

Einführung in die Technische Akustik

Inhalt

1 Grundbegriffe der Schwingungslehre

2 Schallfeldgrößen und Wellengleichung für fluide Medien

3 Ebene Schallwellen in fluiden Medien

4 Kugelwellen

5 Synthese von Schallquellen

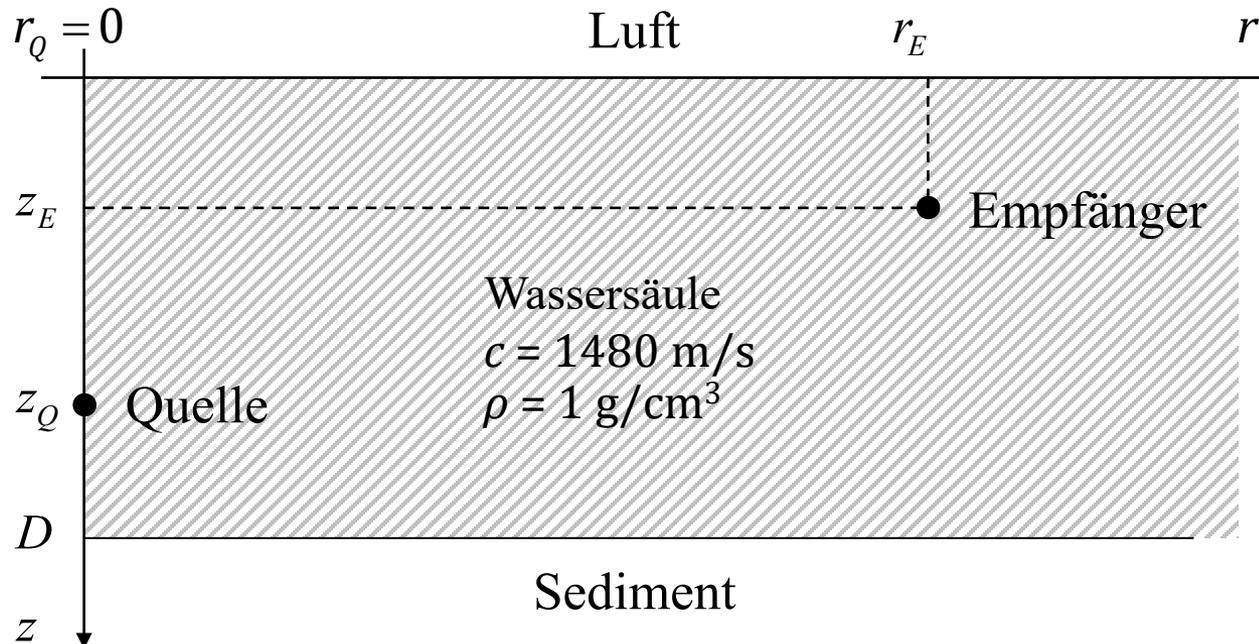
6 Reflexion, Brechung und Beugung

7 Akustische Leitungen

8 Geometrische Akustik

8.1 Homogene Wellenleiter

Gegeben sei ein homogenes Schallausbreitungsmedium, das durch zwei horizontale Grenzflächen unendlicher Ausdehnung berandet wird.



In diesem Medium befinde sich eine Punktschallquelle am Ort $(0, z_0)$ und ein Empfänger am Ort (r_E, z_E) . Gesucht ist der im Wellenleiter durch die Schallquelle am Empfangsort erzeugte Schalldruck.

