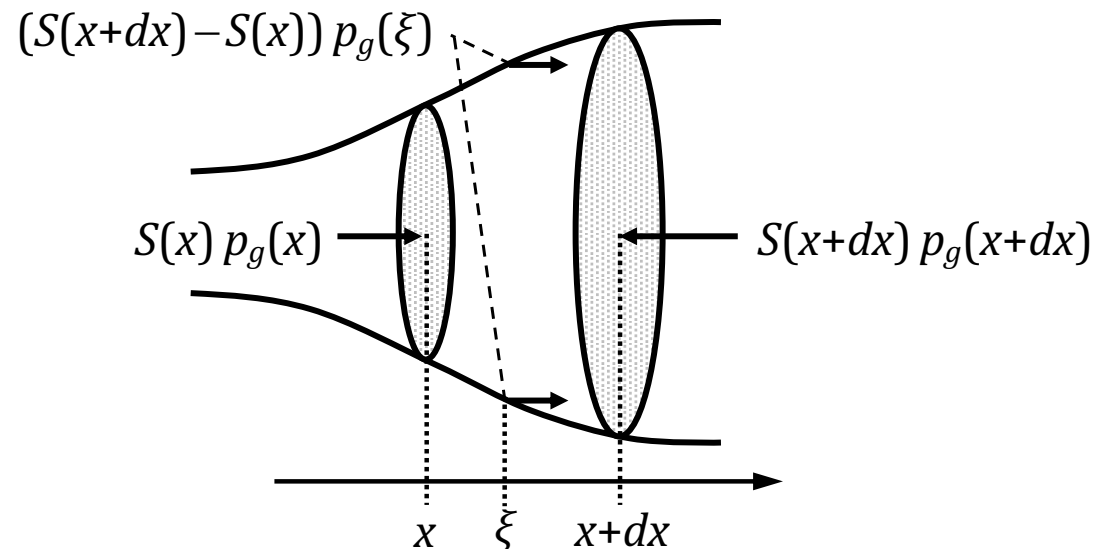


## 7.3 Leitungen mit stetigen Querschnittsänderungen

### 7.3.1 Einführung

Gegeben sei eine Rohrleitung deren Querschnitt sich gemäß der Funktion  $S(x)$  stetig verändert.

Analog zur Herleitung der Wellengleichung stellen wir für ein Längenelement die Kräfte- und Massenbilanzen auf.



## Die Kräftebilanz

$$\begin{aligned}
 S(x)p_g(x,t) - S(x+dx)p_g(x+dx,t) + (S(x+dx) - S(x))p_g(\xi,t) \\
 = \rho_g \frac{dv}{dt} S dx = \rho_g \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) S dx,
 \end{aligned}$$

wobei  $\xi \in (x, x+dx)$ , liefert nach einigen Umformungen

$$-\frac{\partial(Sp_g)}{\partial x} + p_g \frac{dS}{dx} = -\frac{dS}{dx} p_g - S \frac{\partial p_g}{\partial x} + p_g \frac{dS}{dx} = \rho_g S \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

sowie Berücksichtigung von  $p_g = p_0 + p$  die Beziehung

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_g \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (*)$$

Aus der Massenbilanz

$$\rho_g(x+dx, t)v(x+dx, t)S(x+dx) - \rho_g(x, t)v(x, t)S(x) = -S(\xi)dx \frac{\partial \rho_g}{\partial t},$$

wobei  $\xi \in (x, x+dx)$ , gewinnt man nach Umformen

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_g v S) = -S \frac{\partial \rho_g}{\partial t}$$

sowie Ausnutzen von  $\rho_g = \rho_0 + \rho$  und  $\rho = p/c^2$  den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho_g v S) = -\frac{S}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (**)$$

Ableiten von (\*) nach  $x$  und (\*\*) nach  $t$  liefert

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g \frac{\partial v}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g v \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\rho_g v S) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho_g v}{\partial t} S \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \rho_g}{\partial t} v S \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g \frac{\partial v}{\partial t} S \right) = -\frac{S}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

und wegen  $v$  klein näherungsweise

$$-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g \frac{\partial v}{\partial t} \right) \quad (+)$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g \frac{\partial v}{\partial t} \right) S + \rho_g \frac{\partial v}{\partial t} \frac{dS}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho_g \frac{\partial v}{\partial t} \right) S - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dS}{dx} = -\frac{S}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (++)$$

Durch Einsetzen von (+) in (++) erhält man schließlich

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

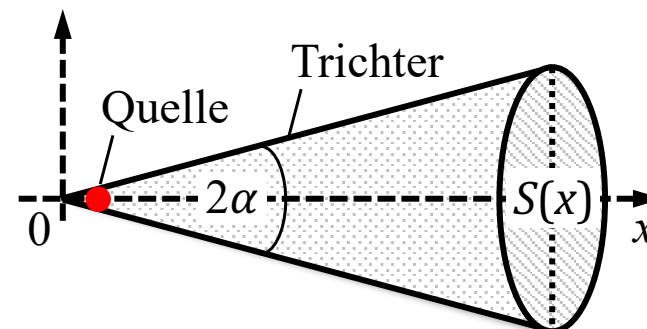
Diese Gleichung ist als Trichtergleichung oder Webstersche Differentialgleichung bekannt.