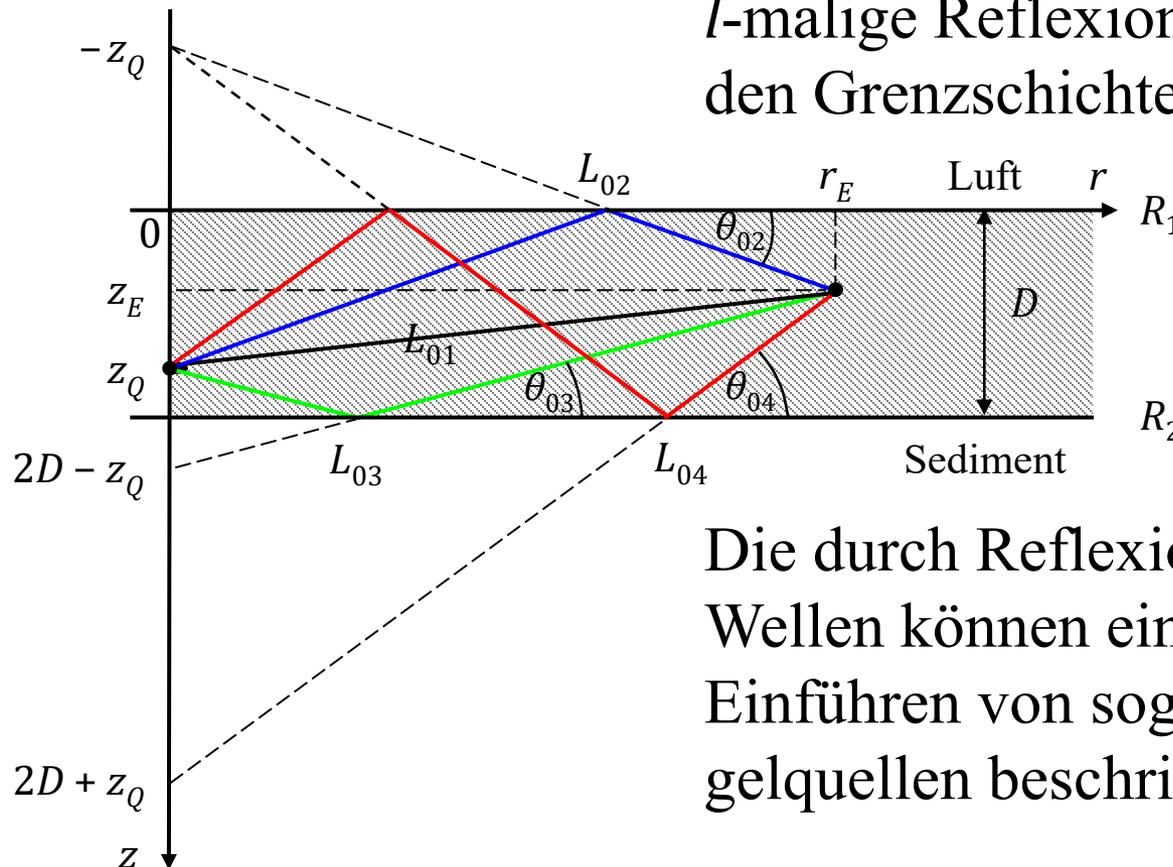
Spiegelquellenmethode

Ausgehend von der Freifeldlösung der Wellengleichung für Punktschallquellen

$$\underline{p}(r, z, t) = \frac{A}{L} e^{j(\omega t - kL)} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \hat{a} e^{j\varphi} \quad \text{und} \quad L = \sqrt{r^2 + (z_0 - z)^2}$$

ergibt sich die Lösung für einen homogenen Wellenleiter mittels der Spiegelmethode wie folgt.

Das Wellenfeld in einem Wellenleiter kann als Überlagerung unendlich vieler Kugelwellen aufgefasst werden die sich durch l -malige Reflexion ($l = 0, 1, \dots$) an den Grenzschichten ergeben.



Die durch Reflexion entstehenden Wellen können einfacher durch Einführen von sogenannten Spiegelquellen beschrieben werden.

Obige Abbildung zeigt schematisch die Beiträge der physischen Quelle bei $(0, z_Q)$ und der ersten drei Spiegelquellen. Durch Überlagerung dieser vier Beiträge ergibt sich der Schalldruck im Wellenleiter approximativ zu

$$p(r_E, z_E, t) \cong \underline{A} e^{j\omega t} \left(\frac{e^{-jkL_{01}}}{L_{01}} + R_1(\theta_{02}) \frac{e^{-jkL_{02}}}{L_{02}} + R_2(\theta_{03}) \frac{e^{-jkL_{03}}}{L_{03}} + R_1(\theta_{04}) R_2(\theta_{04}) \frac{e^{-jkL_{04}}}{L_{04}} \right)$$

mit $L_{01} = \sqrt{r_E^2 + (z_Q - z_E)^2}$, und

$$L_{02} = \sqrt{r_E^2 + (z_Q + z_E)^2},$$

$$\theta_{02} = \arctan((z_Q + z_E) / r_E),$$

$$L_{03} = \sqrt{r_E^2 + (2D - z_Q - z_E)^2},$$

$$\theta_{03} = \arctan((2D - z_Q - z_E) / r_E),$$

$$L_{04} = \sqrt{r_E^2 + (2D + z_Q - z_E)^2}$$

$$\theta_{04} = \arctan((2D + z_Q - z_E) / r_E).$$

Durch fortsetzen dieser Spiegelquellenprozedur erhält man sukzessive alle weiteren Beiträge, so dass das Schalldruckfeld im Wellenleiter durch

$$p(r_E, z_E, t) = \underline{A} e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \left(R_1^m(\theta_{m1}) R_2^m(\theta_{m1}) \frac{e^{-jkL_{m1}}}{L_{m1}} + R_1^{m+1}(\theta_{m2}) R_2^m(\theta_{m2}) \frac{e^{-jkL_{m2}}}{L_{m2}} \right. \\ \left. + R_1^m(\theta_{m3}) R_2^{m+1}(\theta_{m3}) \frac{e^{-jkL_{m3}}}{L_{m3}} + R_1^{m+1}(\theta_{m4}) R_2^{m+1}(\theta_{m4}) \frac{e^{-jkL_{m4}}}{L_{m4}} \right)$$

mit

$$L_{m1} = \sqrt{r_E^2 + (2Dm - z_Q + z_E)^2}, \quad L_{m3} = \sqrt{r_E^2 + (2D(m+1) - z_Q - z_E)^2}, \\ L_{m2} = \sqrt{r_E^2 + (2Dm + z_Q + z_E)^2}, \quad L_{m4} = \sqrt{r_E^2 + (2D(m+1) + z_Q - z_E)^2}$$

und

$$\theta_{m1} = \arctan((2Dm - z_Q + z_E)/r_E), \quad \theta_{m3} = \arctan((2D(m+1) - z_Q - z_E)/r_E), \\ \theta_{m2} = \arctan((2Dm + z_Q + z_E)/r_E), \quad \theta_{m4} = \arctan((2D(m+1) + z_Q - z_E)/r_E)$$

ausgedrückt werden kann.

Bei der Schallausbreitung im Wasser mit $R_1 = -1$ an der Wasser-Luft-Grenzschicht erhält man für