### 7.3.2 Kegeltrichter

Beim Kegeltrichter wächst die Querschnittsfläche mit dem Quadrat der Koordinate  $x$ , d.h.

$$S(x) = \pi (x \tan \alpha)^2 = ax^2$$

mit  $a = \pi \tan^2 \alpha$ .



Einsetzen von  $S(x)$  und  $dS/dx$  in die Trichtergleichung liefert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Diese Gleichung stimmt mit der Wellengleichung für kugelsymmetrische Probleme überein, wenn man  $x$  durch  $r$  ersetzt. Man erhält demzufolge die Lösung

$$\underline{p}(x,t) = \frac{C}{x} e^{j(\omega t - kx)},$$

wobei  $C$  eine noch zu bestimmende Konstante bezeichnet. Im Trichter breitet sich somit eine Kugelwelle aus.

Befindet sich in der Nähe von  $x = 0$  eine Schallquelle mit der Schallflussamplitude  $Q$ , so verteilt sich diese nicht wie bei frei-



er Kugelwellenausbreitung auf der gesamten Kugeloberfläche, d.h. nicht auf dem gesamten Raumwinkel  $\Omega = 4\pi$ , sondern nur auf der vom Trichter ausgeschnittenen Kugelkalotte, d.h. auf den vom Trichter eingeschlossenen Raumwinkel  $\tilde{\Omega} = 2\pi(1 - \cos(\alpha))$ .

Kugel:  $S = 4\pi r^2 = \Omega r^2, \quad \Omega = 4\pi$

Kugelkalotte:  $\tilde{S} = 2\pi r h = \tilde{\Omega} r^2, \quad \tilde{\Omega} = 2\pi(1 - \cos(\alpha))$

Die Konstante  $C$  ergibt sich somit zu

$$C = \frac{j\omega \rho_0 Q}{4\pi} \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} = \frac{j\omega \rho_0 Q}{\tilde{\Omega}} = \frac{j\omega \rho_0 Q}{2\pi(1 - \cos \alpha)}.$$

Für den Schalldruck erhalten wir dann

$$\underline{p}(x, t) = \frac{j\omega \rho_0 Q}{x \tilde{\Omega}} e^{j(\omega t - kx)}.$$

Die dem Quadrat der Schalldruckamplitude proportionale Intensität ist gegenüber der Kugelwellenausbreitung um den Faktor

$$\left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\right)^2 = \left(\frac{4\pi}{\tilde{\Omega}}\right)^2 = \left(\frac{4\pi}{2\pi(1-\cos\alpha)}\right)^2 = \left(\frac{2}{1-\cos\alpha}\right)^2$$

größer, was sich durch

- die auf einen, um den Faktor  $4\pi/\tilde{\Omega}$  kleineren Raumbereich konzentrierte Schallenergie und
- die durch die Anwesenheit des Trichters, um den Faktor  $4\pi/\tilde{\Omega}$  stärker belastete Schallquelle

deuten lässt.

Demzufolge ist die Gesamtleistung der Quelle mit Trichter um den Faktor  $4\pi/\tilde{\Omega}$  größer als ohne Trichter.

### 7.3.3 Exponentialtrichter

Die Querschnittsänderung des Exponentialtrichters wird durch die Funktion

$$S(x) = S_0 e^{2\varepsilon x}$$

beschrieben, wobei  $\varepsilon$  das Wachstmaß kennzeichnet. Einsetzen von  $S(x)$  und  $dS/dx$  in die Trichtergleichung liefert

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Mit dem Lösungsansatz

$$\underline{p}(x, t) = \underline{P} e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

erhalten wir

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial x} = -j\underline{k} \underline{P} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = -j\underline{k} \underline{p}(x, t), \quad \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2} = -\underline{k}^2 \underline{P} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = -\underline{k}^2 \underline{p}(x, t),$$

$$\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = j\omega \underline{P} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = j\omega \underline{p}(x, t), \quad \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{P} e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = -\omega^2 \underline{p}(x, t)$$

und nach Einsetzen über

$$-\underline{k}^2 \underline{p}(x, t) - j2\varepsilon \underline{k} \underline{p}(x, t) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \underline{p}(x, t)$$

die quadratische Gleichung

$$\underline{k}^2 + j2\underline{k}\varepsilon - (\omega/c)^2 = 0.$$

Von den beiden Lösungen

$$\underline{k} = -j\varepsilon \pm \sqrt{\left(\omega/c\right)^2 - \varepsilon^2} = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2 c^2} - j\varepsilon$$

wählen wir die aus, die einer in positiver  $x$ -Richtung fortschreitenden Welle entspricht, d.h.

$$\underline{k} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_g^2} - j\varepsilon = \tilde{k} - j\varepsilon, \quad \omega_g = \varepsilon c.$$

Der Schalldruck der Trichterwelle ist dann

$$\underline{p}(x, t) = \underline{P} e^{j(\omega t - (\tilde{k} - j\varepsilon)x)} = \underline{P} e^{-\varepsilon x} e^{j(\omega t - \tilde{k}x)}.$$

Unterhalb der Kreisfrequenz  $\omega_g$  ist keine Wellenausbreitung möglich, d.h. der Exponentialtrichter ist eine Hochpassleitung.

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Trichter ist

$$\tilde{c} = \frac{\omega}{\tilde{k}} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_g^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_g / \omega)^2}}$$

mit  $\tilde{c} > c$ . Ferner ist  $\tilde{c}$  abhängig von  $\omega$ , d.h. es tritt Dispersion auf. Die zum Schalldruck gehörende Schnelle ergibt sich aus

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_g \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = j\omega \underline{v}, \quad \text{da} \quad \underline{v} = \underline{V} e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$$

zu

$$\underline{v}(x, t) = -\frac{1}{j\omega \rho_g} \frac{\partial \underline{p}}{\partial x} = \frac{\underline{k}}{\omega \rho_g} \underline{p}(x, t) = \dots$$

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_g^2} - j\epsilon c}{\omega \rho_g c} \underline{p}(x,t) \quad \text{mit } \omega_g = \epsilon c, Z_W \cong \rho_g c \\ &= \left[ \sqrt{1 - (\omega_g/\omega)^2} - j(\omega_g/\omega) \right] \frac{\underline{p}(x,t)}{Z_W}. \end{aligned}$$

Den Wellenwiderstand des Exponentialtrichters erhält man nun durch einfaches Umformen.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_W &= \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = Z_W / \left[ \sqrt{1 - (\omega_g/\omega)^2} - j(\omega_g/\omega) \right] \\ &= Z_W \left[ \sqrt{1 - (\omega_g/\omega)^2} + j(\omega_g/\omega) \right] \end{aligned}$$

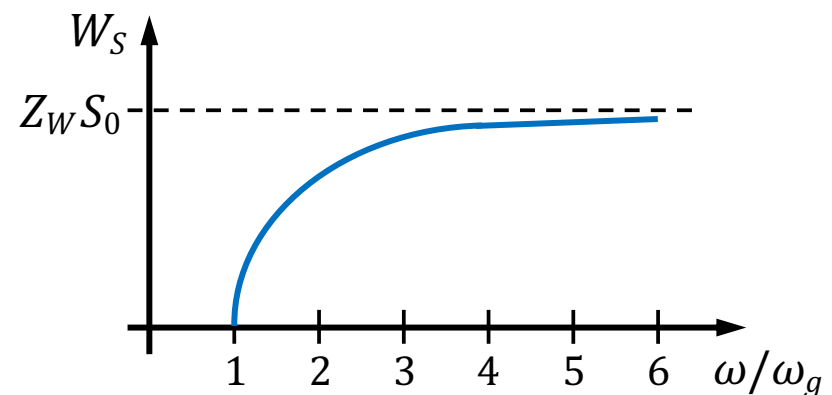
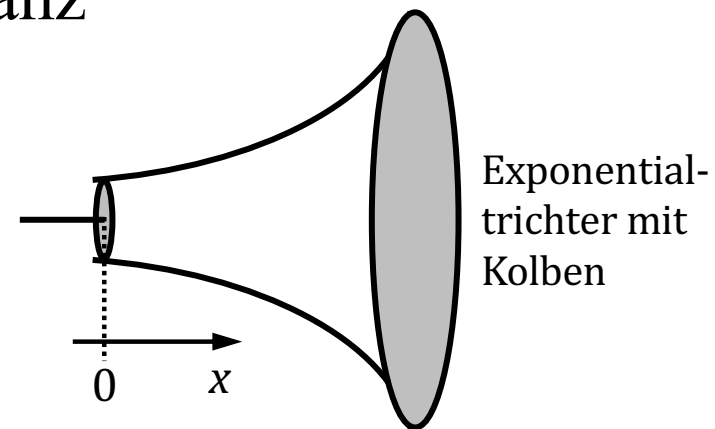
Eine an der Stelle  $x = 0$  im Exponentialtrichter angebrachte Schallquelle, z.B. ein hin und her schwingender Kolben, wird mit der mechanischen Impedanz