- weiche Meeresböden, d.h. $0 < R_2 < 1$

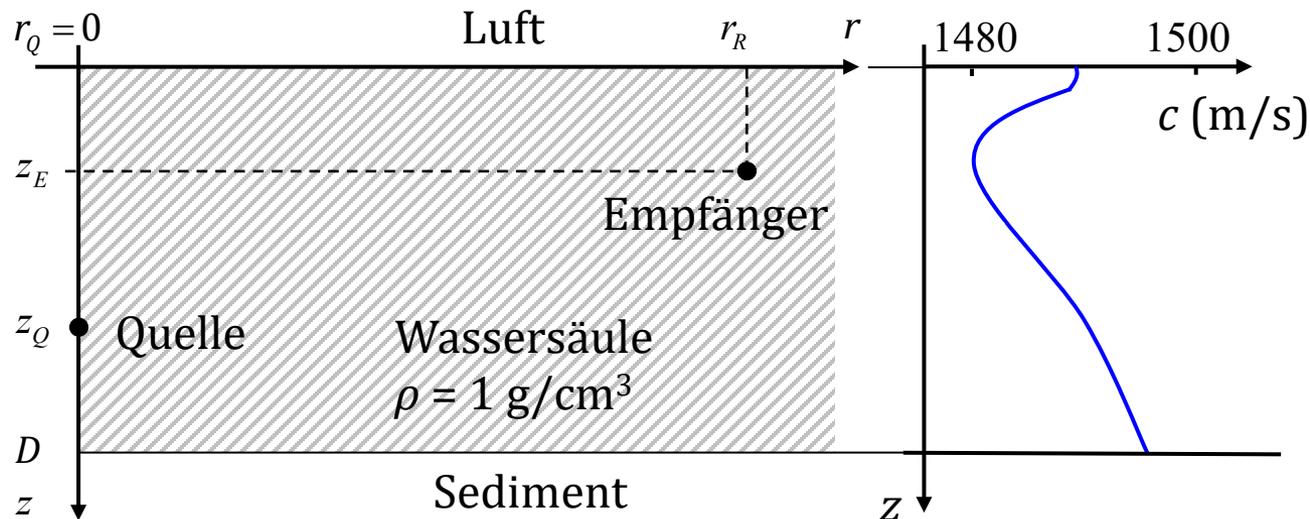
$$p(r_E, z_E, t) = \underline{A} e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (-R_2)^m \left(\frac{e^{-jkL_{m1}}}{L_{m1}} - \frac{e^{-jkL_{m2}}}{L_{m2}} + R_2 \left(\frac{e^{-jkL_{m3}}}{L_{m3}} - \frac{e^{-jkL_{m4}}}{L_{m4}} \right) \right)$$

- harte Meeresböden, d.h. $R_2 \approx 1$ (schallhart)

$$p(r_E, z_E, t) = \underline{A} e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{e^{-jkL_{m1}}}{L_{m1}} - \frac{e^{-jkL_{m2}}}{L_{m2}} + \frac{e^{-jkL_{m3}}}{L_{m3}} - \frac{e^{-jkL_{m4}}}{L_{m4}} \right)$$

8.2 Inhomogene Wellenleiter

Ein Schallausbreitungsmedium bezeichnet man als inhomogen, wenn die Schallgeschwindigkeit ortsabhängig ist. Im folgenden wird die Schallausbreitung in einem durch zwei Grenzflächen berandeten inhomogenen Medium betrachtet.

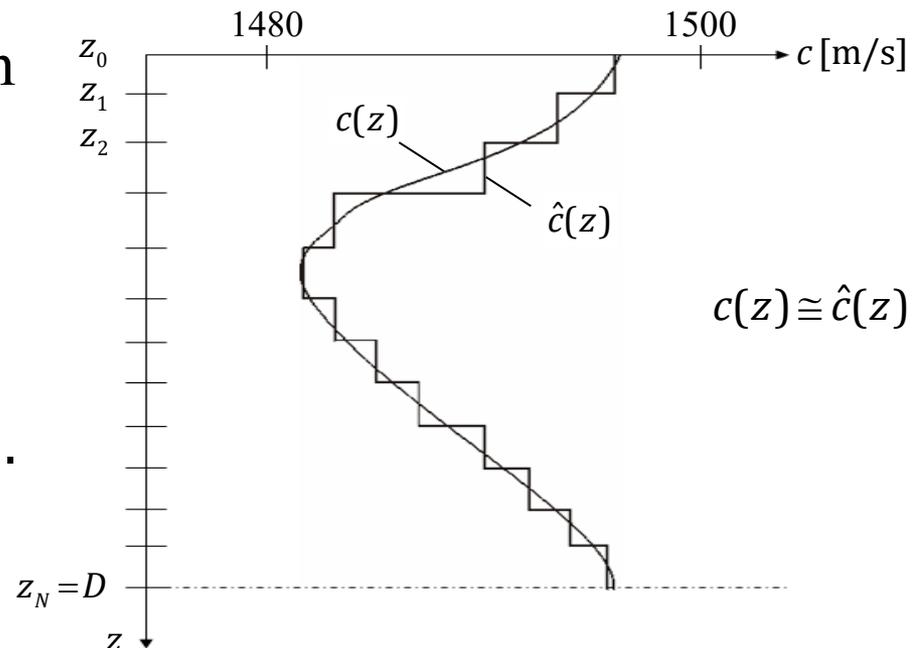


Die Inhomogenität, d.h. die Schallgeschwindigkeit, sei dabei der Einfachheit halber nur eine Funktion von z .