$$\underline{Z}_m = \underline{\tilde{Z}}_W S_0, \quad S_0 = S(x=0)$$

belastet. Deren Realteil

$$\begin{aligned} W_S &= \operatorname{Re}\{\underline{Z}_m\} = \operatorname{Re}\{\underline{\tilde{Z}}_W\} S_0 \\ &= Z_W S_0 \sqrt{1 - (\omega_g/\omega)^2} \end{aligned}$$

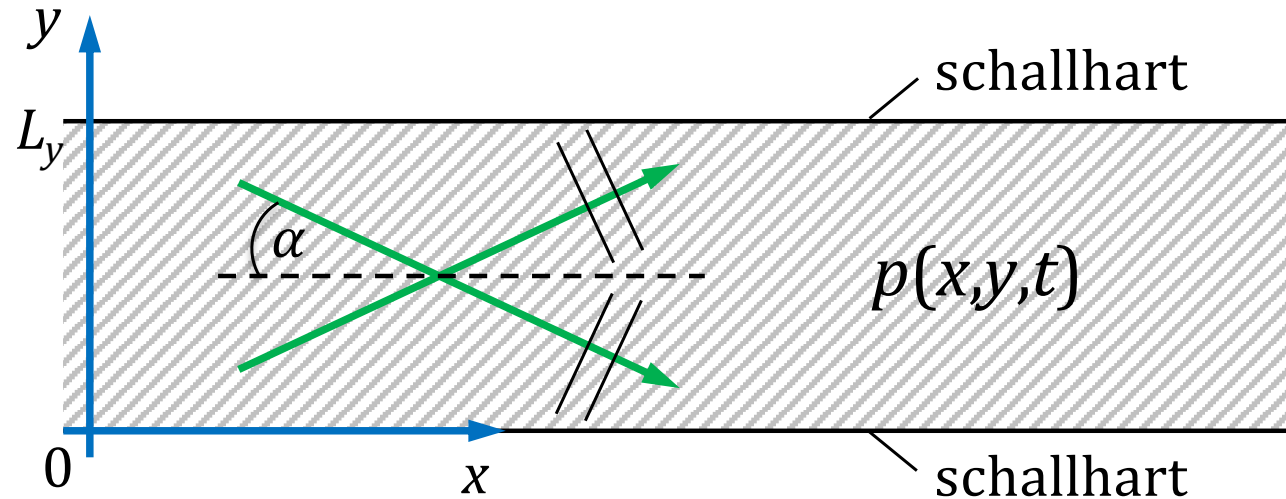
gibt den wirksamen Strahlungswiderstand an.





## 7.4 Höhere Wellentypen

### 7.4.1 Parallele Ebenen



Die Wellengleichung lautet

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

Mit dem Lösungsansatz (ebene Wellenannahme)

$$\underline{p}(x, y, t) = \tilde{p}(y) e^{j(\omega t - k_x x)}$$

liefern die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2} = -k_x^2 \tilde{p} e^{j(\omega t - k_x x)}, \quad \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial y^2} = \frac{d^2 \tilde{p}}{dy^2} e^{j(\omega t - k_x x)}, \quad \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = -\omega^2 \tilde{p} e^{j(\omega t - k_x x)}$$

nach Einsetzen in die Wellengleichung

$$-k_x^2 \tilde{p} + \frac{d^2 \tilde{p}}{dy^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{p}$$

und Umformen schließlich

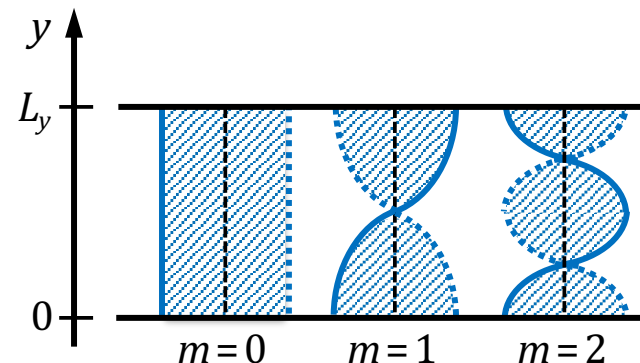
$$\frac{d^2 \tilde{p}}{dy^2} + \underbrace{(k^2 - k_x^2)}_{k_y^2} \tilde{p} = 0$$

Diese homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten besitzt die Lösung

$$\tilde{p}(y) = A \sin(k_y y) + B \cos(k_y y).$$

Ausnutzen der Randbedingungen, d.h. Druckmaxima an den schallharten Ebenen, liefert

$$\tilde{p}(y) = B \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right).$$



und damit

$$p(x, y, t) = B \cos(k_{y,m} y) e^{j(\omega t - k_{x,m} x)} = \frac{B}{2} \left( e^{j(\omega t - k_{x,m} x - k_{y,m} y)} + e^{j(\omega t - k_{x,m} x + k_{y,m} y)} \right),$$

wobei  $k_{y,m} = m\pi/L_y$  und

$$\begin{aligned} k_{x,m} &= \sqrt{k^2 - k_{y,m}^2} \\ &= \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{m\pi}{L_y}\right)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2} \end{aligned}$$

mit  $k = \omega/c$  und  $\omega_m = m\pi c/L_y$ .

Ferner gilt

$$p(x, y, t) = B \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) e^{j\omega(t-x/c_{x,m})}$$

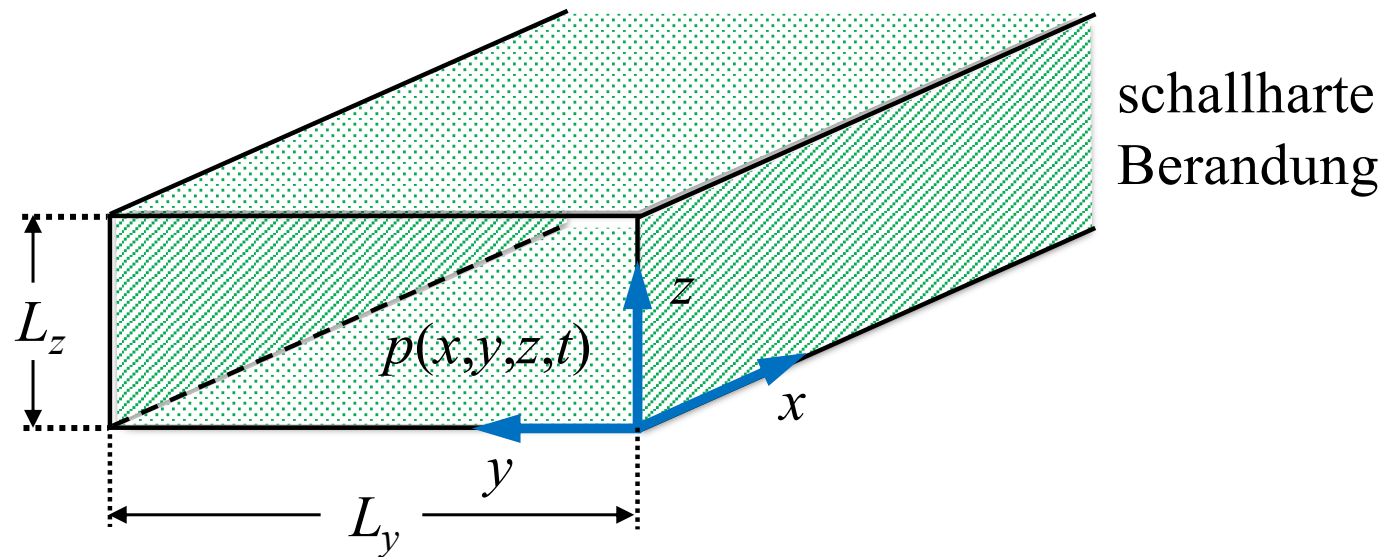
mit 
$$c_{x,m} = \frac{\omega}{k_{x,m}} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2}}$$

bzw.

$$p(x, y, t) = B \cos\left(\frac{m\pi}{L_y} y\right) e^{j(\omega t - k \cos \alpha_m x)}$$

mit 
$$k_{x,m} = k \cos \alpha_m, \quad \cos \alpha_m = \sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2}.$$

## 7.4.2 Rechteckkanal



Ausgehend von der Wellengleichung

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

und dem Lösungsansatz (ebene Wellenannahme)

$$\underline{p}(x, y, z, t) = \tilde{p}(y, z) e^{j(\omega t - k_x x)}$$

ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2} &= -k_x^2 \tilde{p} e^{j(\omega t - k_x x)}, & \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} e^{j(\omega t - k_x x)}, \\ \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z^2} e^{j(\omega t - k_x x)}, & \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \tilde{p} e^{j(\omega t - k_x x)} \end{aligned}$$

nach Einsetzen und Umformen

$$-k_x^2 \tilde{p} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z^2} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{p} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial z^2} + (k^2 - k_x^2) \tilde{p} = 0.$$