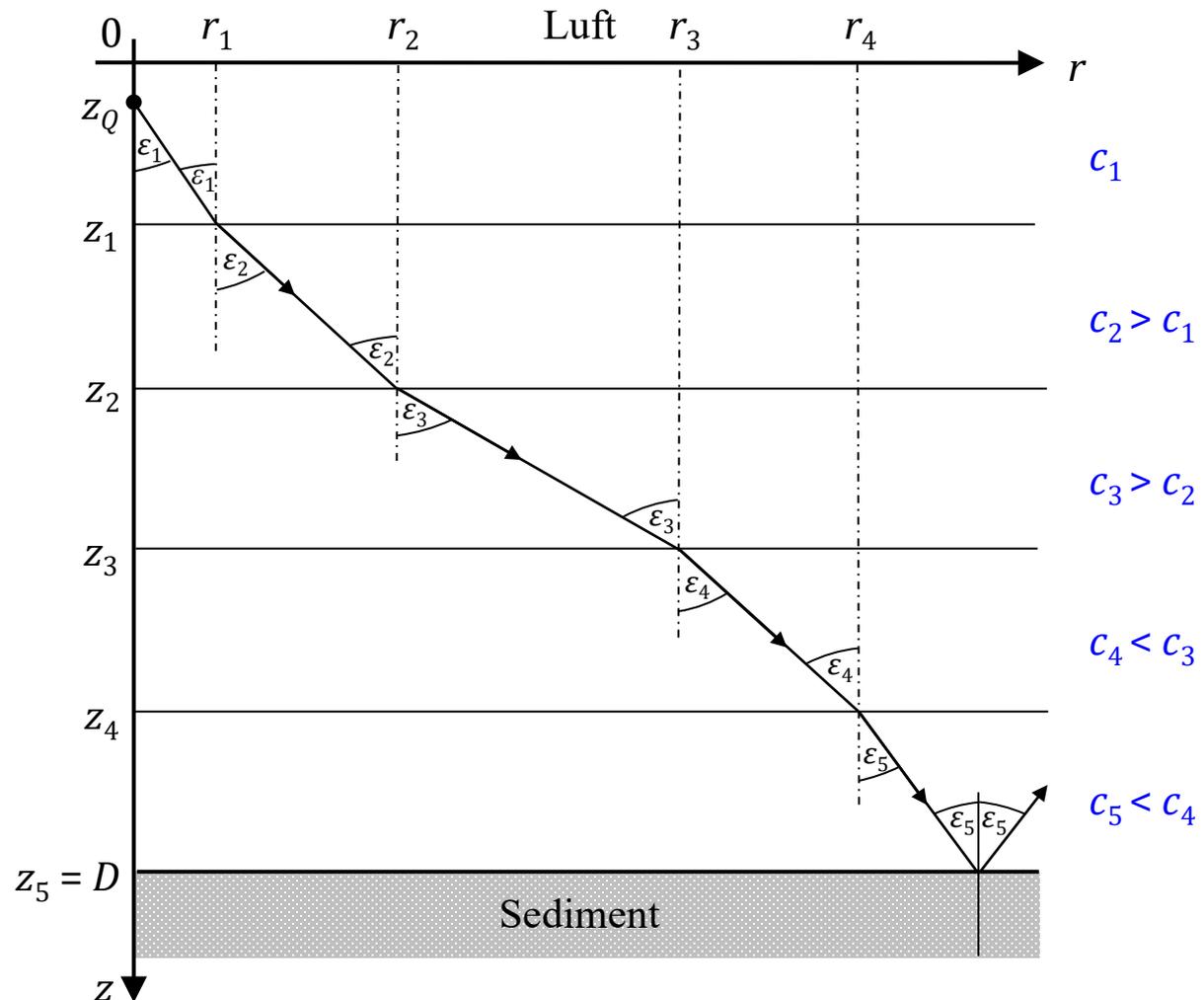
8.2.1 Schallstrahlverlauf durch Schichten konstanter Schallgeschwindigkeit