Diese partielle Differentialgleichung kann mit dem Bernoulli-schen Produktansatz

$$\tilde{p}(y, z) = f(y)g(z)$$

gelöst werden. Durch Einsetzen in die partielle Differentialgleichung erhalten wir

$$g(z) \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + f(y) \frac{d^2 g(z)}{dz^2} + (k^2 - k_x^2) f(y)g(z) = 0$$

und nach Division durch  $f(y)g(z)$  den Ausdruck

$$\frac{1}{f(y)} \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \frac{1}{g(z)} \frac{d^2 g(z)}{dz^2} + (k^2 - k_x^2) = 0.$$



Diese Trennung der Veränderlichen erlaubt nun den Schluss, dass

$$\frac{1}{f(y)} \frac{d^2 f(y)}{dy^2} = \text{const.} = -k_y^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{g(z)} \frac{d^2 g(z)}{dz^2} = \text{const.} = -k_z^2$$

gilt, wobei die Konstanten die Separationsgleichung

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

erfüllen müssen.

Die beiden gewöhnlichen homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten, d.h.

$$\frac{d^2 f(y)}{dy^2} + k_y^2 f(y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2 g(z)}{dz^2} + k_z^2 g(z) = 0,$$

besitzen die Lösungen

$$f(y) = A \sin(k_y y) + B \cos(k_y y) \quad \text{und} \quad g(z) = C \sin(k_z z) + D \cos(k_z z).$$

Ausnutzen der Randbedingungen, d.h. Druckmaxima an den schallharten Berandungen, liefert

$$f(y) = B \cos(k_y y) = B \cos\left(\left(m\pi/L_y\right)y\right)$$

und

$$g(z) = D \cos(k_z z) = D \cos\left(\left(n\pi/L_z\right)z\right)$$

und damit

$$\underline{p}(x, y, z, t) = B D \cos\left(\left(m\pi/L_y\right)y\right) \cos\left(\left(n\pi/L_z\right)z\right) e^{j(\omega t - k_{x,mn}x)},$$

wobei

$$k_{x,mn} = \sqrt{k^2 - k_{y,m}^2 - k_{z,n}^2} = \sqrt{k^2 - \left(m\pi/L_y\right)^2 - \left(n\pi/L_z\right)^2} = \dots$$

$$\dots = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{\omega^2} \left[ \left( m\pi/L_y \right)^2 + \left( n\pi/L_z \right)^2 \right]} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left( \omega_{mn}/\omega \right)^2}$$

mit

$$\omega_{mn} = c \sqrt{\left( m\pi/L_y \right)^2 + \left( n\pi/L_z \right)^2}.$$

Außerdem gilt

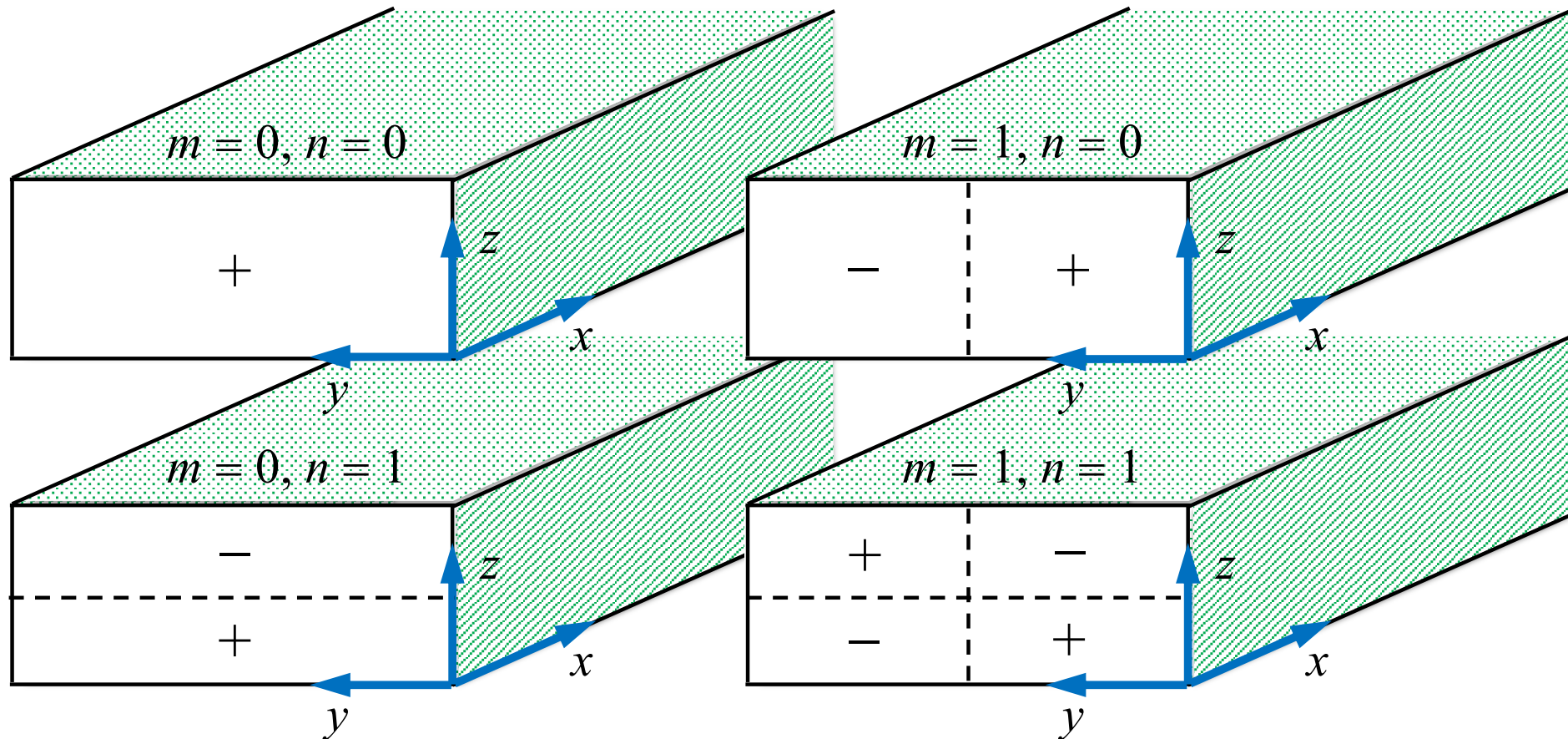
$$\underline{p}(x, y, z, t) = B D \cos\left( (m\pi/L_y)y \right) \cos\left( (n\pi/L_z)z \right) e^{j\omega(t-x/c_{x,mn})}$$