Zunächst approximiert man die z -abhängige Funktion der Schallgeschwindigkeit durch die Treppenfunktion

$$c(z) \cong \hat{c}(z) = \sum_{n=1}^N c_n \mathbf{1}_{[z_{n-1}, z_n)}(z).$$



Beispiel:



Den Schallstrahlverlauf erhält man durch Anwenden des Snelliusschen Brechungsgesetzes

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

an den Grenzschichten zwischen den unterschiedlichen Mediumsschichten. Es gilt

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{c_1} = \frac{\sin \varepsilon_2}{c_2} = \dots = \frac{\sin \varepsilon_N}{c_N} = a = \text{const.}$$

An der n -ten Grenzschicht ($0 = \text{Oberfläche}, \dots, N = \text{Boden}$) gilt

$$\sin \varepsilon_n = a c_n$$

sowie nach Ausnutzen der mathematischen Identitäten

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{und} \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

schließlich

$$\cos \varepsilon_n = \sqrt{1 - a^2 c_n^2} \quad \text{bzw.} \quad \tan \varepsilon_n = \frac{a c_n}{\sqrt{1 - a^2 c_n^2}}.$$

Hieraus ergibt sich die horizontale Position und die Laufzeit des Strahls an der l -ten Grenzschicht zu

$$r_l = \sum_{n=1}^l (z_n - z_{n-1}) \tan \varepsilon_n \quad \text{bzw.} \quad T_l = \sum_{n=1}^l \frac{z_n - z_{n-1}}{c_n \cos \varepsilon_n}$$

mit $l = 1, \dots, N$ sowie $z_0 = z_Q$ und $z_N = D$.

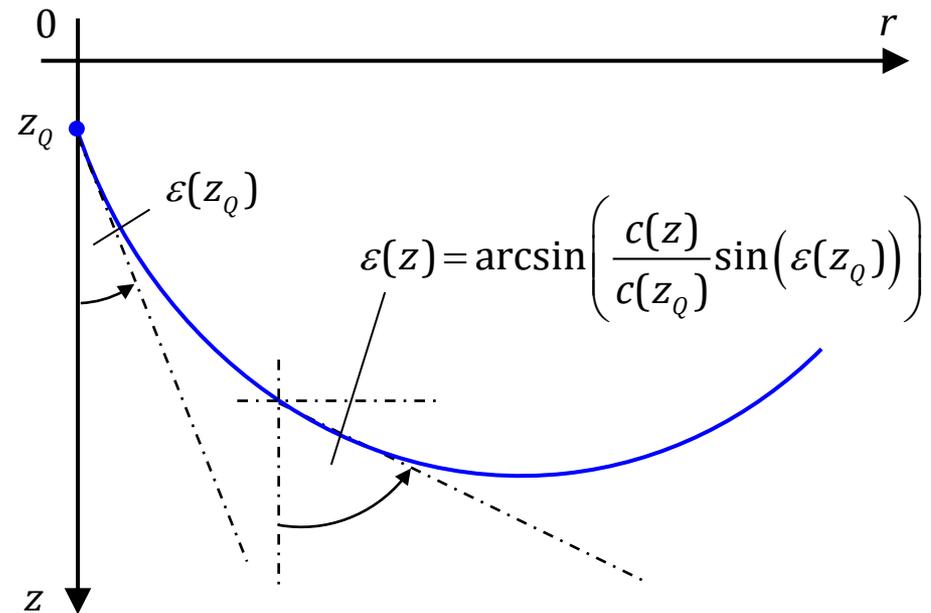
8.2.2 Schallstrahlverlauf bei stetiger Schallgeschwindigkeitsänderung

Das Snelliussche Gesetz liefert

$$\frac{\sin(\varepsilon(z_Q))}{c(z_Q)} = \frac{\sin(\varepsilon(z))}{c(z)} = a$$

bzw.

$$\sin(\varepsilon(z)) = ac(z).$$



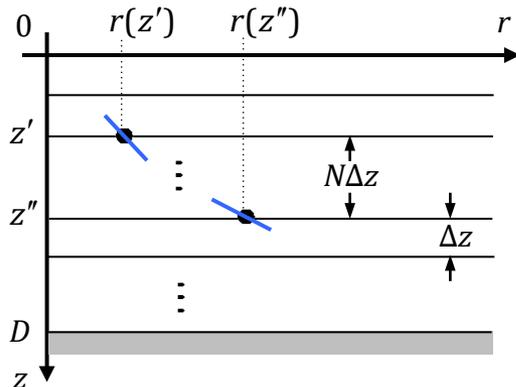
Erneutes Ausnutzen von

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{und} \quad \tan x = \sin x / \cos x$$

liefert mit

$$\cos(\varepsilon(z)) = \sqrt{1 - \sin^2(\varepsilon(z))} = \sqrt{1 - a^2 c(z)^2}$$

$$\tan(\varepsilon(z)) = \sin(\varepsilon(z)) / \cos(\varepsilon(z)) = ac(z) / \sqrt{1 - a^2 c(z)^2}$$



den Ausdruck, vgl. S. 12,

$$r(z'') = r(z') + \sum_{n=1}^N \Delta z \tan(\varepsilon(z' + n\Delta z)).$$

Für $\Delta z \rightarrow 0$ geht die Riemann-Summe in ein Riemann-Integral über, so dass

$$r(z'') = r(z') + \int_{z'}^{z''} \tan(\varepsilon(z)) dz = r(z') + \int_{z'}^{z''} \frac{ac(z)}{\sqrt{1 - a^2 c(z)^2}} dz$$

gilt. Entsprechend erhält man für die Laufzeit aus

$$T(z'') = T(z') + \sum_{n=1}^N \frac{\Delta z}{c(z' + n\Delta z) \cos(\varepsilon(z' + n\Delta z))}$$

nach Grenzübergang $\Delta z \rightarrow 0$

$$T(z'') = T(z') + \int_{z'}^{z''} \frac{1}{c(z) \cos(\varepsilon(z))} dz = T(z') + \int_{z'}^{z''} \frac{1}{c(z) \sqrt{1 - a^2 c(z)^2}} dz.$$

Die Integrale sind bei linearem Geschwindigkeitsverlauf, d.h. konstantem Gradienten,

$$c(z) = c(z') + \alpha(z - z')$$

analytisch lösbar. Einsetzen von $c(z)$ in die Integrale liefert

$$r(z'') = r(z') + \int_{z'}^{z''} \frac{a(c(z') + \alpha(z - z'))}{\sqrt{1 - a^2(c(z') + \alpha(z - z'))^2}} dz$$

$$T(z'') = T(z') + \int_{z'}^{z''} \frac{1}{(c(z') + \alpha(z - z')) \sqrt{1 - a^2(c(z') + \alpha(z - z'))^2}} dz$$