mit

$$c_{x,mn} = \frac{\omega}{k_{x,mn}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left( \omega_{mn}/\omega \right)^2}}.$$

## Schallausbreitung im Rechteckkanal

( $t = 0$ , Schnitt bei  $x = 0$ ,  $m$  und  $n$  bezeichnen die Ordnungszahlen der Wellentypen, Knotenflächen der Wellentypen sind gestrichelt gekennzeichnet)



## 7.5 Dispersion

Die in Kapitel 7.4 behandelten höheren Wellentypen besitzen eine frequenzabhängige Ausbreitungs- (Phasen-) geschwindigkeit. Diese Erscheinung bezeichnet man als Dispersion.

Die Dispersion hat zur Folge, dass eine aus mehreren harmonischen Komponenten bestehende Welle im Zuge der Ausbreitung ihre Form ändert, da jede Spektralkomponente sich mit der ihr eigenen Phasengeschwindigkeit ausbreitet.

Nun betrachten wir die Überlagerung 2er harmonischer Wellen mit geringfügig unterschiedlichen Frequenzen und Wellenzahlen

$$\underline{p}(x, t) = \hat{p} \left( e^{j((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x)} + e^{j((\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x)} \right).$$

Umformen liefert

$$\underline{p}(x,t) = 2\hat{p} \cos(\Delta\omega t - \Delta kx) e^{j(\omega t - kx)}.$$

Für die Ausbreitung eines bestimmten Schwingungszustands der modulierten Schwingung, z.B. eines bestimmten Nulldurchgangs, muss ausgehend von

$$\omega t - kx = \text{const.}$$

für den Zeitpunkt  $t + dt$  ein  $dx$  existiert, so dass

$$\omega(t + dt) - k(x + dx) = \text{const.}$$

gilt. Subtrahieren der 1ten von der 2ten Beziehung liefert

$$\omega dt = k dx$$

und damit die Phasengeschwindigkeit

$$c = c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{dx}{dt}.$$

Analoge Überlegungen führen für den modulierten Teil, d.h. für die Hüllkurve der Schwebung, mit Hilfe von

$$\left. \begin{array}{l} \Delta\omega t - \Delta kx = \text{const.} \\ \Delta\omega(t + dt) - \Delta k(x + dx) = \text{const.} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta\omega dt = \Delta k dx$$

nach Grenzübergang zur Gruppengeschwindigkeit

$$c_{gr} = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Für den in Kapitel 7.4.1 beschriebenen Wellentyp ist

$$c_{x,m} = c_{ph} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2}}$$

und

$$c_{gr} = \frac{d\omega}{dk_{x,m}} = \frac{1}{dk_{x,m}/d\omega} = \frac{1}{\frac{2\omega}{c^2} \cdot \frac{1}{2k_{x,m}}} = \frac{c^2}{\omega} k_{x,m} = c \sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2},$$

wobei

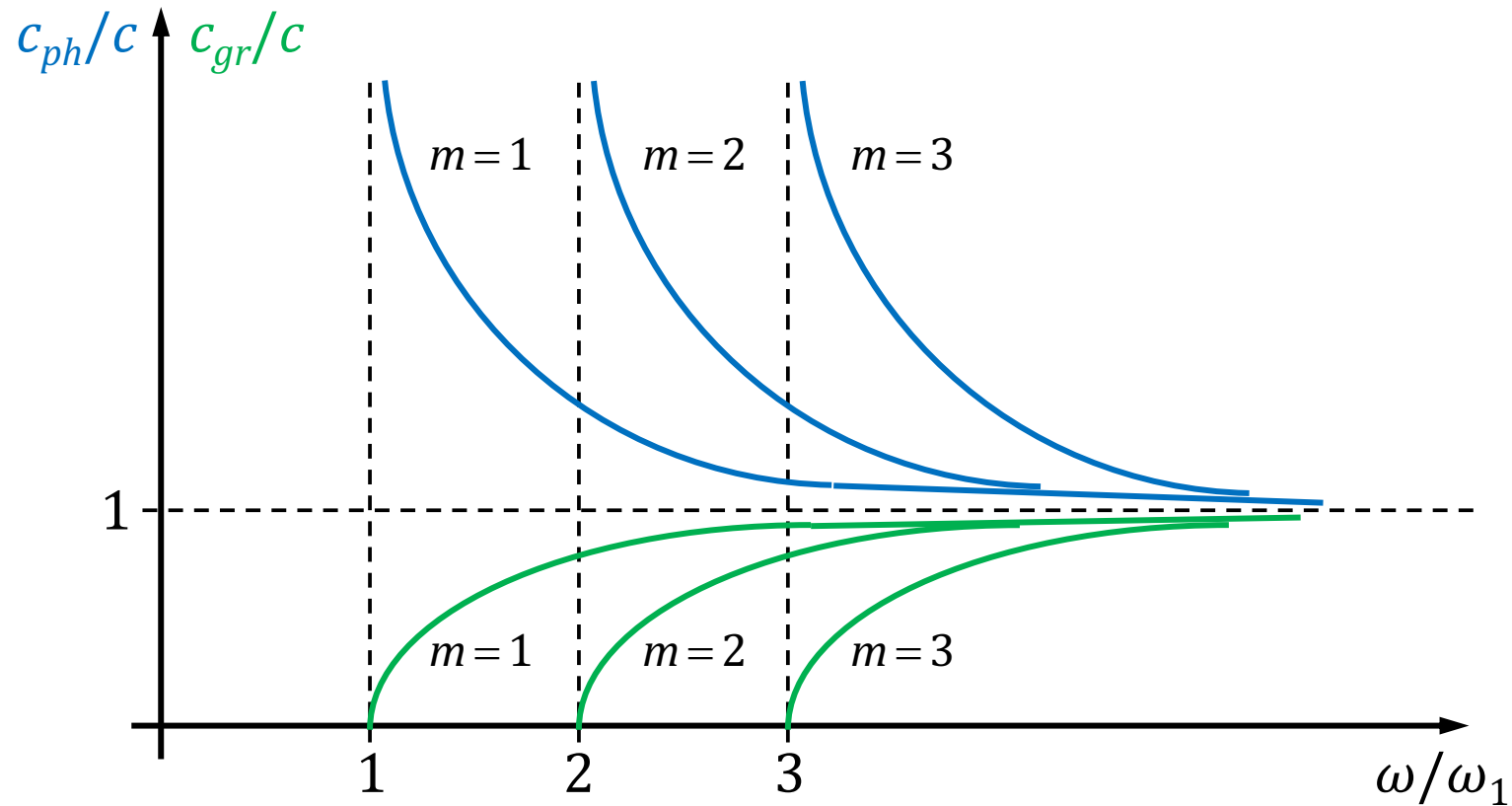
$$k_{x,m} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - (\omega_m/\omega)^2}$$

ausgenutzt wurde.



Ferner gilt hier

$$c_{ph} c_{gr} = c^2.$$



## Literatur zu Kapitel 7

- [1] D.T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Wiley, 2000
- [2] L. Cremer und M. Huber, *Vorlesungen über Technische Akustik*, Springer, 1990
- [3] L. Cremer und M. Möser, *Technische Akustik*, Springer, 2003
- [4] H. Kuttruff, *Akustik: Eine Einführung*, Hirzel Verlag, 2004
- [5] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf, *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*, Springer, 2009
- [6] I. Veit, *Technische Akustik*, Vogel, 1996