und mit der Substitution

$$y = c(z) = c(z') + \alpha(z - z') \Rightarrow dy = c'(z)dz = \alpha dz$$

schließlich

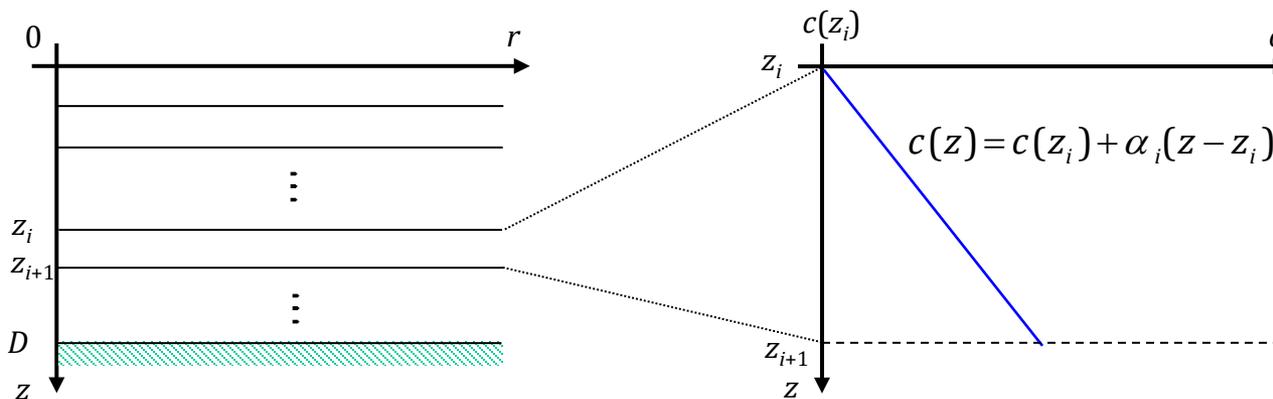
$$\begin{aligned} r(z'') &= r(z') + \int_{c(z')}^{c(z')+\alpha(z''-z')} \frac{ay}{\sqrt{1-a^2y^2}} \frac{1}{\alpha} dy \\ &= r(z') - \frac{1}{\alpha a} \sqrt{1-a^2y^2} \Big|_{c(z')}^{c(z')+\alpha(z''-z')} \\ &= r(z') - \frac{1}{\alpha a} \left\{ \sqrt{1-a^2(c(z')+\alpha(z''-z'))^2} - \sqrt{1-a^2c^2(z')} \right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$T(z'') = T(z') + \int_{c(z')}^{c(z')+\alpha(z''-z')} \frac{1}{y\sqrt{1-a^2y^2}} \frac{1}{\alpha} dy = \dots$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= T(z') - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2 y^2}}{ay} \right) \Bigg|_{c(z')}^{c(z') + \alpha(z'' - z')} \\
 &= T(z') - \frac{1}{\alpha} \left\{ \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2 (c(z') + \alpha(z'' - z'))^2}}{a(c(z') + \alpha(z'' - z'))} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - a^2 c^2(z')}}{ac(z')} \right) \right\} \\
 &= T(z') - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{\left(1 + \sqrt{1 - a^2 (c(z') + \alpha(z'' - z'))^2} \right) ac(z')}{a(c(z') + \alpha(z'' - z')) \left(1 + \sqrt{1 - a^2 c^2(z')} \right)} \right).
 \end{aligned}$$

Zur approximativen Berechnung des Schallstrahlverlauf in einem inhomogenen Wellenleiter wird der Schallgeschwindigkeitsverlauf durch einen Polygonzug, d.h. durch einen Verlauf mit abschnittsweise konstantem Schallgeschwindigkeitsgradienten, angenähert und anschließend die zuvor für konstante Gradienten hergeleitete analytische Lösung sequenziell auf diese Abschnitte angewendet.



Literatur zu Kapitel 8

- [1] D.T. Blackstock, *Fundamentals of Physical Acoustics*, Wiley, 2000
- [2] L.M. Brekhovskikh und Yu.P. Lysanov, *Fundamentals of Ocean Acoustics*, Springer, 2003
- [3] L.M. Brekhovskikh und O.A. Godin, *Acoustics of Layered Media II*, Springer, 1999
- [4] F.B. Jensen, W.A. Kuperman, M.B. Porter und H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics*, Springer, 2000
- [5] H. Medwin und C.S. Clay, *Fundamentals of Acoustical Oceanography*, Academic Press, 1997
- [6] R. Lerch, G. Sessler und D. Wolf, *Technische Akustik: Grundlagen und Anwendungen*, Springer, 2009